Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 9, 265—269 (1968)

Sur certains semi-groupes de matrices non negatives

MARCEL PAUL SCHÜTZENBERGER

Recu 1 Juillet 1966

Introduction

On se propose de vérifier l'énoncé suivant qui constitue l'une des généralisations possibles d'un théorème de WOLFOWITZ ([1], cf. [2]).

Propriété. *Soit A un semigroupe finiment engendré de matrices de dimension finie à éléments non négatifs satisfaisant les deux conditions suivantes:*

(I) *Il n'existe aucune paire d'indices telle que l'élément correspondant de toutes les matrices de A soit nul;*

(II) *Toutes les matrices $a \in A$ ont le mème nombre positif q de racines caractéristiques de module unité et satisfont* $\limsup \| a^n \| < \infty$.

On a alors $0 = \limsup\limits_{m\to\infty} \left\{ \left\| a - \lim\limits_{n\to\infty} a^{1+nq!} \right\| : a \in A^m \right\}$.

En raison de (II), l'existence des matrices limite $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1+nq!}$ résulte immédiatement du théorème de PERRON et FROBENIUS qui établit que pour chaque $a \in A$ les q racines caractéristiques qui ne sont pas de module strictement inférieur à 1 sont de fait des racines $q!$-ièmes de l'unité.

Comme d'usage, on appelera «monoïde» tout semi groupe possédant un élément neutre (noté e) et, à ceci près, la terminologie sera celle de [3]. On utilisera le cas particulier suivant de théorèmes bien connus (cf. [3]).

Soit A^* un monoïde possédant des idéaux à droite minimaux R_i $(i \in I)$ et des idéaux à gauche minimaux L_j $(j \in J)$. On a $\bigcup \{R_i \colon i \in I\} = \bigcup \{L_j \colon j \in J\}$. Les quasi idéaux minimaux $R_i \cap L_j = R_i A^* L_j = R_i L_j$ $(i \in I,\ j \in J)$ sont deux à deux disjoints et sont tous isomorphes à un mème group abstrait. Pour chaque $a \in A^*$, la translation $(R_i \cap L_j)\, a$ (resp. $a (R_i \cap L_j)$) est une bijection de $R_i \cap L_j$ sur un quasi-idéal minimal $R_i \cap L_{j'}$ (resp. $R_{i'} \cap L_j$).

Il est commode de noter qu'un élément b d'un monoïde B^* appartient à des idéaux minimaux à gauche et à droite de ce dernier si et seulement si

$$b \in b\, b' B^* \cap B^* b' b$$

pour tout $b' \in B^*$. Cette condition est satisfaite si pour chaque $b' \in B^*$ il existe un entier naturel p tel que $b = (b\, b'\, b)^p$.

Vérification de la Propriété

Elle se réduit à celle des cinq remarques suivantes.

Remarque 1. *Soit* $\bar{A} = \left\{ \lim\limits_{n\to\infty} a^{1+nq!} \colon a \in A \right\}$. *Le monoïde A^* engendré par $A \cup \bar{A}$ admet des idéaux minimaux à droite et à gauche dont l'union contient $\bar{A}$.*

Preuve. Par définition tout élément de A^* est égal à un produit $c = a_1' a_2' \cdots a_k'$ $(0 \leqq k < \infty)$ dont chacun des facteurs appartient à A ou à $\bar{A}$. Comme

$$\limsup_{n, n' \to \infty} \| a^{1+nq!} - a^{1+n'q!} \| = 0$$

pour tout $a \in A$, on peut écrire $c = \lim c^{(n)}$ où $c^{(n)}$ est le produit de facteurs a_i'' $(1 \leqq i \leqq k)$ de la forme a_i ou $a_i^{nq!+1}$ avec $a_i \in A$. Pour chaque valeur finie de n, $c^{(n)}$ appartient à A et possède donc q racines caractéristiques de module unité. On peut choisir les vecteurs propres associés à ces racines de telle facon qu'ils convergent quand n tend vers l'infini et par conséquent c possède au moins q racines caractéristiques de module unité.

Supposons maintenant que $c \in A^* \bar{A} A^*$, c'est à dire qu'au moins un des facteurs a_i'' a la forme $a_i^{nq!+1}$. L'espace nul du facteur correspondant $a_i' = \lim_{n \to \infty} a_i^{nq!+1}$ de c a codimension q et par conséquent l'espace nul de c a codimension $\leqq q$. Compte tenu de ce que c a au moins q racines caractéristiques de module unité, ceci établit que c a exactement q semblables racines et que q est aussi la codimension de son espace nul. Utilisant le théorème de Perron et Frobenius, on en conclut que $c = c^{1+q!}$ et $c^{q!} = c^{2q!}$ pour tout $c \in A^* \bar{A} A^*$. Maintenant, quelque soit $c' \in A^*$ le produit $cc'c$ appartient à $A^* \bar{A} A^*$ et satisfait donc $(cc'c)^{q!} = (cc'c)^{2q!}$. Les espaces nuls à droite et à gauche de $(cc'c)^{q!}$ contiennent les espaces nuls correspondant de $c^{q!}$ et plus précisément leur sont égaux puisqu'ils ont la même codimension q. Comme $c^{q!}$ et $(cc'c)^{q!}$ sont idempotents, il en résulte que $c^{q!} = (cc'c)^{q!}$, donc comme on l'a rappelé dans l'Introduction que $c^{q!}$ appartient à des idéaux minimaux à droite et à gauche. Il en est de même pour c puisque $c \in c^{q!} A^* \cap A^* c^{q!}$ en vertu de $c = c^{q!+1}$ et la vérification de la Remarque est achevée. On montrerait sans peine que $\bar{A}$ est exactement l'union de tous les idéaux minimaux de A^*.

Remarque 2. *Il existe un homomorphisme μ de A^* dans un monoïde fini qui est tel que sa restriction à chacun des quasiidéaux minimaux de A^* est injective et que tous les idemptotents de μA^*, sauf μe, sont contenu dans l'union de ses idéaux minimaux.*

Preuve. Utilisant les notations rappelées dans l'Introduction, on choisit un quasi-idéal minimal $R_1 \cap L_1$ et des bases fixes $R_1' \subset R_1$ et $L_1' \subset L_1$ des modules sur R engendrés respectivement par les matrices de R_1 et de L_1.

Pour $a, a' \in A^*$ on pose

$$[a, a'] = [a', a] = \operatorname{Sup}\{\| bac - ba'c \| : b \in R_1',\ c \in L_1'\}.$$

La relation $[\ ,\ ] = 0$ sur $A^* \times A^*$ est une équivalence n'ayant qu'un nombre-fini de classes. En effet, d'une part les ensembles R_1' et L_1' sont finis puisque la dimension commune des matrices de A^* est finie; d'autre part l'ensemble $R_1' A^* L_1'$ est fini puisqu'il est contenu dans $R_1 A^* L_1 = (R_1 A^*)(A^* L_1) = R_1 L_1 = R_1 \cap L_1$ et que ce dernier ensemble lui méme est fini en tant que groupe de matrices de dimension finie dont l'ordre des éléments est borné (par $q!$).

Cette même relation est une congruence car $[a, a'] = 0$ entraine

$$\operatorname{Sup}\{\| bac - ba'c \| :\ b \in R_1,\ c \in L_1\} = 0$$

puisque R_1' et L_1' sont des bases de R_1 et de L_1 respectivement, donc, pour tout $d, d' \in A^*$, $\operatorname{Sup}\{\| bdad'c - bda'd'c \| :\ b \in R_1, c \in L_1\} = 0$ puisque R_1 et L_1

satisfont identiquement $R_1 d \subset R_1$ et $d' L_1 \subset L_1$ en tant qu'idéaux à droite et à gauche respectivment, donc enfin $[dad', da'd'] = 0$.

Soit μ l'homomorphisme naturel de A^* sur son monoïde quotient défini par la congruence $[\,,\,] = 0$. L'ensemble $\mu(R_1 \cap L_1)$ est contenu dans un quasi-idéal minimal de μA^* puisque $R_1 \cap L_1$ est un quasi idéal minimal de A^* et la restriction de μ à $R_1 \cap L_1$ est injective puisque par construction la restriction de $[\,,\,] = 0$ à cet ensemble se réduit à la relation d'identité. Maintenant, pour n'importe quel élément $d \in R_1 \cap L_1$ et chaque quasi-idéal $R_i \cap L_j$ $(i \in I,\ j \in J)$ l'application $R_i \cap L_j \to d(R_i \cap L_j)d$ est une bijection sur $R_1 \cap L_1$ et comme cette application commute avec μ on a vérifié que la restriction de μ à chacun des quasi-idéaux minimaux de A^* est injective.

Finalement si $a \in A^*$ est tel que $\mu a = \mu a^2$, on a $[a, a^2] = 0$, donc $[a, \bar{a}] = 0$ et $\mu a = \mu \bar{a}$ où $\bar{a} = \lim\limits_{n \to \infty} a^{1+nq!}$. Par conséquent si $a \neq e$ l'élément μa appartient à l'union des ideaux minimaux de μA^* puisqu'il est égal à $\mu \bar{a}$ où, comme on l'a vu dans la Remarque précedente, $\bar{a}$ appartient à l'union des idéaux minimaux de A^*. Ceci conclut la vérification de la Remarque.

Remarque 3. *Soit B^* (respectivement D) le monoïde (resp. l'idéal bilatère de B^*) formé de toutes les matrices b à éléments non négatifs de la forme*

$$b = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_k a_k \qquad (0 < k < \infty)$$

où les r_i sont des quantités réelles de somme 1 *et les a_i des matrices de A^* (resp. de $A^* \bar{A} A^*$) ayant même image par μ. Le monoïde B^* admet des idéaux minimaux à droite et à gauche dont l'union est égale à D^2. De plus*

$$\omega \underset{\text{def}}{=} \operatorname{Sup}\{\|b\| : b \in B^*\} < \infty.$$

Preuve. Comme la restriction de μ à chacun des quasi-idéaux minimaux de A^* est injective, tout $b \in D$ a la forme $b = \sum\limits_{ij} r_{ij} a_{ij}$ où chaque a_{ij} appartient à $R_i \cap L_j$ et où ij parcourt l'ensemble d'indices $I \times J$. On pose

$$p_i = \sum_j r_{ij}; \qquad q_j = \sum_i r_{ij}$$

et on note D' l'ensemble des $b \in D$ tels que $r_{ij} = p_i q_j$ pour tout $ij \in I \times J$.

Soient

$$b = \sum_{ij} r_{ij} a_{ij} \quad \text{et} \quad b' = \sum_{ij} r'_{ij} a'_{ij}$$

deux élements de D. Pour chaque paire $ij' \in I \times J$ tous les produits $a_{ij} a'_{i'j'}$ $(j \in J,\ i' \in I)$ sont contenus dans $R_i \cap L_{j'}$ et ont la même image par μ. En raison du caractère injectif de μ, ils sont donc tous égaux à un même élément $a''_{ij'} \in R_i \cap L_{j'}$ et on a $bb' = b'' = \sum\limits_{ij'} p_i q'_{j'} a''_{ij'}$ ce qui montre d'abord que $D^2 \subset D'$, ensuite que si $b \in D'$ (resp. $b' \in D'$) les coefficients p''_i (resp. q''_j) de b'' sont les même que les coefficients correspondant de b (resp. de b') et qu'ils sont donc indépendants de l'autre facteur du produit.

Étendant de facon naturelle μ à un homomorphisme de B^* dans μA^*, on en conclut immédiatement que pour $b, b' \in D'$, l'ensemble $bD'b'$ est isomorphe au groupe $R_1 \cap L_1$ et qu'en particulier $bb''b = (bb''b)^{q!+1}$ quelques soient $b \in D'$ et $b'' \in D$, donc, quelque soit $b'' \in B^*$, puisque l'on peut écrire $bb''b = bb^{q!}b''b^{q!}b$ où $b^{q!}b''b^{q!} \in D$ et $b = bb^{q!}$. Ceci achève d'établir $D^2 = D'$ et le fait que D^2 est contenu dans l'union des idéaux minimaux de B^*.

Pour vérifier $\omega < \infty$, notons d'abord que la condition (I) sur A équivaut à l'existence d'une quantité positive telle que pour chaque paire d'indices une au moins des matrices de A ait son élément correspondant supérieur à cette quantité. Comme $\bar{A}$ est un idéal à droite et à gauche et que toutes les matrices de la forme $a^{q!}$ $(a \in \bar{A})$ ont trace q et une dimension finie, la même condition est satisfaite par $\bar{A}$. Comme pour chaque $b \in B^*$ et $a \in \bar{A}$ la matrice $aba \in D^2$ est d'ordre fini et que par conséquent aucun de ses éléments diagonaux ne peut être supérieur à 1, on en conclut que l'ensemble de tous les éléments des matrices $b \in B^*$ est borné supérieurement et la Remarque est entiérement vérifiée puisque les matrices de B^* sont de dimension finie.

Remarque 4. *L'application π de B^* dans l'intervalle* $[0, 1]$ *définie pour tout $b \in B^*$ par*

$$\pi b = \operatorname{Inf}\{s \in [0,1] \colon b = (1-s)b_1 + s b_2;\ b_1 \in D;\ b_2 \in B^*;\ \mu b_1 = \mu b_2\}$$

est submultiplicative et pour tout b, $b' \in B^*$ on a

$$\left\| b b' - \lim_{n\to\infty} (b b')^{1+nq!} \right\| \leqq 5\,\omega(\pi b + \pi b' - \pi b \cdot \pi b')\,.$$

Preuve. Soient $b = (1-s)b_1 + s b_2$; $b' = (1-s')b_1' + s' b_2'$ où $s = \pi b$; $s' = \pi b'$; $b_1, b_1' \in D$; $b_2, b_2' \in B^*$; $\mu b_1 = \mu b_2$; $\mu b_1' = \mu b_2'$. On peut écrire $bb' = (1 - ss')b_1'' + ss' b_2 b_2'$ où la matrice b_1'' est égale à $(1-ss')^{-1}((1-s)b_1 b_1' + (1-s)s' b_1 b_2' + s(1-s')b_2 b_1')$ et appartient à D puisque ses coefficients ont somme 1 et que les matrices $b_1 b_1'$, $b_1 b_2'$ et $b_2 b_1'$ appartiennent à D et ont la même image par μ. Ceci établit $\pi(bb') \leqq \pi b \cdot \pi b'$.

D'autre part on peut écrire $bb' = (1-t)d + td'$ où $t = \pi b + \pi b' - \pi b \cdot \pi b$; $d = b_1 b_1' \in D^2$ et $d' \in B^*$. Si $c = \lim_{n\to\infty}(bb')^{nq!-1}$ on a $\mu dcd = \mu d$ car d'une part $\mu d = \mu(bb')$ par construction, et, d'autre part $\mu d = \mu d^{nq!+1}$ pour tous les entiers n puisque $d \in D^2$. Comme dcd et d appartiennent au même quasi-idéal minimal de B^* ainsi qu'on là vu dans la Remarque 3, on en conclut que de fait $dcd = d$. Tenant compte de cette égalité et substituant $(1-t)d + td'$ à bb' dans l'expression $bb' - bb'cbb'$ de $bb' - \lim_{n\to\infty}(bb')^{nq!+1}$, on trouve que cette différence est égale à $t(d' - (1-t)\,(dcd + dcd' + d'cd) - td'cd')$ ce qui livre l'inégalité cherchée.

Remarque 5. *A chaque ε positif il correspond un entier naturel m; tel des matrices de $A^m \in A^*$ soit égale à un produit $a'a''$ où a', $a'' \in A^*$ satisfont $\pi a'$, $\pi a'' < \varepsilon$.*

Preuve. L'hypothése que A est finiment engendré implique que

$$\bigcup\{A^{p'} \colon 0 < p' \leqq p\}$$

soit un ensemble fini pour tout entier naturel p et, en raison du caractère submultiplicatif de π, il suffit de vérifier l'existence d'un $p < \infty$ tel que $\pi a < 1$ pour tout $a \in A^p$.

Soit β l'homomorphisme de B^* dans le monoïde de relations binaires qui envoye chaque $b \in B^*$ sur l'ensemble des paires d'indices pour lesquelles l'élément correspondant de b est positif ([1]). βB^* est un monoïde fini. Il en est de même du produit direct $\mu B^* \times \beta B^*$ et on peut donc trouver un entier naturel p tel que chacune des matrices de A^p soit égale à un produit $a_1 a a_2$ où $a_1, a_2 \in A^*$ et où $a \in AA^*$ satisfait $\mu a = \mu a^2$ et $\beta a = \beta a^2$ (cf. [1]). Posant $\bar{a} = \lim_{n \to \infty} a^{nq!+1}$, ces équations impliquent $\mu \bar{a} = \mu a$ et $\beta \bar{a} \subset \beta a$. Cette derniére relation entraine l'existence d'une quantité non négative $r < 1$ pour laquelle $r^{-1}(a - (1 - r)\bar{a}) = a'$ est une matrice à éléments non nègatifs. On a $a' \in B^*$ puisque d'une part $r^{-1} - r^{-1}(1 - r) = 1$ et, d'autre part, $\mu \bar{a} = \mu a$. Par conséquent $\pi a \leqq r < 1$ et la vérification de la Propriété est achevée.

Bibliographie

1. Wolfowitz, J.: Products of indecomposable, aperiodic stochastic matrices. Proc. Amer. math. Soc. **14**, 733–737 (1963).
2. Larisse, J., et M. P. Schützenberger: Sur certaines chaines de Markov non homogènes. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **13**, 57–66 (1964).
3. Clifford, A. H., and G. B. Preston: The algebraic theory of semi groups. Math. Survey **7**, Amer. Math. Soc. (1961).

Prof. M. P. Schützenberger
Faculté des Sciences
23, rue du Maroc
F 75 Paris 19⁰ (France)