C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 420-421 (8 février 1971). Série A

ALGÈBRE. — *Sur un théorème de G. de B. Robinson.* Note (*) de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On énonce deux propriétés nouvelles permettant de simplifier la correspondance établie par G. de B. Robinson entre permutations et tableaux de Young [1].

Un théorème de G. de B. Robinson [2] établit l'existence d'une bijection entre permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et paires de tableaux (standards de Young) $(\sigma P, \overset{-1}{\sigma} P)$ de même forme sur l'ensemble totalement ordonné $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. On se propose ici de signaler deux propriétés nouvelles de cette correspondance qui permettraient d'en donner une définition plus géométrique.

Dans ce qui suit, on considère un ensemble ordonné fixe $(X, \leqq)$ et pour chaque intervalle fini I de **Z**, on désigne par $\Phi(I)$ la famille des injections $\varphi : I \to X$ telles qu'il existe un morphisme (d'ensemble ordonné) $\rho : X \to \mathbf{Z}$ pour lequel $\varphi = \overset{-1}{\rho} \mid I$. Ceci implique que l'image $I\varphi$ soit un intervalle de $X\,(x, x' \in I\varphi,\ x \leqq x'' \leqq x' \Rightarrow x'' \in I\varphi)$ et on dira que φ est *principale* (resp. *coprincipale*), si et seulement si, il en est de même de $I\varphi$, c'est-à-dire, si et seulement si, $I\varphi$ a un élément minimal (resp. maximal) (unique).

Notant Φ l'union des $\Phi(I)$ sur tous les intervalles finis de **Z** on définit aussi une relation $\mathfrak{T}_1 \subset \Phi \times \Phi$ par la condition que $(\varphi, \psi) \in \mathfrak{T}_1$, si et seulement si,

(1) φ et ψ ont même domaine;

(2) $\varphi \leqq \psi$ (c'est-à-dire $i \in I \Rightarrow i\varphi \leqq i\psi$);

(3) $2 = \mathbf{Card}\,((I\varphi \cup I\psi) \setminus (I\varphi \cap I\psi))$.

On désigne par $\mathfrak{T}$ la relation d'ordre fermeture de transitivité de $\mathfrak{T}_1$ et on vérifie que tout coidéal $\varphi\mathfrak{T}^{-1} (= \{\psi \in \Phi : (\psi, \varphi) \in \mathfrak{T}\})$ contient au moins un élément principal, si et seulement si,

(4) Toute partie finie de X est contenue dans un intervalle principal fini.

Supposons maintenant que $(X, \leqq)$ est le groupe $\mathbf{Z}^k$ ordonné de façon naturelle, ce qui implique (4). On considère le quotient $\overline{\Phi}$ de Φ par l'équivalence de translation $\sim$ ($\varphi \sim \varphi'$ ssi il existe $t \in \mathbf{Z}^k$ tel que $\varphi' = t + \varphi$) et on note $\overline{\mathfrak{T}}$ le préordre sur $\overline{\Phi}$ induit par $\mathfrak{T}$. Les énoncés substantiels de la théorie ne sont vrais que dans le cas classique de $k = 2$ auquel nous nous limitons désormais. Les tableaux de Young sont alors les éléments principaux de $\overline{\Phi}([n])\,([n] = \{1, 2, \ldots, n\},\ n \in \mathbf{N})$ et la propriété que nous avons en vue est la suivante :

Propriété 1. — *Toute classe* $S \subset \overline{\Phi}$ *de l'équivalence fermeture de* $\overline{\mathfrak{T}} \cup \overline{\mathfrak{T}}^{-1}$ *contient exactement un élément principal (noté* S^P*) et la* $\overline{\mathfrak{T}} \cap \overline{\mathfrak{T}}^{-1}$*-classe de celui-ci est l'élément minimal de* S *pour* $\overline{\mathfrak{T}}$.

Pour rattacher ceci au théorème de G. de B. Robinson, considérons les deux projections $\pi_i : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}\ (i = 1, 2)$ et notons qu'à chaque $\varphi \in \Phi([n])$ et $i = 1$ ou 2 correspond une et une seule surjection $\hat{\varphi}_i : [n] \to [m_i]$ (où $m_i =$ **Card** $([n]\varphi\pi_i)$ telle qu'il existe un morphisme surjectif $\zeta_i : \mathbf{Z} \to [m_i]$ satisfaisant $\hat{\varphi}_i = \varphi\pi_i\zeta_i\ (i = 1, 2)$. On écrira $\varphi \in \Phi_i$ ssi $\hat{\varphi}_i$ est une permutation (c'est-à-dire, si et seulement si, $m_i = n$).

PROPRIÉTÉ 1 *bis*. — *Soit* S *comme ci-dessus. L'ensemble des permutations admettant* S^P *comme tableau de Robinson est précisément* $\{\hat{\varphi}_2 : \varphi \in S \cap \Phi_2\}$.

Le corollaire suivant correspond au cas où S consiste en une seule $\overline{\mathfrak{T}} \cap \overline{\mathfrak{T}}^{-1}$-classe et où les permutations telles que $\sigma P = S^P$ admettent une description particulièrement transparente [*cf.* (3), p. 120].

COROLLAIRE 2. — *Soient* $n = pq$ *et* $\varphi \in \Phi([n])$ *tels que* $[n]\varphi = [p] \times [q]$. *Pour chaque* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *tel que* $\sigma P = \varphi$ *la permutation* $\bar{\sigma}$ *définie par*

$$j \in [n] \Rightarrow j\bar{\sigma} = (n+1) - (n+1-j)\sigma$$

satisfait $\bar{\sigma}P = \bar{\varphi}$ *où* $\bar{\varphi} \in \Phi([n])$ *est définie par*

$$j \in [n] \Rightarrow j\bar{\varphi} = (p+1, q+1) - (n+1-j)\varphi.$$

(*) Séance du 1er février 1971.

(1) Je profite de cette occasion pour m'excuser d'avoir commis dans une publication antérieure une attribution incorrecte de ce résultat par ignorance du Mémoire (2) de G. de B. Robinson.

(2) G. DE B. ROBINSON, *Amer. J. Math.*, 60, 1938, p. 745-760.

(3) D. E. KNUTH, *Pacific J. Math.*, 34, 1970, p. 709-727.

(9, *villa Poirier*, 75-*Paris*, 15e.)