ARTICLE EXTRAIT
DES ACTES DU
CONGRÈS INTERNATIONAL
DES MATHÉMATICIENS

NICE - SEPTEMBRE 1970

ARTICLE FROM THE
PROCEEDINGS OF THE
INTERNATIONAL CONGRESS
OF MATHEMATICIANS

NICE - SEPTEMBER 1970

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
55, quai des Grands-Augustins, Paris 6e
1971

Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 3, p. 281 à 282.

PARTIES RATIONNELLES D'UN MONOIDE LIBRE

Par M. P. SCHUTZENBERGER

On résume certains résultats obtenus avec S. Eilenberg avec l'étude des *parties rationnelles* du monoïde libre X^* engendré par l'ensemble fini X. Par *partie*, A, on entend ici une fonction $A : X^* \to N$, c'est-à-dire une série formelle (à coefficients dans N) en les variables (non commutatives) $x \in X$. La famille des parties rationnelles **Rat** (X) est la plus petite famille **R** telle que :

(1) $$\{0\} \in \mathbf{R} \ ; s \in X^* \Rightarrow \{s\} \in \mathbf{R}$$

(2) $$A , B \in \mathbf{R} \Rightarrow A + B \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad A\,B \in \mathbf{R} \ ;$$

(3) $$A \in \mathbf{R} , A\,(0) = 0 \Rightarrow A^* = 1 + \sum_{0<n} A^n \in \mathbf{R}.$$

On sait que $A : X^* \to N$ appartient à **R** ssi il existe $k \in N$ et une représentation $\mu : X^* \to N^{k \times k}$, telle que pour chaque $s \in X^*$, la valeur $A\,(s)$ du coefficient de s dans A soit l'élément $(s\,,k)$ de la matrice $s\mu$. On peut montrer que pour $A \in$ **Rat** (X) donné on peut choisir k et μ de telle sorte que tous les éléments de $x\mu$ $(x \in X)$ soient 0 ou 1. Le plus petit $k \in N$ pour lequel ceci est possible est le *nombre d'états* de A.

THEOREME 1. – *Soient donnés $A\,,B \in$ **Rat** (X) de nombre d'états $\leqslant k$. L'égalité $A = B$ est décidable. L'inégalité $A \leqslant B$ (c'est-à-dire $s \in X^* \Rightarrow A\,(s) \leqslant B\,(s)$) est indécidable.*

Soient maintenant p un entier positif et $A \in$ **Rat** (X). Les relations

$$A = p\,B + C, C \leqslant p\,X^*$$

définissent de façon unique deux parties $B\,,C : X^* \to N$. Généralisant un théorème bien connu de Kronecker, on a :

THEOREME 2. – *B et C appartiennent à* **Rat** (X^*).

La démonstration utilise le résultat suivant :

THEOREME 3. – *Soient $F\,,G \in$ **Rat** (X^*) où G est bornée (c'est-à-dire Sup $\{G(s) \ : \ s \in X^*\} < \infty$). Alors $F \dot{-} G \in$ **Rat** (X^*) où $H = F \dot{-} G$ est définie par*

$$s \in X^* \Rightarrow H\,(s) = \operatorname{Max}\,\{0, F(s) - G\,(s)\}.$$

Des contre exemples montrent que l'hypothèse G bornée est effectivement nécessaire dans cet énoncé, et qu'en particulier $F\,,G \in$ **Rat** (X), $G \leqslant F$ n'implique pas $F \dot{-} G \in$ **Rat** (X^*).

Généralisant la notion de produit de Hadamard, définissons maintenant pour $A\,,B : X^* \to N$, leur "intersection" $G = A \cap B$ par la condition

$$s \in X^* \Rightarrow G\,(s) = A\,(s)\,B\,(s).$$

On sait que $A\,, B \in$ **Rat** $(X) \Rightarrow A \cap B \in$ **Rat** (X). Le "problème inverse" n'est pas résolu (même dans le cas classique des fonctions rationnelles dont la série de Taylor a ses coefficients dans Z) et nous proposons les

CONJECTURES (1). – Si $A, A \cap B \in$ **Rat** (X), il existe $C \in$ **Rat** (X) telle que $A \cap B = A \cap C$;

(2). – Si $A \cap A \in$ **Rat** (X) il existe $B \in$ **Rat** (X) telle que $A \cap A = B \cap B$.

Faculté des Sciences de Paris
Institut de Programmation
9, Quai Saint-Bernard,
Paris 5e
France