Séminaires IRIA

logique et automates

1971

LE THÉOREME DE LAGRANGE
SELON G.N. RANEY

M.P. Schützenberger

Soit $F(z) = \sum_{0 \leq k} a_k z^k$ ($a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$) une série formelle. La formule de Lagrange affirme que la série formelle

$$\sum_{1 \leq k} \frac{t^k}{k!} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} (F(t))^k \right]_{t=0}$$

est <u>la</u> solution (à coefficients dans $\mathbb{R}$, s'annulant pour $t = 0$) de l'équation $z = tF(z)$.

Ce résultat s'établit classiquement par les méthodes de la théorie des fonctions analytiques. Une preuve élémentaire n'utilisant que des manipulations de séries formelles non commutatives à coefficients dans $\mathbb{N}$ est dûe à Raney (1960) (Functional composition patterns and power series reversion. Trans. American Math. Soc. 94 pp. 441-451). On en donne ici une rédaction allégée.

Soit désormais $X = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ une famille de variables non commutatives et soit σ le morphisme dans $\mathbb{Z}$ du monoïde libre X^* envoyant chaque x_k sur $k-1$. La partie L de X^* définie ci-dessous généralise le langage de Lukasiewicz auquel elle se réduit en faisant
$L \to L \cap \{x_0, x_2\}^*$.

<u>Définition</u> : L est la famille des mots $f \in XX^*$ tels que :

i. $f\sigma = -1$

ii. $f' \in XX^*$, $f \in f'XX^* \Rightarrow f'\sigma \geq 0$.

<u>Propriété 1</u> : Pour chaque $p \in \mathbb{N}$

(1) tout mot de X^* a au plus un facteur gauche dans L^p .

(2) tout mot $f \in X^*$ tel que $f\sigma \leq -p$ a un facteur gauche dans L^p .

(3) L^p est la famille des mots f tels que :

(i') $f\sigma = -p$;

(ii') $f' \in XX^*$, $f \in f'XX^* \Rightarrow f'\sigma > -p$.

<u>Preuve</u> : L'énoncé est trivial pour $p = 0$ puisque pour toute partie A de X^* , A^o est l'élément neutre 1 de X^* . Soit désormais p positif. L'assertion (1) résulte par induction sur p du cas où $p = 1$, qui est lui même une conséquence immédiate de la définition puisque celle-ci entraîne $LXX^* \cap L = \emptyset$, d'après ii. Soit $f \in X^*$ tel que $f\sigma = -p$ et soit g le plus court facteur gauche de f tel que $g\sigma < 0$. Comme $x_k\sigma \geq 0$ pour tout $k \geq 1$, on a $g = g'x_o$ où $g'\sigma = g\sigma + 1$ puisque $x_o\sigma = -1$. Donc, d'après l'hypothèse de minimalité de g on a d'abord $g'\sigma \geq 0$, donc, de fait $g'\sigma = g\sigma + 1 = 0$, ensuite $g''\sigma \geq 0$ pour tout facteur gauche g'' de g' . Par conséquent $g \in L$.

Définissant $f_1 \in X^*$ par $f = gf_1$, on a $f_1\sigma = f\sigma - g\sigma = -p+1$, ce qui établit l'assertion (2) par inductoon sur p .

Vérifions maintenant (3) . Soit $f = g_1g_2 \ldots g_p$ où $g_1,g_2,\ldots,g_p \in L$. Tout facteur gauche propre f' de f a la forme $f' = g_1g_2 \ldots g_{p'}g'$ où $p' \leq p-1$ $g_{p'+1} = g'g''$, $g'' \in XX^*$. Donc d'après la définition de L , $g'\sigma \geq 0$ et $f'\sigma = -p' + g'\sigma > f\sigma = -p$, ce qui montre que tout $f \in L^p$ satisfait (i') et (ii').

Réciproquement, si $f \in X^*$ satisfait ces relations, l'assertion (2) implique $f = f'f''$ où $f' \in L^p$ et la condition (ii') entraîne $f = f' \in L^p$ puisque $f'\sigma = -p = f\sigma$.

Identifions maintenant L à l'élément correspondant $L = \Sigma\{f : f \in X^*\}$ de l'algèbre large de X^*.

Propriété 2 : L est défini par l'équation :

$$L = \sum_{0 \leq k} x_k L^k .$$

Preuve : D'après la proposition 1 (1), chaque mot de X^* admet au plus une factorisation de la forme $x_k g$ $(g \in L^k)$. Il suffit donc de montrer l'égalité des ensembles L et $\bigcup_{0 \leq k} x_k L^k$.

Soit $f = x_k g$ où $g \in L^k$. Si $k = 0$ on a $g = 1$ et la conclusion $x_0 \in L$ résulte de la définition de L. Si $k \geq 1$ on a $f\sigma = x_k\sigma + g\sigma = k-1-k = -1$. D'autre part, si $f' \in XX^*$ est facteur gauche propre de f, on a $f' = x_k g'$ où $x_k\sigma \geq 0$ et où $g'\sigma \geq -k+1$ puisque g' est facteur gauche propre de g. Donc $f'\sigma = x_k\sigma + g'\sigma = k-1+g'\sigma \geq 0$ prouvant $f \in L$ donc $\bigcup_{0 \leq k} x_k L^k \subset L$.

Réciproquement, soit $f = x_k g \in L$ $(x_k \in X, g \in X^*)$. On a par hypothèse $f\sigma = k-1+g\sigma = -1$, $f'\sigma = k-1+g'\sigma \geq 0$ pour tout facteur gauche propre $f' = x_k g'$ de f. La première relation entraîne $g\sigma = -k$ et la seconde $g'\sigma \geq -k+1$. On a donc $g \in L^k$ d'après la proposition 1 (3) ce qui établit $L \subset \bigcup_{0 \leq k} x_k L^k$.

Remarque : On vient de prouver l'existence de la solution. Son unicité (parmi les éléments de l'algèbre large de X^* sur $\mathbb{Z}$) est une conséquence facile du résultat (facile) d'existence et unicité des langages algébriques.

Propriété 3 : Pour tout k positif, chaque mot $f \in X^* \cap (-k)\sigma^{-1}$ admet exactement k factorisations distinctes $f = f'_j f''_j$ $(f''_j \neq 1)$ telles que $f''_j f'_j \in L^*$ $(= \bigcup_{0 \leq p} L^p)$.

Preuve : Considérons d'abord un mot $f = g_1 g_2 \ldots g_k \in L^k$ $(g_1, g_2, \ldots, g_k \in L)$. Les k factorisations $f'_j = g_1 \ldots g_{j-1}$ $f''_j = g_j \ldots g_k$ $(j=1,2,\ldots,k$; $f'_1 = 1$, $f''_1 = f)$ satisfont trivialement $f''_j f'_j \in L^k$. Toute autre factorisation de f a la forme

$f'_j = g_1 \dots g_{j-1}g' = h'g'$ $\quad f''_j = g''g_{j+1} \dots g_k = g''h''$ avec $g'g'' = g_j$, $g'' \neq 1, g_j$.

D'après la définition de L on a $g'\sigma \geq 0$, et par conséquent $g''\sigma = -1 - g'\sigma \leq -1$. Il en résulte que le facteur gauche $g''h''h'$ propre de $f''_jf'_j$ satisfait

$$g''h''h'\sigma = g''\sigma - (k-1) \leq f''_jf'_j\sigma = -k .$$

Donc d'après (3) ci-dessus $f''_jf'_j \notin L^*$ ce qui établit l'énoncé dans le cas considéré.

Considérons maintenant un $f \in X^* \cap (-k)\bar{\sigma}^1$ quelconque. Il suffit de montrer $f = f'f''$ où $f''f' \in L^k$. Définissons f' par la condition que $f'\sigma \leq h\sigma$ pour tout facteur gauche h de f et que f' soit le plus court facteur gauche pour lequel ce minimum soit atteint.

La première partie de la condition implique $g\sigma \geq 0$ pour tout facteur gauche g . Il suffit maintenant de montrer que tout mot $f \in (-k)\bar{\sigma}^1$ a une factorisation $f'f''$ telle que $f''f' \in L^k$.

Déterminons f' par la double condition que $f'\sigma \leq h\sigma$ pour tout facteur gauche h de f et que f' soit le plus court facteur ayant cette propriété.

La première partie de la condition entraîne que $f'\sigma \leq f\sigma = -k$ et que $g\sigma \geq 0$ pour tout facteur gauche g de f'' $(f'f'' = f)$. La deuxième partie implique $g'\sigma > f'\sigma$ pour tout facteur gauche propre g' de f' . Distinguant deux cas selon la longueur relative de h' et de f'' pour tout facteur gauche propre h' de $f''f'$, on en conclut que $h'\sigma > f''f'\sigma = -k$, donc, d'après (3) que $f''f' \in L^k$.

<u>Corollaire 4</u> : Pour tout $m,k \geq 1$, on a

$$\text{Card } (X^m \cap L^k) = m^{-1}k \text{ Card } (X^m \cap (-k)\bar{\sigma}^1) .$$

<u>Preuve</u> : La <u>classe de conjugaison</u> d'un mot $f = y_1y_2 \dots y_m \in X^m$ $(y_1,y_2,\dots,y_m \in X)$ est l'ensemble des mots distincts de la forme $y_jy_{j+1} \dots y_my_1 \dots y_{j-1}$. Si $f = g_1g_2 \dots g_k \in L^k$, sa classe de <u>L-conjugaison</u> est l'ensemble des mots distincts $g_ig_{i+1} \dots g_kg_1 \dots g_{i-1}$

$(g_1, g_2, \ldots, g_k \in L)$.

Il est clair que la classe de conjugaison de f contient m' mots distincts ssi d'une part $m'^{-1}m = q \in \mathbb{N}$ et d'autre part sa classe de L-conjugaison contient $k' = q^{-1}k$ mots distincts.

La formule résulte alors de la proposition 3 qui établit une bijection entre les classes de conjugaison et de L-conjugaison.

Soit maintenant t une nouvelle lettre et soit $\mathfrak{C}$ l'algèbre large du monoïde <u>commutatif</u> libre engendré par $\{t\} \cup X$. Nous posons

$$F(t) = F = \sum_{0 \leq k} x_k t^k \in \mathfrak{C}$$

et nous désignons par $\frac{\partial}{\partial t}$, la dérivation de $\mathfrak{C}$ envoyant chaque t^n sur nt^{n-1} $(n \in \mathbb{N})$. Le morphisme naturel de X^* dans $\mathfrak{C}$ sera noté α .

<u>Formule 5</u> : Pour chaque $m, k \geq 1$

$$(X^m \cap L^k)\alpha = (m!)^{-1} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} (kt^{k-1}(F(t))^m)\right]_{t=0} .$$

<u>Preuve</u> : Soit $\tau : X^* \to \mathfrak{C}$ le morphisme envoyant chaque x_k sur $x_k t^k$, et par conséquent chaque $f \in X^n$ sur $f\alpha \, . \, t^{n+f\sigma}$.

Comme $F(t) = X\tau$ on a donc identiquement

$$(F(t))^m = \sum_{0 \leq q} t^q \, . \, (X^m \cap (q-m)\bar{\sigma}^1)\alpha .$$

Par conséquent, le membre de droite de la formule qui, par définition est égal à $(m!)^{-1} \times k \times$ (le coefficient de t^{m-1} dans $t^{k-1}(F(t))^m$) $\times (m-1)!$, c'est-à-dire à $m^{-1}k \times$ (le coefficient de t^{m-k} dans $(F(t))^m$) , se trouve être précisément $m^{-1}k(X^m \cap (m-k-m)\bar{\sigma}^1)\alpha = m^{-1}k(X^m \cap (-k)\bar{\sigma}^1)\alpha$, ce qui établit la formule d'après le corollaire 4.

Nous en venons maintenant à la preuve de la formule de Lagrange que nous établissons sous la forme plus générale de Bürmann (cf. Pólya et Szegö II. p. 125). Dans cette dernière $H(t) = \sum_{0 \leq k} h_k t^k$ $(h_k \in \mathbb{R})$ est une série formelle quelconque et l'on cherche $H(u)$ où u est la solution de

$u = tF(u)$.

Formùle de Lagrange Bürmann.

$$H(u) = h_o + \sum_{1\leq m} \frac{t^m}{m!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \left(\frac{\partial H(t)}{\partial t} \cdot (F(t))^m\right)\right]_{t=0} .$$

Preuve : Posons

$$L_q(t) = \sum_{1\leq m} t^m \cdot (X^m \cap L^q)\alpha \qquad (q \in \mathbb{N})$$

de telle sorte que

$$L_q(t) = L^q\theta = (L\theta)^q$$

où $\theta : X^* \to \mathfrak{a}$ désigne le morphisme envoyant chaque x_k sur tx_k .

Appliquant θ aux deux membres de l'équation

$$L = \sum_{0\leq k} x_k L^k$$

de la proposition 2 , on voit que $u = L_1(t) = L\theta$ satisfait l'équation

$$u = tF(u) .$$

$(F(u) = \sum_{0\leq k} x_k u^k)$.

D'autre part, d'après

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = \sum_{1\leq q} qh_q t^{q-1} ,$$

le membre de droite de la formule peut s'écrire :

$$h_o + \sum_{1\leq q} h_q \sum_{1\leq m} \frac{t^m}{m!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} qt^{q-1}(F(t))^m\right]_{t=0}$$

c'est-à-dire, d'après la formule 5 ,

$$h_o + \sum_{1\leq q} h_q \sum_{1\leq m} t^m (X^m \cap L_q)\alpha$$

et enfin

$$h_o + \sum_{1\leq q} h_q L_q = h_o + \sum_{1\leq q} h_q \cdot (L\theta)^q$$

c'est-à-dire $H(L\theta)$.

Formule de L.-B.- Tutte (1963). (Canadian J. of Math. 15 pp. 249-271)

Soit s une nouvelle variable commutative. Définissons les séries formelles $F_t(s)$ et $H_t(s)$ par

$$F_t(s) = F(t+s)$$

$$H_t(s) = H(t+s) .$$

D'après la formule de Lagrange Bürmann on a :

$$H_t(u) = h_o + \sum_{1\leq m} \frac{t^m}{m!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \left(\frac{\partial H_t(s)}{\partial s} (F_t(s))^m\right]_{s=0}$$

où $u = tF_t(u)$ puisque le nom des variables employé dans les dérivations importe peu.

Comme $\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} G(t)$ est égal à $\left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} G(t+s)\right]_{s=0}$ pour toute série formelle G , la formule ci-dessus peut encore s'écrire :

$$H(t+u) = h_o + \sum_{1\leq m} \frac{t^m}{m!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} H(t)\right)(F(t))^m\right)$$

où $u = tF(t+u)$.

Posant maintenant $t+u = v$, nous obtenons enfin la formule de Tutte :

$$H(v) = H(t) + \sum_{1\leq m} \frac{t^m}{m!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} H(t)\right)(F(t))^m\right)$$

où v est définie par $v = t + tF(v)$.