DISCRETE MATHEMATICS – Volume 2, No. 1 (1972) 73–94

PROMOTION DES MORPHISMES D'ENSEMBLES ORDONNES

M.P. SCHÜTZENBERGER
Paris VII et IRIA, France

Reçu le 3 mai 1971

Resumé. Deux constructions de la théorie des tableaux de Young developpée par Robinson and Knuth sont étendues à d'autres ensembles ordonnés finis.

§ 1. Introduction

Dans tout ce mémoire, on considérera un ensemble ordonné fixe $(A, \leq)$ ayant un nombre fini $1+q$ d'éléments, et pour chaque $z \in \mathbf{Z}$, $\mathcal{M}_z$ désignera la famille des *morphismes* (d'ensemble ordonné) *bijectifs* de A sur l'intervalle $I_z = \{z, z+1, ..., z+q\}$ de $\mathbf{Z}$. On posera

$$\mathcal{M} = \bigcup_z \mathcal{M}_z \, .$$

Dans le cas particulier où $(A, \leq)$ est un intervalle du groupe ordonné $\mathbf{Z}^2$, les éléments de $\mathcal{M}_1$ (ou plutôt les classes de $\mathcal{M}_1$ pour l'équivalence de translation dans $\mathbf{Z}^2$) sont connus sous le nom de *tableaux gauches de Young*. La théorie de la correspondance de Robinson [1] entre permutations du groupe symétrique et tableaux de Young utilise entre autres (cf. [2]) deux bijections remarquables, notées ici

$$\partial : \mathcal{M}_z \to \mathcal{M}_{z+1} \, ,$$

$$\# : \mathcal{M}_z \to \mathcal{M}_{-z-q} \, .$$

L'objet du présent travail est de présenter celles des propriétés de ∂ et $\#$ que nous avons trouvées rester vraies dans le cas d'un ensemble ordonné $(A, \leq)$ quelconque.

De fait il sera commode de considérer non seulement les morphismes de $\mathcal{M}$ mais aussi la famille

$$\mathcal{B} = \bigcup_z \mathcal{B}_z ,$$

où $\mathcal{B}_z$ désigne l'ensemble des *bijections* $A \to I_z$. Les principales définitions sont données dans cette section. Les énoncés formels et les preuves sont rassemblés dans les deux sections suivantes.

Les deux notions de base sont celles de traînée C_φ et de promotion ∂.

Définition 1. Soit $\varphi : A \to \mathbf{Z}$ une injection. La *traînée* C_φ est la chaîne

$$C_\varphi = \{C_\varphi^i = c_1 < c_2 < \ldots < c_k = C_\varphi^u\} \subset A ,$$

dont l'élément initial C_φ^i est $c_1 = (\min(A\varphi))\varphi^{-1}$ et pour laquelle, inductivement:

c_j = l'élément ultime C_φ^u ssi $\{a \in A : c_j < a\} = \phi$ (c'est-à-dire $c_j \in \max(A)$), et sinon

$c_{j+1} = (\min\{a\varphi : a \in A : c_j < a\})\varphi^{-1}$.

Définition 2. Soient φ et C_φ comme dans la Définition 1. La *promotion* est l'application $\varphi\partial : A \to \mathbf{Z}$ définie par

$$a \in A - C_\varphi \Rightarrow a\varphi\partial = a\varphi ,$$

$$c_j \in C_\varphi - C_\varphi^u \Rightarrow c_j\varphi\partial = c_{j+1}\varphi ,$$

$$C_\varphi^u\varphi\partial = 1 + \max(A\varphi) .$$

Autrement dit, $\varphi\partial$ se déduit de φ en supprimant la plus petite valeur $C_\varphi^i = \min(A\varphi)$, puis en faisant avancer d'un pas le long de la traînée chacune des valeurs $c_{j+1}\varphi \in (C_\varphi - C_\varphi^i)$ portées par celle-ci et enfin en attribuant au dernier élément C_φ^u de la traînée la nouvelle valeur

$$1 + \max(A\varphi) = \min\{z \in Z : A\varphi < z\} = \max(A\varphi\partial) .$$

Il est clair que quand φ est une bijection $A \to I_z$, la promotion $\varphi\partial$ est une bijection sur

$$I_{z+1} = 1 + I_z = \{z + q + 1\} \cup I_z - \{z\}\,.$$

L'exemple suivant, où $\varphi \in \mathcal{B}_z$ et où les traits symbolisent la relation de consécutivité associée à $\leq$, illustre les définitions précédentes (cf. figs. 1–3). On pourra noter que $\varphi\partial^2$ est un morphisme.

De façon duale, c'est-à-dire en considérant les structures d'ordre opposées, $(A, \geq) = \widetilde{A}$ et $(\mathbf{Z}, \geq)$, on définira la *traînée opposée*

$$\widetilde{C}_\varphi = \{\widetilde{C}^i_\varphi = c'_1 > c'_2 > \ldots > c'_{k'} = \widetilde{C}^u_\varphi\}\,,$$

où $\widetilde{C}^i_\varphi = (\max(A\varphi))\varphi^{-1}$ et la *promotion opposée* $\widetilde{\partial}$,

$$c'_j\varphi\widetilde{\partial} = c'_{j+1}\varphi\ ;\ \widetilde{C}^u_\varphi\varphi\widetilde{\partial} = -1 + \min(A\varphi)\,.$$

Dans notre exemple, $\widetilde{C}_\varphi = \{11,6,3\}$ (cf. fig. 4).

Nous conviendrons que l'écriture $\varphi\partial^r$ désigne $\varphi\widetilde{\partial}^{-r}$ pour chaque $r \in -\mathbf{N}$ et il est clair qu'avec cette convention $\varphi\partial^r$ est une bijection sur I_{z+r} pour tout $r \in \mathbf{Z}$ et $\varphi \in \mathcal{B}_z$. On verra que dans le cas particulier des morphismes l'on a $\partial^{-1} = \widetilde{\partial}$ et que $\partial^r = \widetilde{\partial}^{-r}$ est toujours une bijection

$$\mathcal{M}_z \to \mathcal{M}_{z+r}\,.$$

Pour tout morphisme $\varphi \in \mathcal{M}$ on appellera *orbite* de φ l'ensemble

$$\varphi\bar{\partial}^* = \{\varphi\partial^r : r \in \mathbf{Z}\} = \Phi\,,$$

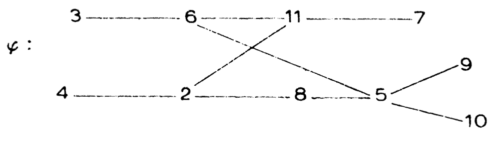

Fig. 1. $C_\varphi = \{2,5,9\}$.

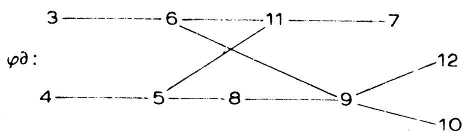

Fig. 2. $C_{\varphi\partial} = \{3,6,7\}$.

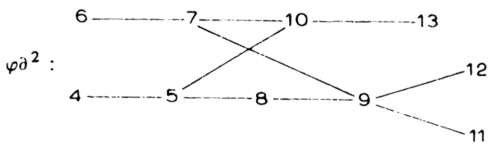

Fig. 3.

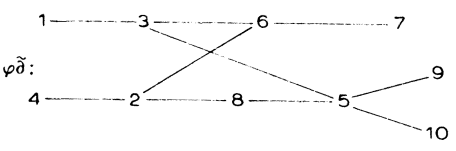

Fig. 4.

qui est donc une partie minimale non-vide de $\mathcal{M}$ satisfaisant $\Phi = \Phi\partial = \Phi\tilde{\partial}$. Une telle orbite $\Phi \subset \mathcal{M}$ contient exactement un morphisme dans chaque $\mathcal{M}_t$ ($t \in \mathbf{Z}$). Il sera commode de désigner la traînée C_φ de $\varphi = \Phi \cap \mathcal{M}_t$ comme étant la traînée $C(\Phi, t)$ de t dans Φ.

Définition 3. La *trajectoire* $T(\Phi, t)$ d'une valeur $t \in \mathbf{Z}$ dans une orbite Φ est la suite $\{v_1 < v_2 < \ldots < v_k\}$ des éléments distincts $v_j \in A$ de l'ensemble $\{t\psi^{-1} : \psi \in \Phi\}$.

Les traînées (pour les morphismes) et les trajectoires sont évidemmant des chaînes maximales dans A. Si (et seulement si) A lui-même est une chaîne, les trainées et les trajectoires coincident avec A, et, de plus, $\mathcal{M}$ se réduit à une seule orbite Φ. Donc, posant $\Phi\# = \Phi$, on a (trivialement) l'identité

$$C(\Phi, t) = T(\Phi\#, -t)\,, \qquad t \in \mathbf{Z}\,.$$

Notre résultat principal (Propriété 12) est la généralisation de cette identité à un ensemble $(A, \leq)$ quelconque: Nous montrerons que pour chaque orbite $\Phi \subset \mathcal{M}$ il existe une et une seule orbite, notée $\Phi\#$ satisfaisant l'identité ci-dessus, c'est-à-dire telle que pour chaque $t \in \mathbf{Z}$ la traînée de t dans Φ soit identique à la trajectoire de $-t$ dans $\Phi\#$. De fait, comme on le verra, l'opération # est involutive, et, par conséquent, l'on a aussi l'identité $T(\Phi, t) = C(\Phi\#, -t)$ (cf. l'exemple à la fin de cette section). Dans ce but, nous utiliserons une application $\#: \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ que nous définissons maintenant en utilisant la notation $\varphi\partial^* = \{\varphi\partial^p : p \in \mathbf{N}\}$.

Définition 4. Soit $\varphi : A \to \mathbf{Z}$ une injection. Son *contraire* est l'application $\varphi\# : A \to \mathbf{Z}$ telle que pour chaque $a \in A$,

$$a\varphi\# = -\min\{A\psi : \psi \in \varphi\partial^*, a\psi\partial \notin A\varphi\}\,.$$

En d'autre terme, $-(a\varphi\#)$ est la valeur de $\min(A\psi)$, où $\psi = \varphi\partial^p$ et où p est le plus petit entier non négatif tel que $a\varphi\partial^{p+1}$ n'appartienne pas à $A\varphi$. De façon duale on définira le *contraire opposé* $\widetilde{\varphi\#}$ par

$$a\widetilde{\varphi\#} = -\max\{A\psi : \psi \in \varphi\partial^*, a\psi\partial^* \notin A\varphi\}\,.$$

Les figs. 5 et 6 illustrent, dans notre exemple, $\varphi\#$ et $\widetilde{\varphi\#}$.

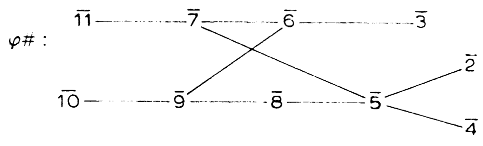

Fig. 5.

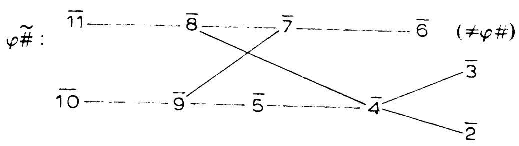

Fig. 6.

On voit facilement que $\varphi\#$ et $\widetilde{\varphi\#}$ sont des morphismes bijectifs sur $-A\varphi$. Par conséquent, comme $-I_z = I_{-z-q}$, le contraire de chaque $\varphi \in \mathcal{B}_z$ appartient à $\mathcal{M}_{-z-q}$. On établira que pour toute orbite Φ l'ensemble des contraires $\psi\#$ $(\psi \in \Phi)$ est une orbite que l'on désignera par $\Phi\#$.

Pour terminer nous introduisons encore la

Définition 5. Soit $\Phi \subset \mathcal{M}$ une orbite. La *table de promotion* $\Delta(\Phi)$ est l'application partielle $\Delta : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to A \times A$ telle que, pour tout $z, t \in \mathbf{Z}$, on ait

$$(z, t)\Delta = (a, b) \neq \phi \quad (a, b \in A)$$

ssi, posant $\psi = \Phi \cap \mathcal{M}_z$, l'on a $t = b\psi$ et en outre soit $t(\psi\partial)^{-1} = a \neq b$, soit $a = b = C^i_\psi = C^u_\psi$.

Autrement dit, pour $z \in \mathbf{Z}$ donné, prenant $\psi \in \Phi$ tel que $\min(A\psi) = z$,

$$(z, t)\Delta = (a, b) \neq \phi$$

ssi soit la promotion ∂ déplace la valeur $t \in A\varphi$ de b à $a \neq b$, soit C_ψ se réduit au singleton $\{a\} = \{b\}$ et alors $z = t$. Par conséquent, $(z, t)\Delta$ ne peut être non vide que si d'une part t est une des valeurs portées par la traînée C_ψ ce qui implique en particulier $z \leq t \leq z+q$ (avec $z = t$ ssi cette traînée est un singleton) et d'autre part $a \leq b$.

On établira l'identité

$$(z, t)\Delta(\Phi) = (-t, -z)\Delta(\Phi\#) \qquad (z, t \in Z),$$

d'où l'on déduira sans peine la dualité entre traînée et trajectoire mentionnée plus haut.

Donnons pour terminer l'exemple très simple de l'ensemble

$$A = \{(i,j) : 1 \le i \le 3,\ 1 \le j \le 2\}$$

ordonné de façon naturelle ($(i,j) \le (i',j')$ ssi $i \le i'$ et $j \le j'$) et de l'orbite Φ du morphisme $\varphi \in \mathcal{M}_1$ représenté par:

$$\varphi = \begin{matrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{matrix}.$$

On trouve:

$$\varphi\partial = \begin{matrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}, \quad \varphi\partial^2 = \begin{matrix} 5 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \end{matrix}, \quad \varphi\partial^3 = \begin{matrix} 5 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{matrix},$$

$$\varphi\partial^4 = \begin{matrix} 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 \end{matrix}, \quad \varphi\partial^5 = \begin{matrix} 8 & 9 & 11 \\ 6 & 7 & 10 \end{matrix}, \quad \varphi\partial^6 = \begin{matrix} 8 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 10 \end{matrix},$$

(et plus généralement $\varphi\partial^{3r+s} = 3r + \varphi\partial^s$ quels que soient $r, s \in \mathbf{Z}$). Par conséquent,

$$\varphi\# = \begin{matrix} -4 & -3 & -1 \\ -6 & -5 & -2 \end{matrix} \in \mathcal{M}_{-6},$$

dont la trainée est la chaîne

$$(1,1) < (2,1) < (2,2) < (2,3)$$

d'éléments de A. Cette chaîne est précisément la trajectoire de 6 dans Φ. De même

$$\varphi\partial\# = \begin{matrix} -4 & -3 & -2 \\ -7 & -6 & -5 \end{matrix}$$

a pour traînée

$$(1,1) < (2,1) < (3,1) < (3,2)\ ,$$

ce qui est la trajectoire de 7 dans Φ.

§ 2. Propriétés générales de la promotion

L'objectif de cette section est de donner une définition plus maniable de la promotion ∂. Pour cela nous établissons d'abord deux énoncés très généraux dans lesquels φ et ψ sont deux applications $A \to \mathbf{Z}$ satisfaisant les deux conditions suivantes:

(i) l'une au moins de φ et ψ est injective;

(ii) $A\varphi - A\psi = z$ et $A\psi - A\varphi = t$ sont deux singletons.

La condition supplémentaire

$$a, b \in A\ , \qquad a\varphi = b\psi \Rightarrow a \leq b$$

sera notée en abrégé $\psi^{-1} \leq \varphi^{-1}$.

Propriété 1. *Les applications φ et ψ sont deux injections telles que $\psi^{-1} \leq \varphi^{-1}$ ssi il existe une chaîne non vide*

$$D = D(\psi\varphi^{-1}) = \{D^i = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = D^u\} \subset A$$

telle que

(i) $a \in A - D \Rightarrow a\varphi = a\psi$,

(ii) $D^i\varphi = z,\ D^u\psi = t$,

(iii) $d_j \in D - D^u \Rightarrow d_j\psi = d_{j+1}\varphi$.

Preuve. Supposons d'abord que φ et ψ sont deux injections telles que $\psi^{-1} \leq \varphi^{-1}$ et posons $u = t\psi^{-1}, i = z\varphi^{-1}$. Comme φ et ψ sont des bijections sur $(A\varphi \cap A\psi) \cup \{z\}$ et $(A\varphi \cap A\psi) \cup \{t\}$ respectivement, la relation $\tau' = \psi\varphi^{-1} \subset A \times A$ peut être identifiée à une bijection de $A - u$ sur $A - i$. Nous étendons τ' à une permutation τ de A en posant $u\tau = i$.

Considérons un élément $a \in A - u$. Si $r = a\psi$ on a $r \in A\varphi$ puisque $r\psi \neq u\psi = A\psi - A\varphi$. Par conséquent $r\varphi^{-1} = b \in A$ existe et l'on a par hypothèse $a = r\psi^{-1} \leq r\varphi^{-1} = b$. Comme $b = r\varphi^{-1} = r\psi^{-1}\psi\varphi^{-1} = a\psi\varphi^{-1} =$

$= a\tau$, ceci prouve que

$$a \in A - u \Rightarrow a \leq a\tau \ .$$

Utilisant le fait que A est fini et qu'il en est donc de même de toutes les orbites de τ, on en conclut que ces dernières sont toutes des singletons sauf celle, désignée par D, qui contient u et i. Donc

$$a \in A - D \Rightarrow a\tau = a \ ,$$

c'est-à-dire $a\psi = a\varphi$.

En ce qui concerne D, ses éléments sont

$$i = d_1 < i\tau = d_2 < \ldots < i\tau^{k-1} = d_k = u \ .$$

Par conséquent, $d_j\psi = d_{j+1}\varphi$ pour $j = 1, 2, \ldots, k-1$, achevant la preuve de la nécessité de la condition indiquée.

La réciproque résulte immédiatement des définitions.

Nous supposons maintenant satisfaites les conditions de la Propriété 1 et en outre $z = \min(A\varphi) < t = \max(A\psi)$.

Propriété 1.1. *On a $\varphi \leq \psi$ ssi, de façon équivalente, la restriction $\varphi|D$* de *φ à D ou la restriction $\psi \mid D$ est un morphisme.*

Preuve. Comme $\varphi \mid (A - D) = \psi \mid (A - D)$, on peut supposer que $A = D$. Sous cette hypothèse, l'équivalence des conditions indiquées est immédiate puisque

$$d_1\varphi = \min(A\varphi \cup A\psi) < d_k\psi = \max(A\varphi \cup A\psi) \ .$$

Lemme 2. *Soient $\varphi \in \mathcal{B}_z$ et $\psi \in \mathcal{B}_{z+1}$ deux bijections telles que $\psi^{-1} \leq \varphi^{-1}$. On a $\psi = \varphi\partial$ ssi*

(2.1) $\quad d \in D \ , \quad b \in A(d) \Rightarrow d\psi \leq b\psi \ ,$

où, pour abréger,

$$A(d) = \{b \in A \,:\, d < b\}\,.$$

Preuve. Soit $d = d_j \in D - D^u$. On a $d\psi = d_{j+1}\varphi$ où, par construction, $d_{j+1} \in A(d)$, avec

$$A(d)\varphi = (A(d)\varphi \cap A(d)\psi) \cup \{d_{j+1}\varphi\}\,,$$

$$A(d)\psi = (A(d)\varphi \cap A(d)\psi) \cup \{D^u\psi\}\,.$$

Comme

$$D^u\psi = C^u\varphi\partial = I_{z+1} - I_z = \max(I_z \cup I_{z+1})\,,$$

la condition indiquée, c'est-à-dire $d\psi \leq \min(A(d)\psi)$, est satisfaite ssi $d\psi = d_{j+1}\varphi = \min(A(d)\varphi)$.

Procédant par induction sur $j = 1, 2, \ldots$ ceci montre que la condition (2.1) est satisfaite ssi $d_j = c_j$ ($c_j \in C_\varphi$ = la traînée définie dans § 1).

Soit maintenant $d = D^u$. Comme $d\psi = z + q + 1$ on ne peut avoir $d\psi \leq A(d)\psi$ que si $A(d) = \emptyset$, c'est-à-dire que si $D^u \in \max(A)$. Donc $D^u = C^u_\varphi$. Réciproquement $C^u_\varphi\psi \leq A(C^u_\varphi)\psi$ de façon triviale puisque $C^u_\varphi \in \max(A)$.

Corollaire 2.1. *Soient* $\varphi \in \mathcal{B}_z$ *et* $\psi \in \mathcal{M}_{z+1}$. *On a* $\psi = \varphi\partial$ *ssi* $\psi^{-1} \leq \varphi^{-1}$.

Preuve. Ceci résulte immédiatement du Lemme 2 puisque l'hypothèse que ψ est un morphisme équivaut à

$$a \in A\,, \qquad b \in A(a) \Rightarrow a\psi \leq b\psi\,.$$

Lemme 3. *Soit* $\varphi \in \mathcal{B}$. *Les restrictions de* φ *et* $\varphi\partial$ *à la traînée* C_φ *sont des morphismes, et de plus*

$$(3.1) \qquad a \in A\,, \qquad b \in A(a)\,, \qquad a\varphi \leq b\varphi \Rightarrow a\varphi\partial \leq b\varphi\partial\,.$$

Preuve. Le fait que la restriction $\varphi \mid C_\varphi$ est un morphisme résulte du Lemme 2 qui implique $c_j\varphi < c_{j+1}\varphi$ ($c_j, c_{j+1} \in C_\varphi$). D'après la Propriété 1.1, $\varphi\partial \mid C_\varphi$ est aussi un morphisme et l'on a $\varphi \leq \varphi\partial$.

Pour vérifier (3.1), il suffit maintenant de considérer un élément $a \in A - C_\varphi$. On a alors $a\varphi\partial = a\varphi$, d'où

$$a\varphi\partial = a\varphi \leq b\varphi \leq b\varphi\partial \ ,$$

où la dernière relation résulte de $\varphi \leq \varphi\partial$.

En application nous avons:

Remarque 4. Soit $\varphi \in \mathcal{B}$. *Pour tout* $p \geq q = -1 + \mathrm{card}\,(A)$, *l'application* $\varphi\partial^p$ *est un morphisme.*

Preuve. Posons $r(\varphi) = 0$ ssi φ est un morphisme et sinon

$r(\varphi) = \max\{a\varphi - \min(A\varphi) : a \in A$ et $b\varphi < a\varphi$ pour au moins un $b \in A(a)\}$.

Donc $r(\varphi) \leq q$. Comme

$$a\varphi\partial - \min(A\varphi\partial) = a\varphi - \min(A\varphi) - 1$$

pour $a \notin C_\varphi$, il résulte des énoncés précédents que

$$r(\varphi\partial) \leq \max\{0, r(\varphi) - 1\} \ ,$$

d'où le résultat par induction sur $r(\varphi)$.

Afin de faciliter les références ultérieures, nous rassemblons en un seul énoncé ce qui dans ce qui précède concerne des morphismes de $\mathcal{M}$.

Propriété 5. *Soit* $\varphi \in \mathcal{M}_z$. *On a* $\varphi\partial \in \mathcal{M}_{z+1}$ *et* $\varphi \leq \varphi\partial$. *De plus,* $(\varphi\partial)^{-1} \leq \varphi^{-1}$ *et* $\varphi\partial$ *est l'unique élément de* $\mathcal{M}_{z+1}$ *qui satisfasse cette dernière inégalité.*

Preuve. $\varphi \in \mathcal{M}_{z+1}$ et $\varphi \leq \varphi\partial$ résultent immédiatement du Lemme 3 et de la Propriété 1.1. La seconde partie est un cas particulier du Corollaire 2.1.

Nous en venons maintenant au principal résultat de cette section.

Propriété 5.1. *La restriction de* ∂ *à la sous-famille* $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ *des mor-*

phismes est bijective et son inverse est la promotion opposée $\tilde{\partial}$.

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{M}_z$. D'après le Corollaire 3.1, $\varphi\partial$ est un morphisme ($\in \mathcal{M}_{z+1}$). De plus d'après le Corollaire 2.1, $\varphi\partial$ est l'unique morphisme $\psi \in \mathcal{M}_{z+1}$ qui satisfasse $\psi^{-1} \leq \varphi^{-1}$.

Considérons la paire $((A, \geq), (\mathbf{Z}, \geq))$ de structures d'ordres opposées. Elle a les mêmes morphismes que la précédente, et la relation $\psi^{-1} \leq \varphi^{-1}$ équivaut à $\varphi^{-1} \geq \psi^{-1}$. Donc $\varphi\partial\tilde{\partial} = \varphi$. De façon duale, $\psi\tilde{\partial}\partial = \psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{M}_{z+1}$. Par conséquent, $\tilde{\partial}$ est l'inverse de ∂ et ces deux applications sont des bijections.

Nous concluons cette section en établissant quelques propriétés supplémentaires de ∂. La première sera utilisée dans la section suivante; la seconde sert de base aux applications aux tableaux de Young.

Nous rappelons qu'un *intervalle* Y d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$ est une partie Y de X telle que

$$y, y' \in Y, \quad x \in X, \quad y \leq x \leq y' \Rightarrow x \in Y.$$

Par conséquent, Y étant un intervalle, et y un élément de Y, l'ensemble $Y - \{y\}$ est un intervalle ssi $y \in \max(Y) \cup \min(Y)$.

Un *idéal* est ici une partie V de X telle que

$$x \in X, \quad v \in V, \quad x \leq v \Rightarrow x \in V.$$

C'est donc un intervalle.

Nous dirons qu'une application $\varphi : X \to \mathbf{Z}$ est *compatible* avec l'intervalle Y ssi $Y\varphi$ est un intervalle de $X\varphi$. Ainsi, quand φ est un morphisme, les intervalles avec lesquels il est compatible sont les images inverses des intervalles de $X\varphi$.

Lemme 6. *Soient A' un idéal de A et $\varphi : A \to \mathbf{Z}$ une injection compatible avec A'. Posant*

$$\varphi' = \varphi \mid A', \quad A'_p = A' \cap (A\varphi)(\varphi\partial^p)^{-1} \quad (p \in \mathbf{N}),$$

on a pour chaque p:

(6.1, p) *les traînées $C_{\varphi\partial^p}$ et $C_{\varphi'\partial^p}$ ont la même intersection avec A'_p, et* $\max(C_{\varphi\partial^p} \cap A'_p) \in \max(A'_p)$;

(6.2, p) *les* A'_p *sont des idéaux aves lesquels* $\varphi\partial^p$ *et* $\varphi'\partial^p$ *sont compatibles, et* $\varphi\partial^p \mid A'_p = \varphi'\partial^p \mid A'_p$.

Preuve. L'énoncé (6.2, 0) est trivial puisque $A'_0 = A'$.

L'implication (6.2, p) $\Rightarrow$ (6.1, p) résulte immédiatement de la définition des traînées.

Enfin l'implication (6.2, p) & (6.1, p) $\Rightarrow$ (6.2, p+1) résulte aussi immédiatement de la définition de ∂ puisque

$$A'_{p+1} = A'_p - \max\,(C_{\varphi\partial^p} \cap A'_p)\,.$$

Gardons les mêmes notations et supposons en outre $\varphi \in \mathcal{M}$. Notant ∂ et $\Delta(\varphi'\bar{\partial}^*)$ respectivement la promotion et la table de promotion associées à A' et à $\varphi' = \varphi \mid A'$, l'on a

Corollaire 6.1. *Soient* $\varphi \in \mathcal{M}$ *et* $z, t \in A'\varphi$. *On a*

$$(z, t)\Delta(\varphi\bar{\partial}^*) = (z, t)\Delta(\varphi'\bar{\partial}^*)\,.$$

Preuve. Ceci est une simple traduction de (6.1, p) en termes de tables de promotion.

Considérons maintenant, en vue des applications aux tableaux de Young, un ensemble ordonné $(X, \leq)$ (éventuellement infini) et un intervalle fixe $J \subset \mathbf{Z}$ ayant un nombre fini q d'éléments. Nous désignons par $\mathcal{G}$ la famille des *injections* $\rho : J \to X$ telles que l'on puisse trouver un morphisme $\varphi : X \to \mathbf{Z}$ pour lequel ρ soit égal à la restriction $\varphi^{-1} \mid J$. Cette condition implique que $J\rho$ soit un intervalle de X puisque si $x \in X$ et $y, y' \in J\rho$ satisfont $y \leq x \leq y'$, l'on doit avoir $y\varphi \leq x\varphi \leq y'\varphi$, donc $x\varphi \in J$ et enfin $x = x\varphi\rho \in J\rho$.

Propriété 7. *Soient* $\rho \in \mathcal{G}$ *et* $x \in X - J\rho$ *tels que*

(i) $A = J\rho \cup \{x\}$ *est un intervalle de* X,

(ii) $x \notin \max(A)$.

Il existe un et un seul $\sigma \in \mathcal{G}$ *tel que*

(7.1) $\qquad x \in J\sigma \subset A$ *et* $\sigma \leq \rho$.

Pour cet élément σ, le singleton $y = A - J\sigma \notin \min(A)$.

Preuve. L'hypothèse selon laquelle $J\rho$ et A sont des intervalles implique $x \in \max(A) \cup \min(A)$, donc $x \in \min(A)$ puisque par hypothèse $x \notin \max(A)$. Posant $z = \min(J)$, nous définissons une application $\varphi : A \to \mathbf{Z}$ en posant

$$x\varphi = z - 1\,, \qquad \varphi \mid J\rho = \rho^{-1}\,.$$

Il est clair que φ est un morphisme bijectif $A \to I_{z-1}$. Donc, d'après la Propriété 5, $\varphi\partial \in \mathcal{M}_z$ et $(\varphi\partial)^{-1} \leq \varphi^{-1}$.

Comme $x = (z-1)\varphi^{-1} = C_\varphi^i \notin \max(A)$, la traînée C_φ a au moins deux éléments et $C_\varphi^u \in \max(A) - \min(A)$.

Considérant la restriction $\sigma = (\varphi\partial)^{-1} \mid J$, on a $\sigma \leq \rho$, et on voit facilement que σ est une bijection de J sur $A - C_\varphi^u$, ce qui établit l'existence d'au moins un élément de $\mathcal{G}$ ayant les propriétés voulues.

Réciproquement, supposons maintenant que $\sigma \in \mathcal{G}$ satisfait la condition (7.1). Comme σ est une bijection de J sur une partie de A contenant $x \notin J\rho$, le complément $A - J\sigma$ est un singleton $y \in J\rho$. Nous étendons σ^{-1} à une bijection $\psi : A \to I_z$ en posant $y\psi = z + q \notin A\varphi \cap A\psi$; la relation $\sigma \leq \rho$ équivaut alors à $\psi^{-1} \leq \varphi^{-1}$. D'après la Propriété 1, il existe une chaîne

$$D = D(\psi\varphi^{-1}) = \{x = d_1 < \ldots < d_k = y\}\,,$$

où $x \neq y$. Donc $y \notin \min(A)$ et enfin $y \in \max(A)$ puisque A et $J\sigma = A - \{y\}$ sont des intervalles. Par conséquent, ψ aussi est un morphisme. D'après le Corollaire 2.1, on voit que $\psi = \varphi\partial$, ce qui montre que σ est bien l'élément trouvé dans la première partie de la démonstration.

§3. L'opération "contraire"

Dans §1 on a défini le contraire d'une injection $\varphi : A \to \mathbf{Z}$ par l'identité

$$a\varphi\# = -\min\{A\psi : \psi \in \varphi\partial^*, a\psi\partial \notin A\varphi\}\,.$$

Tenant compte de l'inégalité $\varphi \leq \varphi\partial^p$ ($p \in \mathbf{N}$) prouvée dans §2, il en résulte que $a\varphi\# = -\min(A\psi)$, où ψ est l'unique élément de $\varphi\partial^*$ tel que

$$a\psi \leq \max(A\varphi) < a\psi\partial .$$

Ceci entraîne que a appartienne à la traînée C_ψ. Comme celle-ci ne contient qu'un seul élément satisfaisant la condition précédente puisque $\psi \mid C_\psi$ est un morphisme, on voit que $\varphi\#$ est une bijection $A \to -A\varphi$. Nous notons que quand $\varphi \in \mathcal{B}_z$ et $\psi = \varphi\partial^p$ ($p \in \mathbf{N}$), l'on a $\min(A\psi) = z + p$ et que, par conséquent, l'on peut encore définir $\varphi\#$ pour $\varphi \in \mathcal{B}_z$ par l'identité

$$a\varphi\# = -z - \max\{p \in \mathbf{N} : a\varphi\partial^p \leq z + q\}$$

puisque $z + q = \max(A\varphi)$.

Lemme 8. *Le contraire $\varphi\#$ de toute injection $\varphi : A \to \mathbf{Z}$ est un morphisme bijectif $A \to -A\varphi$.*

Preuve. On vient de voir que $\varphi\#$ est une bijection sur $-A\varphi$. Soient $a \in A$, $b \in A(a)$ et $\psi \in \varphi\partial^*$ tels que $a\psi \leq \max(A\varphi) < a\psi\partial$. Comme $a \in C_\psi$, le Lemme 2 montre que $a\psi\partial < b\psi\partial$. Donc $\max A(\varphi) < b\psi\partial$, et comme $b \neq a$, ceci implique $b\psi' \leq \max(A\varphi) < b\psi'\partial$ pour un $\psi' \in \varphi\partial^*$ tel que $\min(A\psi') < \min(A\psi)$. Par conséquent, $a\varphi\# < b\varphi\#$ prouvant que $\varphi\#$ est un morphisme.

Nous rappelons que $\widetilde{\#}$ a été définie de façon duale de celle de $\#$ en utilisant les structures d'ordre opposés et nous établissons la formule suivante pour les morphismes de $\mathcal{M}$.

Corollaire 8.1. *Soit $\varphi \in \mathcal{M}_z$. On a*

$$\varphi\# = 1 + q + \varphi\partial^{1+q}\widetilde{\#} .$$

Preuve. Posons $\overline{\varphi} = \varphi\partial^{1+q}$ et rappelons que $\varphi\widetilde{\partial} = \varphi\partial^{-1}$ d'après la Propriété 5, puisque φ est par hypothèse un morphisme. Pour chaque $r \in \mathbf{Z}$ on a

$$\overline{\varphi}\widetilde{\partial}^{q-r} = \varphi\partial^{q+1-(q-r)} = \varphi\partial^r\partial ,$$

$$q+1+\min(A\varphi\partial^r) = q+1+z+r = z+2q+1-(q-r) = \max(A\bar{\varphi}\tilde{\partial}^{q-r}).$$

Soient maintenant $a \in A$ et $\psi \in \varphi\partial^*$ tels que $a\psi \leq \max(A\varphi) < a\psi\partial$. Comme $\max(A\varphi) = -1 + \min(A\bar{\varphi})$, ceci équivaut à

$$a\psi \leq \max(A\varphi) < \min(A\bar{\varphi}) \leq a\psi\partial \ ,$$

soit enfin à

$$a\bar{\varphi}\tilde{\partial} < \min(A\bar{\varphi}) \leq a\bar{\psi} \text{ où } \bar{\psi} = \psi\partial \in \bar{\varphi}\tilde{\partial}^* .$$

Par conséquent,

$$-(1+q) + a\varphi\# = -(1+q+\min(A\psi)) = -\max(A\bar{\psi}) = a\bar{\varphi}\widetilde{\#} = a\varphi\partial^{1+q}\widetilde{\#} .$$

Lemme 9. *Pour chaque* $\varphi \in \mathcal{B}_z$ *on a* $\varphi\partial\# = \varphi\#\partial^{-1}$.

Preuve. L'identité à prouver équivaut à $\varphi\partial\#\partial = \varphi\#$, où $\varphi\#$ et $\varphi\partial\#$ sont des morphismes bijectifs sur $-I_z = I_{-z-q}$ et sur $-I_{z+1} = I_{-z-q-1}$, respectivement. Utilisant le Corollaire 2.1, il suffit donc de vérifier $(\varphi\#)^{-1} \leq (\varphi\partial\#)^{-1}$ ce que nous faisons en prenant

$$t \in -I_z \cap -I_{z+1}, \quad a = t(\varphi\#)^{-1}, \quad b = t(\varphi\partial\#)^{-1} ,$$

et en établissant que $a \leq b$.

Soient $\psi \in \varphi\partial^*$ et $\chi \in \varphi\partial\partial^*$ tels que

$$(9.1) \qquad a\psi \leq \max(A\varphi) < a\psi\partial, \qquad b\chi \leq \max(A\varphi\partial) < b\chi\partial .$$

Comme par hypothèse $\min(A\psi) = \min(A\chi) = -t$, les applications ψ et χ sont identiques. Donc a et b appartiennent à la même traînée $C_\psi = C_\chi$ et comme $\max(A\varphi\partial) = 1 + \max(A\varphi)$, les relations (9.1) montrent que l'on a soit $a = b$ soit $a = c_j < b = c_{j+1}$.

Corollaire 9.1. *Soit* $\varphi \in \mathcal{M}$. *L'orbite* $\varphi\#\bar{\partial}^*$ *est constituée par les contraires des morphismes de l'orbite* $\varphi\bar{\partial}^*$.

Preuve. L'identité $\partial\# = \#\partial^{-1}$ qui vient d'être établie équivaut à

$\#\partial = \partial^{-1}\#$. Donc pour tout $r \in \mathbf{Z}$, $\varphi\#\partial^r = \varphi\partial^{-r}\#$.

Nous illustrons les énoncés précédents par deux exemples montrant une certaine stabilité des objets étudiés ici par rapport aux propriétés les plus simples de la relation d'ordre $\leq$. On pourrait en déduire en particulier que la partition de $\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$ en orbites est essentiellement la même que celle relative à la famille $\mathcal{M}(\overline{A})$, où $\overline{A}$ est obtenu en ajoutant à $(A, \leq)$ un nouvel élément plus grand (ou plus petit) que tous les éléments de A.

Exemple 1. Supposons que A admette une partition en ensemble B_i deux à deux incomparables ($b \in B_i$, $b' \in B_{i'}$, $b \leq b' \Rightarrow i = i'$).

La définition même de # montre que pour toute injection $\varphi : A \to \mathbf{Z}$ on a l'identité

$$\varphi\# \mid B_i = (\varphi \mid B_i)\# .$$

En particulier, quand la relation d'ordre $\leq$ est triviale (c'est-à-dire si $a, a' \in A$, $a \leq a' \Rightarrow a = a'$), on a identiquement

$$\varphi\# \mid \{a\} = (\varphi \mid \{a\})\# = -(a\varphi) .$$

Réciproquement, comme $-(a\varphi) = a\varphi\#$ ssi $a \in \max(A) \cap \min(A)$, on voit que $-\varphi = \varphi\#$ ssi $\leq$ est triviale.

Exemple 2. Supposons que A admette une partition $A = B \cup C$ telle que $b \in B$, $c \in C \Rightarrow b \leq c$. Par conséquent, B est un idéal et C un coidéal. Posant $q' = \mathrm{card}(B)$, $q'' = \mathrm{card}(C)$ on a pour tout $\varphi \in \mathcal{M}$ les identités

$$(\varphi \mid B)\bar{\partial}^* = \{\psi \mid B : \psi \in \varphi\bar{\partial}^*\}, \qquad (\varphi \mid C)\bar{\partial}^* = \{\psi \mid C : \psi \in \psi\bar{\partial}^*\},$$

$$(\varphi \mid C)\# = \varphi\# \mid C - q', \qquad (\varphi \mid B)\# = \varphi\partial^{q''}\# \mid B .$$

Preuve. Les hypothèses impliquent que pour tout morphisme φ on ait

$$b \in B, \quad c \in C \Rightarrow b\varphi < c\varphi$$

et que par conséquent $\max(B\varphi) + 1 = \min(C\varphi)$ pour chaque $\varphi \in \mathcal{M}$.

Ceci fait, les trois premières relations se vérifient directement. Il en est de même de la dernière, une fois noté que q'' est la plus grande valeur p pour laquelle $B\varphi\partial^p \subset I_z$.

Nous en venons maintenant à la partie principale de cette section et nous donnons un lemme permettant de raisonner par récurrence sur $\operatorname{card}(A) = 1 + q \geq 2$.

Nous supposons $\varphi \in \mathcal{M}_z$ et nous posons

$$I_z' = I_z - \{z+q\}, \quad A' = I_z'\varphi^{-1}, \quad \varphi' = \varphi \mid A .$$

Nous supposons, ce qui est essentiel, que $(z+q)\varphi^{-1}$ (qui appartient à $\max(A)$) n'appartient pas à $\min(A)$, c'est-à-dire qu'il n'est pas un point isolé.

Lemme 10. *Sous les hypothèses précédentes, on a* $\varphi'\# = \varphi\#\partial \mid A'$.

Preuve. Comme $z+q = \max(I_z)$, A' est un idéal de A avec lequel φ est compatible, et φ' est un morphisme bijectif sur l'intervalle I_z'. Notant que

$$\min(A\varphi\partial^p) = z-p = \min(A'\varphi'\partial^p)$$

pour chaque $p \in \mathbf{N}$, l'on voit que deux éléments $a, b \in A'$ satisfont

$$a\varphi\# = b\varphi'\# = t \quad (t \in \mathbf{Z})$$

ssi

$$(10.1) \qquad a\psi \leq z+q < a\psi\partial, \qquad b\psi' \leq z+q-1 < b\psi'\partial,$$

où $\psi = \varphi\partial^p$ et $\psi' = \varphi'\partial^p$ avec la même valeur $p = -z-t$.

Posant $A_p' = A' \cap I_z(\varphi\partial^p)^{-1}$ comme dans le Lemme 5, ce dernier énoncé livre les relations

$$\psi \mid A_p' = \psi' \mid A_p', \qquad C_\psi \mid A_p' = C_{\psi'} \mid A_p' .$$

Comme $z+q-1$ appartient à la fois à $A_p'\psi^{-1}$ et à $A_p'\psi^{-1}$, il résulte de la condition (10.1) que $b\psi' = b\psi$ et $b \in C_\psi \cap C_{\psi'}$. Nous en concluons que $b \leq a$. En effet, ou bien $a\psi \leq b\psi' = b\psi$, ce qui implique que $a = b$ d'après (10.1), ou bien $b\psi' = b\psi < a\psi$, ce qui implique $b \leq a$ d'après $a, b \in C_\psi$.

Observons maintenant que comme $\varphi'\#$ est un morphisme bijectif sur $-I'_z = I_{-z-q+1}$ et $A - A' = u$ est maximal dans A, le morphisme $\varphi'\#$ peut être étendu à un morphisme $\bar{\varphi} \in \mathcal{M}_{-z-q+1}$ en posant

$$\bar{\varphi} \mid A' = \varphi'\# , \qquad u\bar{\varphi} = -z-1 = (-I_{z-1}) - (-I'_z) .$$

Le morphisme $\varphi\# : A \to -I_z$ appartient à $\mathcal{M}_{-z-q}$. Comme

$$(-I_{z-1}) \cap (-I_z) = (-I'_z) \cap (-I_z) ,$$

l'inégalité $a \leq b$ prouvée plus haut, montre que $\bar{\varphi}^{-1} \leq (\varphi\#)^{-1}$, donc finalement que

$$(10.2) \qquad \bar{\varphi} = \varphi\#\partial$$

d'après le Corollaire 2.1, ce qui prouve le résultat.

On remarquera que la formule (10.2) peut aussi s'écrire comme

$$\varphi\# = \bar{\varphi}\partial^{-1} .$$

Comme $\bar{\varphi}$ se déduit immédiatement de $\varphi'\# = (\varphi \mid A')\#$, ceci donne un algorithme permettant le calcul de $\varphi\#$ par récurrence sur card (A).

Propriété 11. *Soient $\Phi \subset \mathcal{M}$ une orbite et $\Phi\#$ l'orbite contenant les contraires des éléments de Φ. On a identiquement*

$$(z, t)\Delta(\Phi) = (-t, -z)\Delta(\Phi\#) \qquad (z, t \in \mathbf{Z}) .$$

Preuve. Prenons $\varphi = t\Phi^{-1} = \Phi \cap \mathcal{M}_z$ et distinguons quatre cas selon la valeur de la différence $t-z = -z-(-t)$:

(1). $t = z = 0$. On a

$$(z, t)\Delta(\Phi) = (a, a) \neq \emptyset \qquad (a \in A)$$

ssi

$$C_\varphi = \{C^i_\varphi\} = \{C^u_\varphi\} = \{a\} .$$

Si ces conditions sont satisfaites $a\varphi\# = -z$ et le résultat est établi dans ce cas.

Comme ceci couvre le cas où A est un singleton nous pouvons désormais procéder par induction sur card $(A) = 1 + q \geq 2$, en employant les notations I_z', A', φ', etc., du Lemme 10 et en posant $\Phi' = \varphi'\partial^*$.

(2). $1 \leq t-z \leq q-1$. Nous avons $z, t \in A'_\varphi$. Donc d'après le Corollaire 6.1 et l'hypothèse d'induction,

$$(z, t)\Delta(\Phi) = (z, t)\Delta(\Phi') = (-t, -z)\Delta(\Phi'\#) .$$

Maintenant comme $-t$ et $-z$ appartiennent à l'intervalle $A'(\varphi\#\partial)^{-1}$ et comme, d'après le Lemme 10, $\varphi'\# = \varphi\#\partial \mid A'$, où $\varphi\#\partial \in \Phi\#$, nous pouvons appliquer une seconde fois le Corollaire 6.1 pour obtenir enfin

$$(z, t)\Delta(\Phi) = (-t, -z)\Delta(\Phi'\#) = (-t, -z)\Delta(\Phi\#) .$$

(3). $t - z = q$. Ceci équivaut à $t = \max(I_z)$. Par conséquent, $t\varphi^{-1} = A - A'$ est un élément maximal u de A. Supposons d'abord $(z, t)\Delta(\Phi) = \emptyset$, et soit z' la plus petite valeur pour laquelle $(z', t)\Delta(\Phi) \neq \emptyset$. Comme $t - z' \leq q - 1$, il résulte du cas (2) que

$$(z', t)\Delta(\Phi) = (-t, -z')\Delta(\Phi\#) = (a, u) \qquad (a \in A) .$$

Comme $u \in \max(A)$ et $-z' < -z$, on en conclut que $(-t, -z)\Delta(\Phi\#) = \emptyset$.

Supposons qu'au contraire $(z, t)\Delta(\Phi) = (a, b) \neq \emptyset$. Nous avons $b = C_\varphi^u$ et $a = c_{k-1}$ = l'avant-dernier élément de la traînée C_φ. De plus, par construction,

$$-z = b\varphi\# = a\varphi'\# = a\varphi\#\partial .$$

Comme $-t = \min(A\varphi\#)$, on a donc encore $(a, b) = (-t, -z)\Delta(\Phi\#)$.

(4). Pour toutes les autres valeurs de $t-z$, on a

$$(z, t)\Delta(\Phi) = \emptyset = (-t, -z)\Delta(\Phi\#)$$

puisqu'aucun intervalle $A\psi \subset \mathbf{Z}$ $(\psi \in \Phi \cup \Phi\#)$ ne contient simultanément z, t et $-z$, $-t$.

Corollaire 11.1. *# est une involution* $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

Preuve. La propriété 11 implique l'identité $\Delta(\Phi\#\#) = \Delta(\Phi)$. Il suffit donc de vérifier que Φ est déterminée de façon unique par $\Delta(\Phi)$, c'est-à-dire que

$$\varphi, \varphi' \in \mathcal{M}_z, \qquad \varphi \neq \varphi' \Rightarrow \Delta(\varphi\bar{\partial}^*) \neq \Delta(\varphi'\bar{\partial}^*) .$$

Or ceci est évident en considérant la plus petite valeur t pour laquelle $t\varphi^{-1} \neq t\varphi'^{-1}$ et puis la plus petite valeur z' pour laquelle $(z', t)\Delta(\varphi\bar{\partial}^*) \neq \emptyset$.

Nous en venons enfin à la propriété principale de ce mémoire.

Propriété 12. *A chaque orbite $\Phi \subset \mathcal{M}$ correspond une et une seule orbite $\Psi \subset \mathcal{M}$, à savoir $\Psi = \Phi\#$, telle que pour tout $z \in \mathbf{Z}$ la traînée de z dans Φ soit égale à la trajectoire de $-z$ dans Ψ.*

Preuve. Nous établissons d'abord la partie directe, c'est-à-dire l'identité

$$C(\Phi, z) = T(\Phi\#, -z) .$$

Soit donc $z \in \mathbf{Z}$. Prenant $\varphi = \Phi \cap \mathcal{M}_z$, nous avons par définition $C(\Phi, z) = C_\varphi$, où

$$C_\varphi = \{C_\varphi^l = c_1 < c_2 < \ldots < c_k = C_\varphi^u\} .$$

D'après la définition des tables de promotion et la Propriété 11 nous avons pour chaque $t \in \mathbf{Z}$,

$$(z, t)\Delta(\Phi) = (-t, -z)\Delta(\Phi\#) = (c_{j-1}, c_j), \quad \text{ou} = (C_\varphi^l, C_\varphi^l), \quad \text{ou} = \emptyset$$

selon que

$$t = c_j\varphi^{-1} \quad (j{=}2, \ldots, k \geq 2), \quad \text{ou } t = C_\varphi^l\varphi^{-1} = C_\varphi^u\varphi^{-1}, \quad \text{ou } t \notin (C - C_\varphi^l)\varphi .$$

Donc

$$C_\varphi = \{(-t)\psi : \psi \in \Phi\#\} ,$$

concluant la vérification de la première partie de l'énoncé.

Il suffit pour compléter la preuve de la propriété de prendre une orbite Φ et de montrer qu'il existe au plus une orbite Ψ satisfaisant l'identité $C(\Phi,z) = T(\Psi,-z)$, soit encore de montrer que $\Psi \cap \mathcal{M}_0$ est déterminé de façon unique par la donnée des trajectoires $T(\Psi,p)$ pour $p = 0,1,2,\ldots,q-1$, ce que nous faisons maintenant.

Soit $\psi = \Psi \cap \mathcal{M}_{-q}$ = l'unique morphisme de Ψ tel que

$$A\psi = -I_0 = \{-q, -q+1, \ldots, 0\}.$$

Comme $A\psi\partial^{-1} = -I_0 - 1$ ne contient pas 0 et que $0 = \max(A\psi)$, nous avons que $0\psi^{-1}$ est le dernier élément T_p^u de la trajectoire de 0, qui est donc connu.

Procédant par induction sur $p \geq 0$, nous pouvons supposer que la restriction de $\psi\partial^p$ à $\overline{A}_p = I_0(\psi\partial^p)^{-1}$ est déjà connue, et nous avons seulement à montrer qu'elle détermine $\overline{A}_{p+1}$, c'est-à-dire $\overline{A}_{p+1} \cap C$ où, pour simplifier les notations, C désigne la traînée C_χ ($\chi = \psi\partial^p$).

Comme ci-dessus, nous avons

$$A\psi\partial^{p+1} - A\psi\partial^p = p+1 = \max(A\psi\partial^{p+1}).$$

Donc

$$(p+1)(\psi\partial^{p+1})^{-1} = C^u,$$

et cet élément est connu puisqu'il est l'ultime élément de la trajectoire de $p+1$.

Si $C^u \notin \overline{A}_p$, nous avons

$$\overline{A}_{p+1} = \overline{A}_p \cup \{C^u\},$$

et le résultat est prouvé.

Si $C^u = r\psi\partial^p \in \overline{A}_p$ ($r \in \mathbf{N}$), nous avons

$$r(\psi\partial^{p+1})^{-1} = a \neq C^u,$$

et a est déterminé par la trajectoire de r, comme l'élément précédent immédiatement l'élément C^u de cette même trajectoire.

De nouveau, $\overline{A}_{p+1} = \overline{A}_p \cup \{a\}$ si $a \notin \overline{A}_p$, et sinon le raisonnement précédent peut être répété sur $r' = a\psi\partial^p \in \overline{A}_p$, etc., jusqu'à obtention d'un élément $\notin \overline{A}_p$. Comme card$(\overline{A}_q) = q+1$, c'est-à-dire $\overline{A}_q = A$, ceci montre que $\psi\partial^q = \Phi \cap \mathcal{M}_0$ est uniquement déterminé par les trajectoires $T(\Psi,p)$ et achève la preuve.

Références

[1] G. de B. Robinson, On the representations of the symmetric group, Am. J. Math. 60 (1938) 745–760.

[2] D. Knuth, Permutations, matrices and generalized Young tableaux, Pacific J. Math. 34 (1970) 709–727.