ALGÈBRE. — *Une propriété des monoïdes libres.*

Note (*) de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On énonce sans démonstration une propriété de monoide libre A^* engendré par un ensemble A et deux applications de celle-ci au monoide syntactique d'un sous-monoide finiment engendré et à la théorie de A. Lentin [1] des équations dans X^*.

A chaque mot $a \in A^*$ correspond au plus grand entier p, sa *périodicité* $a\,\pi$, tel que l'on ait $b^p A^* \subset a A^* \subset b^{p+1} A^*$ pour au moins un mot $b \in A^*$; le mot b de longueur $|b|$ minimale satisfaisant ces relations est la *période* $\sqrt{a}$ du mot a [*cf.* [2], [3]].

Soit maintenant α un morphisme fixe d'un monoïde libre X^* dans A^*. Une α-*factorisation* de *multiplicité* d d'un mot $f \in A^*$ est un système de d triples $(f'_i, y_i, f_i) \in A^* \times X^* \times A^*$ tels que l'on ait identiquement $f = f'_i . y_i \alpha . f_i$. Elle est *maximale* ssi pour chaque indice i, il existe des lettres $x, x' \in X$ pour lesquelles $x\,\alpha \in f_i AA^*$ et $x'\,\alpha \in AA^* f'_i$; *disjointe* ssi, pour chaque paire d'indices distinctes $i \neq j$ et de facteurs droits y'_i et y'_j de y_i et de y_j, on a

$$y'_i \alpha . f_i \neq y'_j \alpha . f_j.$$

Soit $|X| = \mathrm{Card}(X)$, fini.

PROPRIÉTÉ. — *Tout mot* $f \in A^*$ *de longueur au moins égale à* Max $\{ |x\,\alpha| : x \in X \}$ *admettant une α-factorisation maximale disjointe de multiplicité* $d \geqq 2|X|+1$ *a une périodicité au moins égale à* 2.

La preuve est trop longue pour être donnée ici. On commence par montrer que l'hypothèse sur d entraîne qu'à chaque factorisation $f = f'' a f'$ $(f'', f' \in A^*, a \in A)$ correspondre au moins une lettre $x \in X$ et trois indices distincts j_1, j_2, j_3 tels que les mots y_j aient des factorisations $y_j = y''_j x y'_j$ pour lesquelles

$$|y'_j \alpha . f_j| \leqq |f'| < |x y'_j \alpha . f_j| \qquad (j = j_1, j_2, j_3).$$

Ceci implique que la périodicité de mot $x\,\alpha$ soit au moins 2 et que f ait un facteur de période $\sqrt{x\,\alpha}$ de périodicité au moins 3. Choisissant la lettre a de telle sorte que cette période soit la plus longue possible, on peut montrer que cette période se « propage » à tout le mot f.

APPLICATIONS. — L'hypothèse que X est fini entraîne l'existence d'un morphisme σ de A^* dans un monoïde fini S tel que $(X^*\,\alpha)\,\sigma\sigma^{-1} = X^*\,\alpha$. S est le monoïde syntactique du sous-monoïde $X^*\,\alpha = (X\,\alpha)^*$ de A^*. A chaque groupe maximal $G \subset S$ de degré d correspond un ensemble infini de mots f admettant des α-factorisations maximales disjointes de multiplicité d. La propriété précédente montre que G est un groupe cyclique quand $d \geqq 2|X|+1$, c'est-à-dire que, inversement, quand G n'est pas cyclique, il est image homomorphe d'un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{2|X|}$. Une autre application est que le nombre des $\mathcal{D}$-classes idempotentes de S est borné en fonction de $|X|$ (indépendamment de α), ce qui n'est vrai, ni du nombre total des $\mathcal{D}$-classes, ni de celui des groupes maximaux dans S. La preuve se fait en passant par la théorie de Lentin [1].

Rappelons qu'une *équation* dans X^* est une paire $e = (y, y')$ de mots et que [supposant Card (A) $\geqq |X|$] sa *solution* est l'ensemble Φ_e des morphismes $\varphi : X^v \to A^*$ tels que $y\varphi = y'\varphi$.

Nous dirons qu'elle est *décomposable* ssi à chaque $\varphi \in \Phi_e$, correspond une factorisation $y = y_1 y_0 y_2 \neq y_1 y_2$, $y' = y'_1 y'_0 y'_2 \neq y'_1 y'_2$ telle que l'on ait encore $(y_1 y_2)\varphi = (y'_1 y'_2)\varphi$. La propriété énoncée plus haut donne divers cas de décomposabilité dont le plus simple est l'existence d'un nombre $\bar{d} \in N$ fonction de $|X|$ tel que soit décomposable toute équation (y, y') pour laquelle chaque lettre $x \in X$ apparaît au moins $\bar{d}$ fois dans le mot yy'. Ceci livre le résultat relatif aux $\mathscr{D}$-classes en imposant des conditions assez strictes sur le mot le plus court de l'image inverse $u\sigma^{-1}\alpha^{-1}$ de chaque idempotent $u \in X^*\alpha \cap S$.

Je mentionne enfin que la valeur $d \geqq 2|X|+1$ de la propriété principale est probablement trop grande et qu'il est possible que l'énoncé subsiste pour $d \geqq |X|+1$, ce que je ne suis pas parvenu à établir.

(*) Séance du 28 janvier 1974.

(1) A. Lentin, *Équations dans les monoïdes libres*, Gauthier-Villars, Paris, 1972.

(2) N. J. Fine et H. S. Wilf, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16, 1965, p. 109-114.

(3) A. Lentin et M.-P. Schützenberger, *A combinatorial problem in the theory of free monoids, in Combinatorial Mathematics and its Applications* (*Proc. Chapel Hill Conf.*, 1969. R. C. Bose et T. A. Dowlina Ed.,) p. 128-144.

Institut de Recherche
d'Informatique et d'Automatique,
Domaine de Voluceau,
Rocquencourt,
78150 *Le Chesnay.*