ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

SYMPOSIA MATHEMATICA

VOLUME XV

(ESTRATTO)

M. P. SCHÜTZENBERGER

SUR CERTAINES OPÉRATIONS DE FERMETURE DANS LES LANGAGES RATIONNELS

"MONOGRAF"
BOLOGNA - 1975

Istituto Nazionale di Alta Matematica
Symposia Mathematica
Volume XV (1975)

SUR CERTAINES OPÉRATIONS DE FERMETURE DANS LES LANGAGES RATIONNELS

M. P. Schützenberger

1. Introduction.

Nous nous proposons d'examiner la possibilité d'engendrer les langages rationnels au sens d'Eilenberg dans un monoïde libre au moyen de diverses opérations plus restreintes que celles qui interviennent dans la théorie classique de Kleene.

Nous dirons qu'une famille de parties d'un semi-groupe S est fermée par les *opérations polynomiales* si elle contient tous les singletons ainsi que l'union et le produit de deux quelconques de ses membres. Ainsi la famille des *parties rationnelles* de S est la plus petite famille de parties de S fermée par les opérations polynomiales et par l'opération unaire $P \to P^+$ envoyant une partie P sur le semi-groupe P^+ qu'elle engendre.

Considérons d'autre part une partie P du semi-groupe S. Il existe un plus petit semi-groupe quotient de S, le *semi-groupe syntactique* Synt (P) de P tel que $P = P\sigma\sigma^{-1}$ où σ est le morphisme de S sur Synt (P). Si Q est une autre partie de S satisfaisant aussi $Q\sigma\sigma^{-1}$, on voit facilement que l'union $P \cup Q$, le complément $P \setminus Q$ de Q dans P et les parties $PQ^{-1} = \{s \in S \colon Qs \cap P \neq \emptyset\}$ et $Q^{-1}P = \{s \in S \colon sQ \cap P\, N\, \emptyset\}$ sont les images inverses par σ^{-1} des parties obtenues par les mêmes opérations dans $S\sigma$ à partir de $P\sigma$ et de $Q\sigma$. Réciproquement, quand P est *reconnaissable*, c'est-à-dire, par définition, quand son monoïde syntactique est fini, toute partie P' de S satisfaisant $P'\sigma\sigma^{-1} = P'$ peut être obtenu par les opérations booléennes et les opérations « $^{-1}$ » à partir de P lui-même et des singletons. Comme enfin, les monoïdes syntactiques de $P \cup Q$, $P \setminus Q$ ou PQ se déduisent facilement de ceux de P et de Q, ces remarques motivent la définition d'une famille fermée

(*) I risultati conseguiti in questo lavoro sono stati esposti nella conferenza tenuta il 9 febbraio 1973.

par les *opérations reconnaissables* comme une famille fermée par les opérations polynomiales, la complémentation et les deux opérations « $^{-1}$ ».

La plus petite famille de parties d'un monoïde libre fermée par les opérations reconnaissables est la famille $\boldsymbol{Ap}$ des langages « counter-free » de McNaughton, appelés ici *apériodiques*. Notre résultat principal (Corollaire IV.3) consiste à faire apparaître $\boldsymbol{Ap}$ comme la plus petite famille fermée par les opérations polynomiales et contenant le sous-semigroupe P^+ engendré par chacun de ses membres P, sous réserve que P ait la propriété (définie dans les Sections II et III) d'être préfixe et d'avoir un délai de synchronisation *fini*. Cette dernière condition entraîne réciproquement la propriété remarquable que le semigroupe P^+ soit contenu dans la plus petite famille Rec (P) qui contienne P lui-même et qui soit fermée par les opérations reconnaissables (Énoncé II.3).

En outre, une certaine sous-famille de parties préfixes ayant un délai de synchronisation fini permet d'obtenir toutes les parties rationnelles au moyen des opérations polynomiales et d'une opération de substitution dans les parties dont le monoïde syntactique est un groupe. C'est l'opération de G-fermeture qui est l'objet de l'énoncé IV.2.

2. Constantes.

Soit T une partie donnée d'un monoïde M. Un élément u de M sera appelé une *constante* pour T ssi l'on a l'implication

$$\text{(C)} \qquad m_1um_2,\ m_3um_4 \in T \Rightarrow m_1um_4 \in T$$

quelque soient les éléments m_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ de M. Donc en particulier l'ensemble $U(T)$ des constantes pour T contient le *zéro* $W(T)$ de T, c'est-à-dire l'ensemble des éléments w de M pour lesquels l'intersection de T et de MwM est vide. Cette terminologie est expliquée par le fait que u est une constante ssi Qu est au plus un singleton où Q désigne l'ensemble des états de l'automate (déterministe) minimal reconnaissant T. En effet, supposons que Qu contienne deux états distincts q et q'. Ceci équivaut à l'hypothèse qu'il existe deux mots m_1 et m_3 de M tels que les ensembles $(m_1u)^{-1}T$ et $(m_3u)^{-1}T$ sont non vides et différents. On peut donc, par exemple, trouver un élément m_4 dans le complément de $(m_2u)^{-1}T$ dans $(m_1u)^{-1}T$ et, prenant m_2 quelconque dans $(m_1u)^{-1}T$, on obtient m_1um_2, $m_3um_4 \in T$, $m_1um_4 \notin T$. Dans l'autre direction, supposons que Qu soit un singleton $\{q\}$: D'après la définition des états de l'automate minimal, ceci équivaut à l'existence d'une partie M_1 non vide de M telle que pour tout $m \in M$ l'ensemble $(mu)^{-1}T$ soit vide ou égal à M_1, ce qui implique finalement que u soit une constante. Q.E.D.

Il résulte immédiatement de cette remarque (ou de la définition) que l'ensemble $U = U(T)$ des constantes est un idéal de M. Une autre observation utile est que quand une constante t appartient à l'ensemble T lui-même toute relation $mtm' \in T$ entraîne que mt et tm' soient dans T: ceci résulte immédiatement de la définition en prenant $m_3 = m$, $m_4 = m'$ et $m_1 = m_2 = 1$ ($=$ l'unité de M) et en observant que la condition (C) est symétrique en les deux paires (m_1, m_2) et (m_3, m_4). Finalement, en posant $S = U \cap T$, et $W = W(T)$, nous notons la formule

$$(SM \cap MS)\setminus W \subset T\,. \tag{1}$$

Preuve: Soient $s, s' \in T \cap U = S$ et $h, h' \in M$ tels que les produits sh et $h's'$ soient égaux et ne soient pas contenues dans W. Cette dernière condition entraîne l'existence de $m, m' \in M$ tels que $mshm' \in T$. Comme s est une constante, nous déduisons de l'observation faite plus haut que shm' est dans T. Maintenant, $shm' = h's'm'$ où de nouveau s' est une constante. Par la même raison on a $h's' \in T$, ce qui est le résultat cherché. Q.E.D.

Nous considérons maintenant le cas particulier où M est le monoïde libre engendré par l'alphabet A et où $T = P^+$ est le sous-semigroupe engendré par une partie P de A^+ ayant la propriété qu'il existe un entier naturel $\varkappa$ tel que $P^\varkappa$ soit contenu dans U. Le plus petit entier pour lequel ceci est vrai sera appelé le *délai de synchronisation de P* et sera noté $\delta(P)$. Il est naturel de considérer $\delta(P)$ comme infini s'il n'existe aucun entier naturel $\varkappa$ pour lequel $P^\varkappa$ soit contenu dans l'ensemble des constantes pour P^+.

Dans le reste de cette section, nous supposons toujours $T = P^+$ où $\delta(P) = \varkappa$ est fini. Il est clair que l'on pourrait aussi bien prendre $T = P^*$, c'est-à-dire que les constantes pour P^+ ou P^* sont les mêmes.

II.2. L'idéal W de A^* est engendré par l'ensemble V des mots v de $A^*\setminus A^*P^{\varkappa+1}A^*$ tels que $A^*vA^* \cap P^{\varkappa+1}$ est vide.

Preuve: L'idéal W est engendré en tant que tel d'une part par une partie A_0 de l'alphabet A, qui est certainement contenue dans V et d'autre part, par l'ensemble V' des mots de W de longueur au moins deux dont aucun facteur propre n'est dans W.

Soit ahb ($a, b \in A$, $h \in A^*$) un tel mot. L'hypothèse $ah, hb \notin W$ équivaut à l'existence de mots m_i tels que m_1ahm_2 et m_3hbm_4 soient dans T. Donc h n'est pas une constante puisque sinon on aurait $m_1 ahbm_4 \in T$ contrairement à l'hypothèse $ahb \in W$. Il en résulte que h n'a pas de facteur dans $P^\varkappa$. Supposons que ahb appartienne à l'idéal engendré par $P^{\varkappa+1}$, c'est-à-dire que l'on puisse écrire

$$ahb = fprqg \quad \text{où} \quad f, g \in A^*, \qquad p, q \in P \qquad \text{et} \qquad r \in P^* .$$

Comme ahb n'est pas dans $T = P^+$, l'un au moins des deux mots f et g est différent de 1, disons $= g'b$, ce qui entraîne $ah = fprqg'$.

Puisque h n'a pas de facteur (propre ou non) dans $P^\varkappa$, le mot a doit admettre fp comme facteur gauche *propre*. Or ceci est impossible puisque a est une lettre et que p appartient à la partie P de A^+.

Nous avons donc établi que chacun des générateurs $v' = ahb$ de W est contenu dans le complément de $A^*P^{\varkappa+1}A^*$.

Comme en outre $A^*v'A^*$ a une intersection vide avec $P^{\varkappa+1}$ puisque v' est contenu dans l'idéal W, on a bien vérifié que V est l'union de V' et de la partie A_0 de A. Q.E.D.

Corollaire II.3: Pour toute partie reconnaissable P de A^* ayant un délai de synchronisation fini, le semi-groupe P^+ et le monoïde P^* appartiennent à la plus petite famille $\mathcal{A}$ fermée par les opérations reconnaissables et contenant P.

Preuve: Le semi-groupe P^+ est l'union de $P \cup P^2 \cup \ldots \cup P^{\varkappa-1}$ et de $P^\varkappa P^*$. Le premier de ces ensembles est contenu dans $\mathcal{A}$. Il en est de même de $P^\varkappa A^* \cap A^* P^\varkappa$ et, ainsi qu'on vient de le voir de zéro W de P^+. Par conséquent $\mathcal{A}$ contient $Q = (P^\varkappa A^* \cap A^* P^\varkappa) \backslash\backslash W$. Comme Q est contenu dans P^+ d'après la formule (1) et que trivialement $P^\varkappa P^*$ est contenu dans Q, le résultat est établi. Q.E.D.

Corollaire II.4: Soit P une partie apériodique ayant un délai de synchronisation fini. La partie P^+ est aussi apériodique.

Preuve: Ceci résulte immédiatement du corollaire précédent et de ce que la famille $\boldsymbol{Ap}$ est fermée par les opérations reconnaissables. Q.E.D.

3. Parties et substitutions préfixes.

Rappelons qu'un sous-monoïde P^* d'un monoïde M est dit *unitaire* ssi P^* contient $M^{-1}P^*$, c'est-à-dire, de façon équivalente, ssi P^* est le stabilisateur d'un état dans une représentation de M par des applications d'un ensemble dans lui-même. Pour les sous-monoïdes unitaires, la notion de constante a la propriété remarquable suivante:

III.1. Soit P^* un sous-monoïde unitaire de M. Un élément p de P^* est une constante pour P^* ssi pour tout $m, m' \in M$ la relation $mpm' \in P^*$ entraîne que mp et m' soient dans P^*.

PREUVE: Si $p \in P^*$ est une constante, on a vu que l'inclusion de mpm' dans P^* implique $mp \in P^*$ (et $pm' \in P^*$). L'hypothèse que P^* est unitaire permet alors de déduire $m' \in P^*$ de ce que mpm' et mp sont dans P^*.

Réciproquement, supposons que l'élément p de P^* soit tel que $mpm' \in P^*$ entraîne $mp, m' \in P^*$ et que les éléments m_i de M satisfont m_1pm_2, $m_3pm_4 \in P^*$. On a m_1p, $m_4 \in P^*$ et la relation désirée $m_1pm_4 \in P^*$ résulte de ce que P^* est un semi-groupe. Q.E.D.

Quand M est un monoïde libre A^*, on sait qu'un sous-monoïde est unitaire ssi son ensemble générateur minimum P est *préfixe*, c'est-à-dire satisfait la condition $P \cap PA^+ = \emptyset$.
Les parties préfixes ayant un délai de synchronisation fini sont très voisines des « locally parsable codes » de McNaughton et Papper et, des résultats intéressants ont été obtenus récemment à leur sujet par *A.* Restivo. Nous nous bornons ici à quelques énoncés très simples.

III.2. Pour tout sous-ensemble Q d'une partie préfixe P, on a $\delta(Q) \leqslant \delta(P)$.

PREUVE: Il suffit de montrer que tout mot p qui est une constante pour P^+ et qui appartient à Q^* est une constante pour Q^+.

Supposons que mpm' soit dans Q^*. Comme Q^* est contenu dans P^*, on déduit de III.1 que mp et m' sont dans P^*. Maintenant, comme P est préfixe, chaque mot de A^* admet au plus une factorisation en produit de mots de P. Donc, puisque Q est un sous-ensemble de P, l'hypothèse $mpm' \in Q^*$ implique que tous les facteurs dans P de la factorisation de mpm' soient en réalité des mots de Q et par conséquent que les mots mp et m' soient dans Q^*, ce qui achève la preuve d'après (III.1) et le fait que Q est préfixe en tant que sous-ensemble de la partie préfixe P. Q.E.D.

EXEMPLE III.3: Soit B une partie d'un alphabet A et Q une partie de $P = B^*(A \setminus B)$. Q est une partie préfixe telle que $\delta(Q) \leqslant 1$ et l'on a $\delta(Q) = 0$ quand Q est contenu dans $A \setminus B$.

PREUVE: Il est clair que le semi-groupe P^+ est égal à l'idéal à gauche $A^*(A \setminus B)$ de A^*. Donc $\delta(P) = 1$. Comme P est préfixe, Q est préfixe en tant que partie de P et $\delta(Q) \leqslant 1$ résulte de III.2.

Quand $Q = A \setminus B$, on a $\delta(Q) = 0$ puisque, trivialement, tout mot m de A^* appartient à $(A \setminus B)^*$ ssi il ne contient aucune lettre dans B, ce qui est équivalent à $mA^* \cap (A \setminus B)^* \neq \emptyset$. Q.E.D.

Rappelons qu'une *substitution* α d'un monoïde M dans un autre, M' est simplement un morphisme de M dans le monoïde des parties de M'. Une substitution α sera dite *complète* ssi le zéro $W(M\alpha)$ dans M' de l'image par α de M est vide.

Dans le cas où $M = A^*$ et $M' = B^*$ sont deux monoïdes libres, nous dirons que α est *injective* ssi, d'une part, les images par α de deux lettres distinctes de l'alphabet A sont des parties disjointes de B^* et, d'autre part, l'ensemble $A\alpha$ engendre librement le sous-monoïde $A^*\alpha$.

On vérifie facilement que si $\alpha: A^* \to B^*$ et $\beta: B^* \to C^*$ sont deux substitutions complètes ou injectives, il en est encore de même de la substitution produit $\alpha\beta: A^* \to C^*$.

Reprenant les notations de l'exemple précédent, on voit sans peine que si X est un ensemble et ξ une surjection de P sur X, l'application inverse ξ^{-1} de X dans les parties de A^* se prolonge de façon unique en une substitution dans A^* du monoïde libre X^* et que cette dernière est à la fois *complète* et *non ambigue*.

Appelons, pour abréger, substitution *préfixe* (resp. ayant un délai de synchronisation fini) toute substitution non ambigue, telle que l'image de l'alphabet soit une partie préfixe (resp. ayant un délai de synchronisation fini).

III.4. Le produit (de composition) de deux substitutions préfixes ayant un délai de synchronisation fini est encore une substitution du même type.

Preuve: Il suffit de considérer une substitution préfixe $\alpha: A^* \to B^*$ telle que $\delta(A\alpha) = \varkappa$ soit fini et de montrer que si P est une partie préfixe de A^* et p une constante pour P^+, tout mot de la forme qr où $q \in (A\alpha)^\varkappa$ et $r \in p\alpha$ est encore une constante pour $R^+ = P^+\alpha$.

Supposons donc que $mqrm' \in R^*$. Comme R^* est contenu dans $A^*\alpha$ et que q est une constante pour le monoïde unitaire, on a $mq, rm' \in A^*\alpha$. Utilisant une deuxième fois de caractère unitaire de $A^*\alpha$, on déduit $m' \in A^*\alpha$ de $r, rm' \in A^*\alpha$. On peut donc trouver des mots $a = mq\alpha^{-1}$ et $a' = m'\alpha^{-1}$ et l'on a $(mqrm')\alpha^{-1} = apa' \in P^*$, puisque α est injectif et que $R^* = P^*\alpha$.

Maintenant comme p est une constante et P^* unitaire, les deux mots ap et a' sont dans P^* et prenant leurs images par α on obtient le résultat désiré que $m \in ap\alpha$ et $m' \in a'\alpha$ sont dans R^*. Q.E.D.

On a donc dans les conditions de l'énoncé $\delta(P\alpha) \leqslant \delta(P) + \delta(A\alpha)$. Quand on ne suppose pas que la substitution non ambigue α est préfixe, on obtient une inégalité semblable avec $2\delta(A\alpha)$ au lieu de $\delta(A\alpha)$.

4. Fin de la preuve.

Nous obtiendrons le résultat annoncé comme corollaire d'une propriété plus générale qui utilise une nouvelle opération de fermeture. Cette dernière serait triviale dans le cas apériodique.

Soit maintenant un groupe fini G et un alphabet fini A. Nous appelons *G-fermeture élémentaire* la plus petite famille $\mathcal{F}_A$ de parties de A^* qui soit fermée par les opérations polynomiales et qui contienne toutes les parties de la forme $g\gamma^{-1}$ où $g \in G$ et où γ est un morphisme dans G du monoïde libre engendré par une partie de l'alphabet A.

Ceci fait, la *G-fermeture* $\mathcal{F}$ est obtenu en fermant $\mathcal{F}_A$ par rapport aux substitutions $\alpha: X^* \to A^*$ où X est un alphabet fini et où il existe une partition $A = B + C$ telle que α soit une substitution complète non ambigue pour laquelle l'image de chaque lettre x est de la forme Pc avec $c \in C$ et $P \in \mathcal{F}_B$.

En utilisant par exemple la théorie de la décomposition de J. Rhodes, on peut montrer que tout groupe dans le monoïde syntactique d'un membre de la G-fermeture est diviseur d'un produit direct de copies de G. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat. Nous établirons par contre un énoncé fondamental dû à Krohn et Rhodes. Dans celui-ci F est une partie reconnaissable F de A^*. Nous désignons par σ le morphisme de A^* sur le monoïde syntactique $\bar{S}$ de F et par S l'image par σ du semi-groupe A^+. Par conséquent, le monoïde syntactique $\bar{S}$ est égal à S ou à $1 + S$, selon que 1 est ou non dans S.

Lemme de Krohn et Rhodes.

Trois cas seulement sont possibles:

(1) S est un semi-groupe $\mathfrak{L}$-simple;

(2) S est cyclique;

(3) Il existe une partition $A = B + C$ de l'alphabet telle que les semigroupes $(B^*C)^+\sigma$ et $B^+\sigma$ soient des parties propres de S.

PREUVE: Supposons d'abord que le sous-ensemble D des lettres d de A pour lesquelles 1 est contenu dans $(A^*dA^*)\sigma$. Puisque S est fini, $D^+\sigma$ est un groupe et nous sommes dans le cas (1) quand $D = A$, puisque tout groupe est $\mathfrak{L}$-simple en tant que semi-groupe. Quand D

est différent de A, nous sommes dans le cas (3) en prenant $B = D$, $C = A \setminus D$ puisque l'idéal $(A^* C A^*)\sigma$ ne contient pas l'élément 1 qui était contenu dans S. On peut donc supposer désormais que D est vide, c'est-à-dire que 1 n'appartient pas à S.

Puisque S est fini, il existe au moins une lettre b_1 de A telle que l'idéal à gauche $K = (A^* b_1)\sigma = \bar{S}(b_1\sigma)$ de $\bar{S}$ soit maximal parmi les idéaux de la même forme. Notons L l'ensemble des éléments de S qui engendrent K et posons $B = A \cap L\alpha^{-1}$. Si $B^+\alpha$ est différent de S, nous sommes dans le cas (3) puisque d'après le caractère maximal de K, L n'est pas contenu dans l'idéal $A^*(A \setminus B)A^*$.

On peut donc supposer désormais que $B^+\alpha$ est égal à S. Si L se réduit à un singleton s, nous avons a fortiori $B\sigma = s$ et S est le semi-groupe cyclique s^+, c'est-à-dire que nous sommes dans le cas (2). Nous pouvons donc supposer que L contient deux éléments distincts s et s'. Comme L est une $\mathfrak{L}$-classe, il existe au moins un $t \in \bar{S}$ tel que $ts = s'$ et l'on a $t \neq 1$ puisque $s \neq s'$. En raison de l'hypothèse $S = B^+\alpha = L^+$, nous avons donc $t \in L^+$.

Maintenant, *puisque S est fini*, t ne peut pas appartenir à l'idéal bilatère de $\bar{S}$ complément de L dans S, et par conséquent il appartient à L qui satisfait donc la condition

$$s, s' \in L \Rightarrow s' \in sL$$

qui définit les semi-groupes $\mathfrak{L}$-simples. On en conclut que $L = L^+$ et enfin que $S = L^+$ est $\mathfrak{L}$-simple. Q.E.D.

IV.2. Soit F une partie reconnaissable de A^* et soit $\bar{G}$ le plus petit groupe dont tous les groupes dans le monoïde syntactique de F sont des diviseurs. Alors F appartient à la $\bar{G}$-famille $\mathcal{F}$ de A.

Preuve: L'énoncé est trivial si $F = \{1\}$. Comme les groupes dans les monoïdes syntactiques de F et de $F \cap A^+$ sont les mêmes on peut désormais supposer que F est contenue dans le semi-groupe A^+.

Nous considérons successivement chacun des cas du lemme de Krohn et Rhodes. Comme $\mathcal{F}$ est fermée par union, il suffit à chaque fois détablir le résultat quand F est l'image inverse d'un singleton $\{s\}$.

(1) S est union disjointe de groupes G_j tous isomorphes à $\bar{G}$ et satisfaisant identiquement $G_j G_i = G_j$. Donc $s\sigma^{-1}$ est union finie de termes de la forme $a(g\varrho^{-1})$ où a est une lettre, g est un élément de $\bar{G}$ et ϱ un morphisme de A^* dans $\bar{G}$. Comme $\mathcal{F}$ contient les parties de A et est fermée par produit, il suffit de vérifier, ce qui est facile, que chacun des $g\varrho^{-1}$ appartient à $\mathcal{F}$.

(2) Il existe un élément t de S et des entiers positifs tels que $S = \{t^j : 1 \leqslant j \leqslant p + q - 1\}$ avec en outre $t^j = t^j(t^p)^*$ pour tout j au moins égal à $q - 1$. Le groupe $\bar{G}$ est le groupe cyclique d'ordre p. Notant A_u l'intersection avec l'alphabet A de l'image inverse d'un élément quelconque u de S, on vérifie facilement que $s\sigma^{-1}$ est soit un polynôme en les A_u si $s = t^j$ et $j \leqslant q - 1$, soit le produit d'un polynôme de ce type par le monoïde $(A^p)^*$. Dans ce dernier cas, on a encore que $(A^p)^*$ appartient à $\mathcal{F}$. Comme cette famille est fermée par les opérations polynomiales, le résultat est encore vérifié.

Comme le cas (1) couvre celui où S est réduit à un singleton, nous pouvons désormais procéder par induction sur le nombre des éléments de S.

(3) En raison de l'identité $A^* = (B^*C)^*B^*$, l'image inverse de chaque élément de S est une union finie disjointe des produits (non ambigus) de la forme $F'F''$ où F' et F'' sont soit 1 soit respectivement de la forme $(B^*C)^+ \cap s\sigma^{-1}$ ou $B^+ \cap s\sigma^{-1}$ avec s dans $(B^*C)^+\sigma = S'$ ou dans $B^+\sigma = S''$. D'après l'hypothèse d'induction on a $F'' \in \mathcal{F}$. Introduisons maintenant un alphabet fini X et une bijections σ' de X sur $(B^*C)\sigma$. Celle-ci s'étend à un morphisme σ' de X^+ sur $(B^*C)^+$.

Définissons une substitution α de X^* dans A^* en posant $x\alpha = x\sigma'\sigma^{-1} \cap B^*C$ pour chaque lettre x de X. Par construction $x\alpha$ est une union finie disjointe de termes de la forme $F''c$ où $c \in C$ et où F'' est 1 ou l'intersection avec B^+ de l'image inverse par σ^{-1} d'un élément de S''. On vient de voir que ces parties sont dans $\mathcal{F}$. La substitution α est du type voulu et d'après l'hypothèse d'induction, F' est l'image par α d'une partie appartenant à la G-famille de X. Q.E.D.

Corollaire IV.3: La famille $\boldsymbol{Ap}$ des parties apériodiques est la plus petite famille $\mathcal{A}$ fermée par les opérations polynomiales et par l'opération unaire $P \to P^+$ restreinte aux parties préfixes $P \in \mathcal{A}$ ayant un délai de synchronisation fini.

Preuve: L'inclusion de $\mathcal{A}$ dans $\boldsymbol{Ap}$ résulte immédiatement du dernier corollaire de la Section II. L'inclusion opposée résulte de l'énoncé précédent. Q.E.D.

Testo pervenuto il 23 marzo 1973.
Bozze licenziate il 2 dicembre 1974.