analyse appliquée et informatique

journées de combinatoire et informatique

4, 5, 6 juin 1975

jean-claude bermond et **robert cori** éditeurs

bordeaux 1

uer de
mathématique
& informatique

cnrs

équipe du
laboratoire
associé 226

QUELQUES REMARQUES SUR UNE PROPRIETE D'EQUIDISTRIBUTION DES PERMUTATION

Dominique FOATA
Université de Strasbourg[1]

Marcel Paul SCHUTZENBERGER
Université de Paris VII[2]

Cette brève communication a pour but de signaler un phénomène assez curieux concernant la distributions de certains éléments remarquables sur l'ensemble S des permutations d'une chaîne standard $[n] = \{1<2<\ldots<n\}$ fixée.

(1) Département de Mathématiques - 7, rue René Descartes - 67084 Strasbourg

(2) Département de Mathématiques - 2, Place Jussieu , Tour 45 p. 518, 75005 Paris.

1. Pour décrire ceux ci nous notons chaque application f de $[n]$ comme le mot $1f.\ 2f.\dots\ nf$ et nous appelons <u>forme</u> de f la suite des relations $\geq$ ou $<$ satisfaites par les valeurs successives. Par exemple la forme de $f = 4122652$ est $(\geq < \geq < \geq\geq)$. Les pics de f sont les positions $j \geq 2$ telles que $(j-1)f < jf \geq (j+1)f$ pour $j \leq n-1$ et la position $j = n$ si $(n-1)f < nf$. Dans l'exemple ci-dessus les pics sont 3 et 5. Enfin chaque forme définit une partition ordonnée unique $I = \{I_i, \dots, I_h\}$ de $[n]$ en intervalles consécutifs par la condition que les pics soient les premiers éléments de chaque composant I_i $(i \geq 2)$. Pour la forme de f ci-dessus cette partition est $\{1,2\}$, $\{3,4\}$ $\{5,6,7\}$; pour la forme (sur $[9]$) définie par $(< \geq \geq \geq < \geq <)$ la partition serait $(\{13\},\{2,3,4,5,6\},\{7,8\},\{9\})$ tout comme pour la forme définie par $(< \geq < < < < \geq <)$.

D'autre part nous appelons <u>avance</u> d'une permutation toute position i telle que $i < (i\,s+1)\,s^{-1}$, c'est-à-dire toute position telle que le successeur (immédiat) de la valeur qu'elle porte soit à sa droite. Par exemple les avances des permutations $s = \underline{5}\ 9\ \underline{3}\ 2\ 1\ 4\ \underline{7}\ 6\ 8$ et $s' = \underline{7}\ \underline{8}\ \underline{4}\ 3\ \underline{1}\ 9\ 2\ 5$ sont les positions soulignées, c'est-à-dire respectivement $Av(s) = \{1,3,5\}$ et $Av(s') = \{1,2,3,5\}$.

Nous noterons $Av^{-1}(X)$ l'ensemble des permutations dont l'ensemble des avances est une partie donnée X de $[n]$.

Enfin, étant donné l'ensemble F des permutations ayant une forme donnée et $I = I(F) = \{I_i, \dots, I_h\}$, la partition associée de $[n]$ définie par les pics, nous noterons $|I \cap X|$ pour chaque partie X de $[n]$ le vecteur $(m_1, m_2, \dots, m_h)$ où $m_j = |I_j \cap X|$ (= Card $(I_j \cap X)$) pour $j = 1, 2, \dots h$.

THEOREME 1 : Soit F l'ensemble des permutations de S ayant une forme donnée. Si deux parties X et Y de $[n]$ sont telles que $|I \cap X| = |I \cap Y|$ on a Card $\{F \cap Av^{-1}X\}$ = Card $\{F \cap Av^{-1}Y\}$.

Autrement dit, le nombre des permutations (de la forme donnée) dont l'ensemble des avances est une partie quelconque X de $[n]$ <u>ne dépend que</u> du vecteur $|I \cap X|$. Pour prendre un exemple simple, considérons la forme sur $[5]$ définie par $(< \geq < \geq)$. La partition correspondante est $(\{1\}, \{2,3\}, \{4,5\})$.

Il existe 2 permutations pour lesquelles Av s se réduit à $\{1\}$, 6 pour lesquelles Av s = $\{1,2\}$, 6 aussi pour lesquelles Av (x) = $\{1,3\}$ et enfin 2 pour lesquelles A (x) = $\{1,2,3\}$. Ce qui correspond aux trois vecteurs $|I \cap X| = (1,0,0)$, $(1,1,0)$, et $(1,2,0)$ qui sont les seuls ici dont l'ensemble de permutations correspondant ne soit pas vide.

Notre preuve est passablement compliquée. Pour en donner une idée, appelons <u>codage de Lehmer</u> l'application L associant à chaque permutation s l'applications $t = sL$ de $[n]$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour chaque $j = 1, 2, \dots, n$ on ait $j\,t = \text{Card}\,\{i < j\; i : is < js\}$. Par construction $t = sL$ est non décroissante et a la même forme que s.

Soit I M A (s) l'ensemble des valeurs positives distinctes de sL. D. Dumont auquel revient le mérite d'avoir songé a considérer ce paramètre, a montré que $|I\,M\,A\,(s)|$ est distribué (sur S) comme le nombre des descentes. Indépendament de ce résultat, on peut vérifier de façon assez simple que pour une forme donnée les ensembles I M A (s) suivent les mêmes loi déquipartition que celle formulée dans le Théorème 1 pour les ensembles Av (s) . Ceci dit il ne reste plus qu'à trouver une bijection V de F sur lui même telle que I M A (sV) = Av (s) identiquement. Ce qui est faisable mais plutôt long.

De fait le Théorème 1 ne semble dire toute la vérité. A chaque permutation $s = s_1 s_2 \dots s_n$ on peut associer son dual $\bar{s} = \bar{s}_n \bar{s}_{n-1} \dots \bar{s}_2 \bar{s}_1$ où $\bar{s}_i = n+1 - s_i$ $(i = 1, 2, \dots n)$ dont la forme est la forme duale de celle de s. On voit aisément que si j est une avance de s, c'est-à-dire si $j < (j\,s+1)\,s^{-1} = j'$, la positions $\bar{j}' = n+1 - j'$ est une avance de $\bar{s}$.

Par exemple prenant $s = \underline{5}\;9\;\underline{3}\;2\;1\;\bar{4}\;\underline{7}\;\bar{6}\;\bar{8}$ on obtient $\bar{s} = \underline{2}\;\underline{4}\;\bar{3}\;\underline{6}\;9\;8\;\bar{7}\;1\;\bar{5}$ dont les avances sont $(1,2,4) = (10-9,\ 10-8,\ 10-6)$.

On a donc une dualité complète entre s et $\bar{s}$ par rapport à la forme et aux avances. Nous avons observé sans avoir pu jusqu'ici le prouver que si $\bar{I}$ est la partition de $[n]$ définie par la forme duale de F on a la propriété suivante

<u>Conjecture 2 :</u> Soit F l'ensemble des permutations ayant une forme données.

Si les parties X, X', Y, Y' de $[n]$ sont telles que $|I \cap X| = |I \cap Y|$ et $|\bar{I} \cap X'| = |\bar{I} \cap Y'|$ on a

$$\mathrm{Card}\ \{ s \in F : \mathrm{Av}\ s = X, \mathrm{Av}\ \bar{s} = X' \} =$$
$$\mathrm{Card}\ \{ s \in F : \mathrm{Av}\ s = Y, \mathrm{Av}\ \bar{s} = Y' \} .$$

Si ceci est vrai, comme nous en sommes persuadés, on aurait ce résultat remarquables que les avances de s et de $\bar{s}$ sont en un certain sens distribués de façon indépendantes. Nous comptons revenir ultérieurement sur cette conjecture.