ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ATTI DEI CONVEGNI LINCEI

17

Colloquio Internazionale sulle

TEORIE COMBINATORIE

con la collaborazione della

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

(Roma, 3–15 settembre 1973)

TOMO I

(*ESTRATTO*)

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1976

M. P. SCHÜTZENBERGER

EVACUATIONS

RIASSUNTO. — Si introduce un algoritmo, detto di « evacuazione » che trova applicazione nelle teorie combinatorie delle rappresentazioni del gruppo simmetrico.

I. INTRODUCTION

La Théorie des représentations linéaires du groupe symétrique utilise toute une série de constructions remarquables sur les Tableaux de Young. Les plus connues sont peut être l'algorithme de Richardson et Littlewood pour déterminer la multiplicité des composantes irréductibles et la correspondance de G. de B. Robinson qui sert de base à la méthode des « rising operators » de Young. L'analyse des preuves fait apparaître deux niveaux bien distincts: dans le premier, n'interviennent que les propriété le plus élémentaires des ensembles ordonnés finis cependant que dans le second le fait que les tableaux de Young puissent être considérés comme des configurations *planaires* joue un rôle absolument essentiel qui ne semble permettre aucune généralisation. Evidement un troisième niveau est requis pour rattacher ces objets aux représentations elles même.

Dans le présent travail je me limiterai à la définition et à l'étude d'un algorithme dit « d'évacuation » qui ne reléve que du premier niveau mais qui posséde déja plusieurs des propriétés remarquables de celui de G. de B. Robinson, introduit en 1938 (« American J. of Math. », *60*, pp. 745–60) et étudié depuis dans une toute autre optique (C. Schensted (1961), « Canadian J. of Math. », *13*, pp. 179–192 et D. Knuth (1970), « Pacific J. of Math. », *34*, pp. 709–727).

II. NOTATIONS ET DÉFINITION DE L'ALGORITHME

Dans tout ce qui suit nous considérerons un ensemble fini fixe P de *points* et des *fonctions* (c'est à dire d'applications partielles) *injectives* α de P dans la chaine standard $[n] = \{1 < 2 < \cdots < n\}$. Le nombre de éléments du domaine d'une telle fonction α sera noté $|\alpha|$ et, comme d'usage, O désiquera la fonction dont le domaine est vide.

La notion de base sera celle d'une action $\alpha \to \alpha V$ d'une partie V de P sur une fonction α que nous définissons de la façon suivante. Soit $V' = (v_1, v_2, \cdots, v_s)$ la suite de éléments de $V \cap \mathrm{Dom}(\alpha)$ indexés de telle sorte que l'on ait $v_1 \alpha > v_2 \alpha > \cdots > v_s \alpha$.

L'action αV est la fonction β de P telle que:

(1) $p\beta = p\alpha$ pour tout $p \in P \setminus V$;

(2) $v_1 \beta = \varnothing$;

(3) $v_k \beta = v_{k-1} \alpha$ pour chaque $v_k \in V$ ($h \geq 2$);

On a donc

(4) $\mathrm{Dom}\,(\alpha V) = \mathrm{Dom}\,(\alpha) \setminus \{v_1\}$;

(5) $\mathrm{I}m\,(\alpha V) = \mathrm{I}m\,(\alpha) \setminus \{v_1\,\alpha\}$.

Et il est clair que αV est injective. Nous dirons pour abréger que V est une *trainée pour* α quand V est contenue dans le domaine de α. Par conséquent la donnée de deux fonctions (injectives) α et β determine au plus une trainée V pour α dont l'action sur α soit β.

De façon graphique on peut figurer P comme un systéme de « cases » et $[n]$ comme un ensemble de « piéces » classés par ordre de grandeur. Chaque fonction injective α représente alors une disposition de $|\alpha|$ ($=$ Card Dom (α)) piéce sur les cases. V étant supposée être une trainée pour α, son action consiste à déplacer les piéces situées sur les cases qui la composent en commencant pur la plus grande (soit $v_1\,\alpha$) et en suivant la régle que chaque piéce $v_k\,\alpha$ vient prendre la place occupée par la piéce immediatement plus petite, c'est à dire v_{k-1}, sauf en ce qui concerne la derniére piéce $v_s\,\alpha$ qui est éliminée. Par conséquent dans la disposition representeé par $\beta = \alpha V$, la case v_1 est devenue vide et, par construction, l'on a $p\beta^{-1} \geq p\alpha^{-1}$ pour chaque point $p \in \mathrm{Dom}\,(\beta)$.

Une *evacuation* A de α sera une suite de $m = |\alpha|$ semblables actions menant de $\alpha = \alpha_m$ à $\alpha_0 = 0$. On la décrira en se donnant la suite $(V_m, V_{m-1}, \cdots, V_1)$ de ses m trainés, chaque V_k ètant une trainée pour $\alpha_k = \alpha_{k-1} V_{k-1}$, ou, aussi bien, par la suite des m fonctions $(\alpha_m = \alpha, \alpha_{m-1}, \cdots, \alpha_1)$ liés par les relations précédente qui impliquent $\alpha_1 V_1 = 0$.

Pour des raisons de symétrie qui apparaitront dans la suite, il sera commode de considérer une partie quelconque I de m éléments distincts de $[n]$ et d'indexer le trainés par le éléments de I pris en ordee décroissant. On parlera alors d'une *I-évacuation.*

La deuxiéme notion de base est la suite $(U_j : j \in J)$ des *trajectoire* des piéces $j \in J = \mathrm{Im}\,(\alpha)$ dans une évacuations A de α. Intuitivement, U_j est la suite des cases *distinctes* occupées par la piéce j dans la suite de dispositions représentée par les fonctions α_i ($i \in I$) de l'evacuation A. Formellement, soit $I(j) = (i_1, > i_2 > \cdots > i_s)$ la sous-suite des indice $i \in I$ pour lesquels $j\alpha_i^{-1}$ appartient à la trainée V_i de α_i. Il est clair que si j appartient à l'image d'une fonction α_i de A, l'on a $j\alpha_i^{-1} = j\alpha_{i'}^{-1}$, pour au moins un $i' \in I\,(j)$ car toute piéce finit par être éliminée. En oùtre tous les points $j\alpha_{i_k}^{-1}$ ($i_k \in I(s)$) sont différents puisque comme ou l'a fait observer plus haut, chaque relation $p\alpha_i = j$ ($p \in P$)

implique $p\alpha_{i'} \leq j$ pour tout $i' \geq i$. La suite $U_j = (j\alpha_{i_1}, j\alpha_{i_2}, \cdots, j\alpha_{i_s})$ est donc bien la suite de cases *distinctes* occupés par j au cours de l'évacuation.

Nous notons que les trainés et les trajectoires ont la même structure: ce sont des suite de points distincts. Notre résultat principal est l'établissement d'une dualité qui les échange. Le chapître suivant considère le cas indispensable pour les applications où les fonctions α sont de morphisme (d'ensemble ordonné).

L'exemple suivant tente d'illustrer ce notions. L'ensemble P est formé de 5 cases a, b, c, d, e.

Les dispositions successive des α_i d'une évacuation de α_5 sont le suivants:

	a	b	c	d	e
$\alpha_5 =$	1	2	3	4	5
$\alpha_4 =$	1	4	3	·	5
$\alpha_3 =$	1	·	4	·	5
$\alpha_2 =$	4	·	5	·	·
$\alpha_1 =$	4	·	·	·	·
$\alpha_0 =$	·	·	·	·	·

Les 5 trainés sont (d, b), (b, c), (e, c, a), (c), (a) et les 5 trajectoires sont $U_5 = (e, c)$; $U_4 = (d, b, c, a)$; $U_3 = (c)$; $U_2 = (b)$; $U_1 = (a)$.

Le lecteur aura peut être moins d'impatience en parcourant les sections suivantes s'il veut bien se convainance lui même qu'il y a quelque chose à prouver: partant de la disposition initiale $\beta_5 = 1\ 4\ 2\ 5\ 3$, il peut vérifier que $U_5, U_4, \cdots, U_1$ constituent bien les *trainées* successives d'une évacuation B dont les *trajectoires* se trouvent être (dans l'ordre même) les trainées de l'évacuation précédente.

III. Dualité

Nous considérons une $\dot{I}$–évacuation fixe $A = (\alpha_i : i \in I)$ $(I = (i_m > > i_{m-1} > \cdots > i_1))$ d'une fonction $\alpha = \alpha_{i_m}$ $(m = |\alpha|)$ de domaine $D \subset P$ et d'image $J \subset [n]$. Par hypothèse, I, D et J out m éléments et les trainés successives V_i de A sont indexés de façon decroissante. Les trajectoires son: les U_j $(j \in \dot{J})$.

Définition. Le *plan* de l'évacuation A est la fonction $a : I \times \dot{J} \to P$ définie par $(i, j)\, a = V_i \cap j\alpha_i^{-1}$ pour chaque $(i, j) \in I \times \dot{J}$.

De façon plus explicite, $(i, j)\, a = p$ ssi la trainée V_i contient un point p pour lequel $p\alpha_i = j$, ce qui entraine que pour chaque $i \in I$ l'ensemble $\{a(i, j) : j \in J\}$ $(= a(i, \dot{J}))$ soit précisement l'ensemble des points de la trainée V_i. Ceci entraine que la donnée de plan a determine completement l'evacuation A une fois connue la fonction initiale α. Mais celle–ci elle même est aussi fournie par le plan a puisque pour chaque point p de domaine, la piéce $j = p\alpha$ peut être déterminée par la relation $a(i_j, j) = p$ où $i_j \in I$ est obtenu à son tous comme le plus grand $i \in I$ pour lequel $p \in V_i$.

De façon symétrique, la définition des trajectoires montre que pour chaque $j \in \dot{J}$ ou a $U_j = a(I, j)$. Cette deuxième remarque indique la marche générale de la discussion qui suit: elle revient à établir que la fonction transposée $\tilde{a}$ définie par l'identité $\tilde{a}(j, i) = a(i, j)$ est aussi le plan d'une évacuation B d'une certaine fonction initiale β.

Pour simplifier nous traitons d'abord tout ce qui concerne le *support* S' du plan a c'est à dire la relation $S \subset I \times J$ formée des pairs (i, j) pour lesquelles $(i, j)\, a \neq \varnothing$. Comme d'usage, quelque soit la relation $R \subset I \times \dot{J}$ nous desiquons par $j R_1$ (resp. $i R_2$) pour chaque $j \in \dot{J}$ (resp. $i \in I$) l'ensemble des $i \in I$ (resp. des $j \in \dot{J}$) tels que $(i, j) \in R$.

III.1. Le support S du plan a satisfait la condition suivante:

(E). Il existe une bisection $E \subset S$ telle que pour chaque $(i, j) \in S'$ ou ait

$$jE_1 \leq i \qquad \text{et} \qquad iE_2 \leq j.$$

Preuve. Soit $i \in I$ et soit V_i le dernier élément de la trainée V_i, c'est à dire celui des points de V_i tel que $v_i\, \alpha_i = \text{Max}\ (V_i\, \alpha_i)$.

D'aprés la definition de l'action $\alpha_i \to \alpha_i V_i$, la piéce $v_i\, \alpha_i$ n'appartenent plus à l'image d'aucune des fonctions $\alpha_{i'}$ pour $i' < i$. Comme toute les piéces $j \in J$ appartiennent à $I_m(\alpha)$ et que chacune d'elles est finalement évacuée, ceci montre que la fonction $i \to v_i\, \alpha_i$ est une bijection de $\dot{I}$ sut $\dot{J}$ dont nous designons le graphe par E. Ou a identiquement comme ou vient de voir que $(i, j) \in S$ entraine $i \geq jE_1$ et par consèquent aussi la condition symétrique $j \geq iE_2$. Q.E.D.

Pour abréger nous dirons qu'une relation $R \subset I \times J$ est une *relation d'évacuation* si elle satisfait la condition (E) ci dessus. Les deux énoucés suivants concernant une relation d'évacuation quelconque R ne requèrent pas de preuve:

– La relation transposeé $\tilde{R}$ $((j, i) \in \tilde{R}$ ssi $(i, j) \in R$, identiquement) est aussi une relation d'évacuation.

– Quelque soit $(i, j) \in E$ la restriction de R à $(I \setminus i) \times (J \setminus j)$ est encore une relation d'évacuation.

Nous etablissons maintenant une deuxième propriété du plan a dont l'énoncé utilise le fait que S est une relation d'évacuation ou plus exactement une notation déduite de ce fait. Soit donc $R \subset I \times J$ une relation d'évacuation quelconque contenant la bijection E. Pour chaque paire $(i, j) \in R \setminus E$ nous appelons I–*successeur* de i (selon j) l'élément $i_j^+ = \text{Max}\ \{i' \in {}^{j} R_1 : i' < i\}$ et, de même, J–*successeur* de j (selon i) l'élément $j_i^+ = \text{Max}\ \{j' \in i\, R_2 : j' < j\}$. Ces deux éléments existent toujours en raison de l'hypothése que $(i, j) \notin E$.

III.2. Le plan a satisfait la relation de *symétrie locale* suivante:

(S_y). Pour chaque $(i, j) \in S \setminus E$ on a $(j, j_i^+)\, a = (i_j^+, j)\, a$.

Preuve. En raison de la façon dont les points sont indexés sur les trajectoires, ceci équivaut à l'assertion suivante:

Si v et v' sont deux points immédiatement consécutifs sur une trainée V_i ces deux points sont aussi immédiatement consécutifs sur la trajectoire de la piéce $v\alpha_i$.

Mis sous cette forme l'énonce est donc une conséquence immédiate de la définition de l'action $\alpha_i \to \alpha_i V_i$ qui « déplace » la piéce $v\alpha_i$ de la case v à la case v'. Q.E.D.

Il reste encore une propriété caractéristique à vérifier. Considérant une fonction $b : I \times J \to P$ quelconque assujétie à la seule consition que $(i, \dot{J})\, b \neq \varnothing$ et $(I, j)\, b \neq \varnothing$ pour chaque paire (i, j), nous appelons I–*application* de b l'application envoyant chaque $i \in I$ sur $(i, \operatorname{Max}(i R_2))\, b$, où R designe le support de B. De même la J–*application* de b envoye chaque $j \in \dot{J}$ sur $(\operatorname{Max}(j R_1), j)\, b$.

Nous avons vu au début de cette section que la fonction initiale à évacuer $\alpha : D \to J$ ($D = \operatorname{Dom}(\alpha)$) (et qui est par définition une bisection) est l'inverse de la J–application du plan a. Cette derniére est donc aussi une bijection. En ce qui concerne la I–application de a elle envoye chaque indice $i \in I$ sur le premier élément v_i ($= \alpha_i^{-1} \operatorname{Max}(V_i \alpha_i)$) de la trainée V_i: c'est aussi une bijection $I \to D$ puisque, d'après la définition de l'action $\alpha_i \to \alpha_i V_i$, ce point v_i n'appartent pas au domaine de $\alpha_i V_i$, ni par conséquent, à celui des fonctions $\alpha_{i'}$ pour $i' < i$.

Nous établissons maintenant la réciproque.

III.3. Soit $b : I \times J \to P$ une fonction d'image D satisfaisant les trois conditions suivantes:

(1) Son support R est une relation d'évacuation;

(2) La condition de symétrie locale (S_y).

(3) Sa J–application γ est une bijection $J \to D$.

Il existe une évacuation B de la fonction initiale $\beta = \gamma^{-1}$ dont b est le plan.

Preuve. L'enoncé est trivial quand $m = \operatorname{Card}(J) = \operatorname{Card}(\dot{I}) = \operatorname{Car}(D)$ est égal à un. Nous pouvons donc procéder par induction sur $m \geq 2$. Pour simplifier l'écriture nous supposons que $\dot{I} = \dot{J} = [m]$. Le maximum de I est donc m et, E étant la relation bijective contenue dans le support R de b nous désignons par j^* le minimum de mR_2, c'est à dire l'élément mE_2. Posant $I' = I \setminus \{m\} = [m - 1]$ et $J' = J \setminus \{j^*\}$ nous notons b' la restriction de b à $I' \times J'$. Ou sait déjà que le support R' de b' est une relation d'évacuation (sur $I' \times J'$) et il est immédiat que b' satisfait la condition de symétrie locale (S_y). Il nous suffit donc de vérifier que la J'–application γ' de b' est une bijection

$J' \to D'$ où $D' \subset D$ et que son inverse γ'^{-1} est précisement égale à $\beta' = \beta V_m$ où V_m designe la trainée pour β dont l'ensemble de points est l'ensemble $(m\,,\,J)\,b$, c'est à dire l'ensemble $mR_2\,\gamma$ d'aprés la définition de γ et $m = \mathrm{Max}\,(I)$.

De nouveau ceci est trivial quand mR_2 se réduit au singolet $\{j^*\}$ car dans ce cas D' est égal à D privé du point $(m\,,j^*)\,b = j^*\gamma$ et γ' est la restriction de γ à J' c'est à dire l'inverse de la restriction de β à D'. Nous supposons donc désormais que $mR_2 = \{j_1 > j_2 > \cdots > j_s = j^*\}$ où $s \geq 2$. Ou a $V_m = (V_k = J_k\gamma : h = 1, 2, \cdots, s)$ et la J'-application γ' de b' est définie par les relations suivante pour chaque $j \in J' : j\gamma' = j\gamma$ si $j \notin mR_2$;

$$= (m_1^+\,,j)\,b \quad \text{si} \quad j \in mR_2 \setminus \{j^*\}.$$

D'aprés la condition de symétrie locale on a identiquement $(m_i^+\,,j)\,b = (m\,,j_m^+)\,b$ dans le deuxiéme cas ce qui équivant à la condition que $\gamma^{1^{-1}} = (\gamma^{-1})\,V_m$ et ceci établit l'énoncé. Q.E.D.

Une discussion un peu plus longue permet de montrer que la donnée d'une relation d'évacuation $R \subset I \times J$ et d'une bisection $\gamma : J \to D$ suffit pour déterminer de façon unique une fonction $b : I \times J \to D$ de support R et de J-application γ qui satisfasse les condition de symétrie locale et qui soit donc comme ou vient de le voir le plan d'une évacuation (necessairement unique) de la fonction initiale $\gamma^{-1} : D \to \dot{J}$. Nous n'autores pas besoin de ce résultat et nous passons directement à notre enoncé principal.

III.4. *Propriété de dualité.* Il existe une *involution* envoyant chaque $\dot{I}$-évacuation A d'image $\dot{J}$ sur l'unique $\dot{J}$-évacuation B d'image I dont la suite des trainés est la suite des trajectoires de A.

Preuve. Soit $\tilde{a}$ la transposée de plan a de A (c'est à dire $\tilde{a}\,(j\,,i) = a\,(i\,,j)$ identiquement). Etant donnée la symétrie de conditions (1) et (2) de III. 3, celles-ci sont satisfaites par $\tilde{a}$ puisquélles le sont par a. De plus on a vu plus haut que la I-application de a est une bisection γ sur $Im(a)$. Par conséquent, d'aprés III. 3, (eu échangeau I et J), $\tilde{a}$ est le plan d'une évacuation B de la fenction initiale γ^{-1} et il est clair que cette opération $A \to B$ est une involution échangeant les trainés et les trajectoires. L'unicité est évidente.

Q.E.D.

Nous appelerons B l'*évacuation transposée* de A et β la *fonction adjointe* de A. Il est commode pour les applications d'expliciter certaine des notions qui sont préservées ou échangées dans cette involution. En particulier, appelons *transitions de* A les paire de points qui sont consécutifs sur au moins une des trainés de A et *points finaux* les points qui sont le dernier point d'au moins une des trainées de A.

Appelons aussi (abusivement) *permutation* de A l'application π_A envoyant chaque $i \in I$ sur l'image par α, de dernier point de la trainée V_i, c'est à dire sur $\mathrm{Min}\,(V_i\,\alpha_i)$.

III.5. L'évacuation A et sa transposée B ont les même transitions, et les mêmes points finaux et leurs permutations sont deux bijectiones inverses l'une de l'autre.

Prevue: Ceci est clair en ce qui concerne les transitions car sous cette forme l'enoncé est un cas particulier de la condition de symétrie locale. En ce qui concerne les points finaux et les permutations, il suffit d'observer que π_A est simplement la bijection $i \rightarrow i E_2$ où E est la bisection contenue dans le support de plan a de A et que l'ensemble des points finaux de A et de B est l'ensemble $Ea = \{ (i, j) a : (i, j) \in E\}$. Q.E.D.

Une autre formulation utile résulte de la consideration par chaque I-évacuation $A = (\alpha_m, \alpha_{m-1}, \cdots, \alpha_1)$ de l'*évacuation derivée* $A' = (\alpha_{m-1}, \cdots, \alpha_1)$ dont la fonction initiale α_{m-1} est la deuxiéme fonction de A. Pour obtenir une notion duale, soient $j^* = \operatorname{Max}(J)$ et $J' = J \setminus j^*$. A chaque fonction α_i de A nous pouvons associer une autre fonction $\overset{*}{\alpha_i}$ par la condition que pour chaque point p on ait $p\, \overset{*}{\alpha_i} = p\alpha_i \setminus \{j^*\}$ c'est à dire $p\overset{*}{\alpha_i} = p\alpha_i$ si $p\alpha_i \neq j^*$ et $= \varnothing$ sinon. Cette correspondance envoye sur O l'une de fonctions de la suite A et nous notons A^* la suite de fonctions $(\overset{*}{\alpha_i})$ privée de cette dernière. A^* sera appelée la restriction de A.

III.6. La restriction A^* de la I–évacuation A est une évacuation dont la transposée est la dérivée B' de la transposée B de A.

Preuve. Il suffit de vérifier que A^* est l'évacuation dont le plan est la restriction de plan a de A à l'ensemble $(I \setminus i_*) \times (J \setminus j^*)$ où $j^* = \operatorname{Max}(J)$ et où $i_* = J^* E$. Q.E.D.

IV. Evacuations ordonnées

En vue d'applications évidentes nous supposons désormais que l'ensemble de base P est muni d'une relation d'ordre (partiel) fixe notéé $\leq$. Par abus de langage nous appelerons ***morphisme*** toute fonction $\varphi : P \rightarrow [n]$ telle que pour deux points p, p' de son domaine la relation $p \leq p'$ implique $p\varphi \leq p'\varphi$.

Considérons maintenant le deux conditions suivantes sur une I–évacuation A de la bijection initiale $\alpha : D \rightarrow J$:

(Morph). Toute les fonctions α_i de A sont des morphismes.

(Max). Le premier point de chaque trainée V_i est un point maximal du domaine de α_i.

On voit sans peine que la condition (Max) équivaut à l'hypothése que tous les ensembles $\operatorname{Dom}(\alpha_i)$ $(i \in I)$ sont des ***idéaux*** de D c'est à dire que $\operatorname{Dom}(\alpha_i)$ contient tous les points $p' \in D$ tels que $p' \leq p$ pour au moins un point $p \in \operatorname{Dom}(\alpha_i)$. Une propriété plus interessante est la suivante.

IV. 1. L'évacuation A satisfait la condition (Max) ssi sa fonction adjointe β est un morphisme.

Preuve. Par définition, β est la bijection de D sur I telle que pour chaque $i \in I$, le point $v_i = i\beta^{-1}$ soit le premier point de la trainée V_i. L'énoncé en resulte puisque (Max) équivant à la condition que pour chaque paire d'indices i et i' la relation $v_i \leq v_{i'}$ entre les premiers éléments des deux trainées V_i et $V_{i'}$ entraine que l'ou ait $i \leq i'$. Q.E.D.

Nous appelerons *evacuation ordonnée* toute évacuation $A = (\alpha_m, \alpha_{m-1}, \cdots, \alpha_1)$ satisfaisant à la fois les deux conditions (Morph) et (Max). Nous notons que ceci est réalisé de façon triviale quand $m = 1$ et que quand A est ordonnée il en est de même de sa derivée $A' = (\alpha_{m-1}, \cdots, \alpha_1)$ (dans la terminologie de l'énoncé III. 6) d'aprés la structure même des conditions (Morph) et (Max).

Sous cette même hypothése, la restriction A^* de A est aussi ordonnée puisque d'une part la restriction d'un morphisme est un morphisme et que, d'autre part, le premier point v_i^* de chaque trainée V_i^* de A^* est maximal dans Dom (α_i^*) d'aprés l'a double hypothése qu'il en est de même du premier point de V_i et que α_i est un morphisme.

Cette observation nous permet d'etablir la proprieté suivante.

IV. 2. La classe des évacuations ordonnées est fermée par transposition.

Preuve. Supposons que $A = (\alpha_m, \cdots, \alpha_1)$ soit ordonnée est soit $B = (\beta_m, \cdots, \beta)$ l'évacuation transposée. D'aprés IV. I. β_m est un morphisme et d'aprés le dual de cet enouncé, B satisfait la condition (Max) puisque α_m est un morphisme. Maintenant, d'aprés III. 6, l'evacuation transposés de $B' = (\beta_{m-1}, \cdots \beta_1)$ est la restriction A^*.

Comme cette derniére est une évacuation ordonnée, une induction sur m montre que toutes les fonctions de B' sont des morphismes ce qui achéve les preuve. Q.E.D.