FORMAL LANGUAGES AND PROGRAMMING

Proceedings of a Seminar
Organized by UAM-IBM Scientific Center
Madrid, April 23-25, 1975

edited by

R. Aguilar

Director of the IBM Scientific Center/Universidad Autónoma de Madrid

1976

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM - NEW YORK - OXFORD

R. Aguilar (ed.), Formal Languages and Programming

UNE CARACTERISATION DES PARTIES RECONNAISSABLES

M.P. Schützenberger

Dans la théorie de S. Eilenberg ([1], p. 68), une partie X d' un semigroupe S est dite reconnaissable ssi il existe un morphisme de S dans un semigroupe fini pour lequel $X = X\phi\phi^{-1}$.

La méthode des matrices de Hankel introduite par M. Fliess et en particulier le théorème 2.11 de cet auteur ([2]), suggèrent les caractérisations suivantes des parties reconnaissables du semi-groupe S voisine de la Propriété 12.2 de [1] chapitre IV. On suppose donné un corps commutatif K et on rappelle que la fonction caractéristique $\chi = \chi_X$ d'une partie X de S est l'application de S dans K telle que pour chaque élément s de S on ait $s\chi = 1$ ou 0 selon que s appartient ou non à X.

Propriété: Une condition nécessaire et suffisante pour que la partie X du semigroupe S soit reconnaissable est qu'il existe une famille finie $\{\lambda_i,\rho_i\}(1\le i\le n<\infty)$ de paires l'application de S dans K telles que sa fonction caractéristique χ satisfasse l'identité suivante pour tout $s,s' \in S$:

$$(1) \qquad (ss')\chi = \sum_{1\le i\le n} (s\lambda_i)\,(s'\rho_i).$$

Un cas typique où une telle identité est satisfaire est celui où il existe un morphisme μ de S dans un monoïde de $n\times n$ matrices $(n<\infty)$ sur le corps K et deux indices distingués i_1,i_n tels que l'entrée (i_1,i_n) de chaque matrice $s\mu$, soit $s\chi$, ne prenne que les valeurs 1 ou 0. On obtient alors (1) en prenant le produit scolaire de la ligne i_1 de la matrice $s\mu$ par la colonne i_n de $s'\mu$.

Nous établissons maintenant cette propriété.

I. La condition est sufissante.

Supposons que l'on ait $X = X\phi\phi^{-1}$ où ϕ est un morphisme de S dans un semi-groupe fini M. Soit Q l'ensemble des paire $(m,m') \in M \times M$ telles que $mm' \in X\phi$. C'est un ensemble fini et pour chaque $s,s' \in S$ les relations

$(ss')\chi = 1$; $ss' \in X$; $(ss')\phi = (s\phi)(s'\phi) \in X\phi$ et $(s\phi,s'\phi) \in Q$

sont équivalentes.

Pour chaque $q = (m,m') \in Q$ nous considérons maintenant la fonction caractéristique λ_q(resp. ρ_q) de la partie $m\phi^{-1}$ (resp. $m'\phi^{-1}$) de S. Si s et s' sont deux éléments quelconques de S, le produit $(s\lambda_q)(s'\rho_q)$ est égal à s si

$(s\phi,s'\phi) = q$ et à 0, sinon. Par conséquent la somme finie

$\sum_{q \in Q} (s\lambda_q)(s'\rho_q)$ est égale a 1 ou 0 selon que $ss' \in X$ ou non, ce qui établit le résultat cherché.

Q.E.D.

II. La condition est nécessaire.

Nous considérons le cas un peu plus général où sont données deux familles $\{\lambda_q\}$, $\{\rho_q\}$ d'applications de S dans K indexées par les éléments d'un ensemble fini Q et une application χ satisfaisant la condition que l'identité (1) soit vraie et que l'image $\{s\chi : s \in S\}$ de χ soit une partie finie du corps K.

Nous nous proposons de vérifier que chaque partie donnée J de I définit une partie reconnaissable.

$$X_J = J_\chi^{-1} = \{s \in S : s\chi \in J\}$$

de S.

Nous commençons par trois remarques introduisant des hypothèses supplémentaires qui allègent la preuve proprement dite.

(1). S est un semi-groupe infini et $X = X_J$ n'est ni vide ni égal à S.

Preuve: En effet, dans le cas contraire, le résultat est déjà établi car, par définition, toute partie X d'un semi-groupe fini est reconnaissable et la partie $X = \emptyset$ ou $X = S$ de tout semi-groupe S est une partie reconnaissable de ce dernier.

Q.E.D.

(2). J est le singleton formé de l'élement unité 1 de corps K. De plus il n'existe aucun $q \in Q$ pour lequel λ_q ou ρ_q soit identiquement nulle.

Preuve: Toute partie X de S est reconnaissable en même temps que son complément $S\setminus X$. On peut donc supposer $0 \notin J$ en remplaçant au besoin J par son complément dans l'image I de χ puisque cette dernière est supposée être finie.

D'autre part, si pour chaque $k \in J$, il existe un morphisme ϕ_k de S d'image finie tel que $X_k\, \phi_k\, \phi_k^{-1}$ où $X_k = k_\chi^{-1}$, on a $X\phi\phi^{-1} = X$ ou ϕ est le morphisme évident de S dans le produit direct des semi-groupes S_{ϕ_k}. Il suffit donc d'établir que chaque X_k est reconnaissable. On se ramène au cas où $k = 1$ en remplaçant chaque ρ_q par $\rho_q{}^{k-1}$ et χ par χ^{k-1}.

Enfin si λ_q ou ρ_q était identiquement nulle, il en serait de même de chaque terme $s_q.s'_q$ dans (x) et celui-ci pourrait être omis.

Q.E.D.

Nous supposons donc désormais $\{1\} = J \subset I$

(3). S est un monoïde.

Preuve: S'il n'est est pas ainsi, nous adjoignons à S un nouvel élément neutre 1, obtenant ainsi un monoïde $\bar{S} = \{1\} \cup S$.

Nous définissons $1\lambda_q = 1\rho_q = 0$ pour chaque $q \in Q$. Nous ajoutons aussi deux nouveaux éléments r et r' à Q et nous définissons les applications $\lambda_r = \rho_{r'}$ et $\lambda_{r'} = \rho_r$ comme étant respectivement les fonctions caractéristiques des parties

X et $\{1\}$ de $\bar{S}$. on a donc que pour chaque $s,s' \in S$ le nouveau terme $(s\lambda_r)(s'\rho_r) + (s\lambda_{r'})(s'\rho_{r'})$ de la somme est égal à 1 ou à 0 selon que (s,s') appartient ou non à l'union de $X \times \{1\}$ et de $\{1\} \times X$, ce qui montre que l'identité (1) (et les autres hypothèses) sont encore satisfaites.

Il est clair que X est reconnaissable à la fois comme partie de $\bar{S}$ et comme partie de S. En effet si $X\phi\phi^{-1} = X$ où ϕ est un morphisme d'image finie du monoïde $\bar{S}$, on a aussi $X\Psi\Psi^{-1} = X$ où Ψ est la restriction de ϕ à S puisque, par construction, le nouvel élément 1 n'appartient pas à X

Q.E.D.

Nous en venons maintenant à la preuve que X est reconnaissable. Nous désignons par $s\lambda$ (resp. $s\rho$) pour chaque $s \in S$, le Q-vecteur ligne (resp. colonne) dont les coordonnées sont les $s\lambda_q$(resp. $s\rho_q$) ce qui fait que le membre de droite de (1) est simplement le produit scalaire $s\lambda.s'\rho$.

Soit $d(\leq \mathrm{Card}(Q))$ la dimension du K-module R sous-tendu par tous les vecteurs $s\rho(s \in S)$. On peut trouver une partie T de d élément de S et une $Q\times Q$ matrice inversible M tels que, posant $s\lambda' = s\lambda.M^{-1}$ $s\rho' = M.s\rho(s \in S)$ les vecteurs $t\rho'(t \in T)$ forment une base de R constituée de vecteurs ayant toutes leurs coordonnées nulles sauf une égale à 1.

On a identiquement $s\lambda.s'\rho = s\lambda'.s'\rho'$ et nous pourrons donc désormais supposer que $\lambda = \lambda', \rho = \rho'$.

D'après l'hypothèse (2), on a donc $d = \mathrm{Card}(Q)$. En raison de notre choix des vecteurs $t\rho(t \in T)$, l'hypothèse que $s\lambda.t\rho$soit identiquement contenu dans la partie I de K implique que toutes les coordonnées non nulles des vecteurs $s\lambda$ $(s \in S)$ soient aussi dans I.

Nous en concluons que la relation d'équivalence $\approx$ sur S définie par $\lambda^{-1}(s_1 \approx s_2$ ssi $s_1\lambda = s_2\lambda)$ n'a qu'un nombre <u>fini</u> ($\leq(1+\mathrm{Card}(I))^d$) de classes.

Posons $X_k = k_X^{-1}$ et $s^{-1}X_k = \{s' \in S \; ; \; ss' \in X_k\}$ pour chaque $k \in I$ et $s \in S$ et désignons par $\sim$ la relation d'équivalence sur S définie par $s_1 \sim s_2$ ssi $s_1^{-1} X_k = s_2^{-1} X_k$ pour chaque $K \in I$. Il est clair que $s_1 \approx s_2$ implique $s_1 \sim s_2$ et que, réciproquement, d'apres notre choix de vecteurs t $(t \in T)$ on ne peut avoir

$s_1 \approx s_2$ que si $s_1 \sim s_2$.

De plus, chaque X_k est une union de $\sim$ - classes puisque, S étant un monoïde, on a:

$$X_k = \{ s \in S : 1 \in s^{-1} X_k \}$$

Ceci permettrait d'achever la preuve en utilisant la Proposition 12.1 de [1]. Par souci d'être complet, nous en reproduisons la partie pertinente.

Soient $s, s_1, s_2 \in s_2 \in S$, $k \in I$ tels que $s_1^{-1} X_k = s_2^{-1} X_k$. L'ensemble $(s_1 s)^{-1} X_k$ est égal à $s^{-1}(s_1^{-1} X)$ puisque $1 \in S$, et il est par conséquent égal à $(s_2 s)^{-1} X_k$ ce qui montre que l'équivalence $\sim = \approx$ admet la multiplication à droite.

Il existe donc un morphisme ϕ de S dans le monoïde fini des applications dans lui-même de l'ensemble $S/\sim$ qui est en bijection avec $\{s\lambda : s \in S\}$. Comme S est un monoïde, on a $Y_{\phi\phi}{}^{-1} = Y$ pour chaque $\sim$ - classe ou union de $\sim$ - classes $Y \subset S$. Donc en particulier $X = X\phi\phi^{-1}$ est reconnaissable.

Q.E.D.

REFERENCES:

[1] S. Eilenberg. Automata, languages and machines. (vol A). Academie Press. New-York 1974.

[2] M. Fliess (1974). Matrices de Hankel. J.Math. Pures et Appli. 53 pp. 197-222.