Reprinted from ADVANCES IN MATHEMATICS
Vol. 24, No. 3, June 1977

Une Propriété de Hankel des Relations Fonctionnelles entre Monoïdes Libres

M. P. SCHÜTZENBERGER

Department of Mathematics, Université de Paris VII, 2 Place Jussieu, 75016 Paris V, France

EN MÉMOIRE DE N. LEVINSON

1. INTRODUCTION

La théorie des automates et, plus précisément, le théorème de Kleene ont montré que la notion de *rationalité* était susceptible d'interprétations non commutatives au delà du cadre classique de la théorie des fonctions. Nous faisons référence au volume A du Traité de S.E. Eilenberg [1] pour un exposé définitif des méthodes et des résultats et leur historique. Le présent travail s'insère dans cette perspective et son résultat principal est une variante du théorème de Hankel relative à l'étude des relations fonctionnelles (= application partielles) d'un monoïde libre A^* dans un autre, B^*(cf. [1], chap. IX et XI).

Rappelons que sous sa forme classique le théorème de Hankel caractérise une série rationnelle $r(x) = \sum r_n x^n$ par la condition que la $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-matrice H telle que $H(n, m) = r_{n+m}$, identiquement, ait un rang fini. Ceci revient à définir la rationalité de la série formelle $\sum r_n x^n$ par l'existence d'une relation de récurrence linéaire constante entre les coefficients r_n, c'est-à-dire encore par la possibilité d'exprimer ceux-ci par la projection sur l'anneau des coefficients des puissances $(x\mu)^n$ d'une matrice $x\mu$ de dimension finie; il est commode de prendre par projecteur le produit de $(x\mu)^n$ par deux vecteurs fixes v et v' et l'on a alors formellement:

$$r(x) = \sum r_n x^n = \sum v \cdot (x\mu)^n \cdot v' \cdot x^n = v \cdot (1 - x\mu \cdot x)^{-1} \cdot v'.$$

De façon équivalente, introduisant les vecteurs $x^n\lambda = v \cdot (x\mu)^n$ et $x^m\rho = (x\mu)^m \cdot v'$, on voit que chaque entrée $H(n, m)$ de la matrice de Hankel H est égale au produit scalaire $x^n\lambda \cdot x^m\rho = r_{n+m}$.

Cette définition de la rationalité $r(x)$ conduit immédiatement à une double généralisation:

(a) d'une part on peut prendre les entrées de la matrice $x\mu$ et des vecteurs v et v', donc des vecteurs $x^n\lambda$, $x^m\rho$ et les coefficients r_n eux-même, dans un semi-anneau quelconque S;

(b) d'autre part, on peut remplacer la variable unique x et ses puissances successives x^n par un ensemble (fini) A et les mots du monoïde libre A^* qu'il engendre.

ISSN 0001-8708

Les coefficients r_n deviennent alors une fonction α de A^* dans S et l'on considère la série formelle $\sum \{a\alpha \cdot a \colon a \in A^*\}$. En conformité avec le cas d'une variable unique, cette série sera dite *rationelle* (sur S) ssi il existe un morphisme μ de A^* dans un monoïde de matrices de *dimension finie* à entrées dans S et deux vecteurs fixes v et v' tels que $a\alpha = v \cdot a\mu \cdot v'$ pour chaque mot a de A^*; le triple (μ, v, v') est appelé un *transducteur* pour α par M. Nivat(3); comme ci-dessus on a $\sum \{a\alpha \cdot a\} = v \cdot (1 - M)^{-1} \cdot v'$ où $M = \sum \{a\mu \cdot a : a \in A\}$. Cette présentation n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une construction abstraite plus générale développée par Elgot et Mezei (2). Elle a pour nous l'avantage de s'interpréter directement du point de vue de Hankel. En effet, on peut associer à l'application α de A^* dans S la $A^* \times A^*$-matrice H dont chaque entrée $H(a, a')$ est égale au coefficient $(aa')\,\alpha = v \cdot (aa')\,\mu \cdot v'$ du mot a et, introduisant comme précédemment les vecteurs $a\lambda = v \cdot a\mu$ et $a'\rho = a'\mu \cdot v'$ de même dimension *finie* d que μ, on a identiquement $H(a, a') = a\lambda \cdot a'\rho$. Par conséquent la matrice de Hankel H est de rang fini puisqu'elle est le produit $H_\lambda' \cdot H_\rho'$ de la $A^* \times d$-matrice H_λ' dont les lignes sont les vecteurs $a\lambda$ par la $d \times A^*$-matrice H_ρ' dont les colonnes sont les $a\rho$. De façon plus rapide, on vient donc de montrer que quand l'application α est définie par un transducteur, elle admet ce que nous appelerons une *factorisation* c'est-à-dire une paire de fonctions vectorielles (λ, ρ) de dimension finie satisfaisant l'identité:

(1) $(aa')\,\alpha = a\lambda \cdot a'\rho$ pour tous les mots a, a' de A^*;

qui permet l'existence de la matrice de Hankel.

Il est clair que la condition essentielle est la finitude de la dimension puisque l'on peut toujours (trivialement) associer à n'importe quel α une paire d'applications(λ, ρ) dans les A^*-vecteurs satisfaisant l'identité (1).

Ceci constitue la partie directe du théorème de Hankel pour α et elle n'est donc ici que la simple conséquence de la définition adoptée pour la rationalité de la série formelle $\sum a\alpha \cdot a$. Reste la partie réciproque qui consisterait à établir que α est définie par un transducteur quand $\alpha \colon A^* \to S$ est une application donnée admettant une factorisation. Nous donnons une réponse positive dans le cas très particulier où α est une relation fonctionnelle entre A^* et un autre monoïde libre B^*; le semi-anneau S étant alors le semi-anneau booléen des parties de B^* et α une application de A^* dans S telle que, pour chaque mot a de A^*, $a\alpha$ est soit un mot de la base B^* de S, soit la partie vide, qui est le zéro, 0, de S. Ce cas correspond à celui des *bimachines* de S. Eilenberg ([1, chap. XI, sect. 7]). Les méthodes linéaires du cas classique (qui sont exclues par le caractère booléen de S) sont remplacées par les méthodes de [1, Proposition 12.3, chap. III, et Théorème 4.2, chap. XII] dont l'usage est rendu possible par l'hypothèse initiale que α est une fonction (= application partielle) de A^* dans B^*. Cette même hypothèse permet de supposer que tous les vecteurs $a\lambda$ et $a\rho$ de la factorisation (λ, ρ) de α ont leurs coordonnées non nulles dans B^*; de fait on supposera même seulement (par commodité) que ces coordonnées sont des éléments du groupe libre $B^{(*)}$ engendré par le même ensemble B que le monoïde B^*. L'hypothèse que A^* est finiment engendré ne sera pas utilisée. Le résultat principal de ce travail est donc la:

PROPRIÉTÉ. *Soit* $\alpha: A^* \to B^*$ *une fonction. Une condition suffisante* (*et nécessaire*) *pour quelle soit définie par un transducteur est qu'elle admette une factorisation* (λ, ρ) *dont les vecteurs ont leurs coordonnées non nulles dans le groupe libre* $B^{(*)}$.

2. VÉRIFICATION DE LA PROPRIÉTÉ

On considère une application partielle de rang finie $\alpha: A^* \to B^*$ fixe et une de ses factorisations (λ, ρ) de dimension n. On commence par vérifier que l'on peut imposer à (λ, ρ) des conditions supplémentaires (0), (2), (3), (4) en montrant pour chacune de celles-ci que si elle n'était pas remplie par (λ, ρ) on pourrait trouver une autre factorization (λ', ρ') qui la satisfasse ainsi que les conditions précédentes.

Pour chaque indice $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$ on note λ_i (resp., ρ_i) l'application envoyant chaque mot a de A^* sur la valeur de la i-ème coordonnée du vecteur $a\lambda$ (resp., $a\rho$); $L_i = \{a \in A^* : a\lambda_i \neq 0\}$ et $R_i = \{a \in A^*: a\rho_i \neq 0\}$.

Comme d'usage, le *support* d'un vecteur $v(=a\lambda$ ou $a\rho$, $a \in A^*)$ est l'ensemble noté $v\#$ des indices de ses coordonnées non nulles.

Venons en à la première condition supplémentaire.

(0) *Pour chaque* $i \in I$ *on a* $L_i \neq \varnothing$ *et* $R_i \neq \varnothing$.

Preuve. Soit $I' = \{i \in I : L_i \neq \varnothing$ et $R_i \neq \varnothing\}$. Pour chaque $i \in I \backslash I'$ et $a, a' \in A^*$ le terme $a\lambda_i \cdot a'\rho_i$ du produit scalaire $a\lambda \cdot a\rho$ est nul puisque $a\lambda_i = 0$ ou $a'\rho_i = 0$. Donc la paire (λ', ρ') où λ' et ρ' sont les restrictions à I' de λ et de ρ est encore une factorisation de α et satisfait (0). Q.E.D.

(2). *Pour tout* $a, a' \in A^*$ (resp., $i, j \in I$) *les supports* $a\rho\#$ *et* $a'\rho\#$ (resp., *les parties* R_i *et* R_j *de* A^*) *sont égaux ou disjoints.*

Preuve. L'équivalence des deux conditions énoncées est claire. En effet, chacune d'elles signifie que pour tout $a, a' \in A^*$; $i, j \in I$ les relations $a\lambda_i \neq 0$, $a\lambda_j \neq 0$, $a'\lambda_i \neq 0$ impliquent $a'\lambda_j \neq 0$.

Supposons qu'elles ne sont pas satisfaites et soit I' l'ensemble des paires de la forme (i, q) où $i \in I$ et où q est une partie de I contenant i telle que $q = a\rho\#$ pour au moins un mot a.

On définit deux applications λ' et ρ' de A^* dans les I'-vecteurs en posant pour chaque $a \in A^*$ et $i' = (i, q) \in I'$:

$$a\lambda'_{i'} = a\lambda_i \,;$$

$$a\rho'_{i'} = a\rho_i \quad \text{si} \quad a\rho\# = q; \ = 0 \text{ sinon}$$

Il est clair que I' est fini et que (λ', ρ') satisfait (0) et (2). Soient a, $a' \in A^*$. Les termes non nuls du produit scalaire $a\lambda' \cdot a'\rho'$ sont ceux de la forme $a\lambda'_{i'} \cdot a'\rho'_{i'}$ où $i' = (i, a'\rho\#)$ avec, par définition, $i \in a'\rho\#$, c'est-à-dire $a'\rho_i \neq 0$. Ils sont donc en correspondance biunivoque avec les termes non nuls de $a\lambda \cdot a'\rho$. Comme $a\lambda'_{i'} \cdot a'\rho'_{i'} = a\lambda_i \cdot a'\rho_i$ par définition pour i' et i comme ci-dessous, on a identiquement $a\lambda' \cdot a'\rho' = a\lambda \cdot a'\rho$ ce qui montre que (λ', ρ') est une factorisation de α.

Q.E.D.

(3). *Pour chaque paire f, f' de mots de A^* il existe au plus un indice $i \in I$ tel que $f\lambda_i \cdot f'\rho_i \neq 0$.*

Preuve. Supposons au contraire que les termes $x_j = f\lambda_j \cdot f'\rho_j$ et $x_k = f\lambda_k \cdot f'\rho_k$ soient non nuls pour deux indices distincts j et k. Comme x_j et x_k figurent dans le produit scalaire $f\lambda \cdot f'\lambda = (ff')\alpha$ qui d'après (1) est un mot b de B^*, on doit avoir $b = x_j = x_k$ ce qui entraîne l'existence d'un élément c du groupe $B^{(*)}$ pour lequel $f\lambda_k = f\lambda_j \cdot c$ et $f'\rho_k = c^{-1} \cdot f'\rho_j$.

On a $j, k \in f'\rho\#$ et d'après (2) l'ensemble $F = \{a \in A^* : a\rho\# = f'\rho\#\}$ contient tous les mots dont le support du vecteur ρ rencontre $\{j, k\}$. De plus si $a' \in F$ il existe un $b' \in B^*$ tel que $b' = (fa')\alpha = f\lambda \cdot a'\rho = f\lambda_j \cdot a'\rho_j = f\lambda_k \cdot a'\rho_k$ ce qui implique que $a'\rho_k = c^{-1} \cdot a'\rho_j$ avec le même c que plus haut. Autrement dit, l'ensemble $\{a\rho_j \cdot (a\rho_k)^{-1} : a \in R_j = R_k\}$ est un élément unique, $c \in B^{(*)}$. Nous utiliserons désormais exclusivement cette condition sur les indices j et k et nous notons qu'elle implique que si $a \in A^*$ et $a\lambda_k \neq 0$ on a $a\lambda_k \cdot a'\rho_k = a\lambda_k \cdot c \cdot a'\rho_j$ pour chaque $a' \in R_j = R_k$.

Soient maintenant ρ' la restriction de ρ à $I' = I \backslash k$ et λ' l'application de A^* dans les I'-vecteurs telle que pour chaque $a \in A^*$ et $i \in I'$ on ait $a\lambda_i' = a\lambda_k \cdot c$ si $i = j$ et $a\lambda_k \neq 0$ et $a\lambda_i' = a\lambda_i$ dans tous les autres cas. Les remarques précédentes montrent que (λ', ρ') est une factorisation de α et on vérifie facilement qu'elle remplit les conditions (0) et (2). Le résultat en découle par induction sur Card I.

Q.E.D.

(4) *Si j et k sont deux indices distincts pour lesquels $R_j = R_k$, l'ensemble $G_{jk} = \{a\rho_j \cdot (a\rho_k)^{-1} \in B^{(*)} : a \in R_j = R_k\}$ est infini.*

Preuve. Notons $M(\lambda, \rho)$ l'ensemble des paires d'indices distincts j, k pour lesquels G_{jk} est fini, $M_1(\lambda, \rho)$ le nombre de celles pour lesquelles G_{jk} est un singolet et $M_2(\lambda, \rho) = \text{Card } M(\lambda, \rho) - M_1(\lambda, \rho)$. On vérifie facilement que quand Card $G_{jk} = 1$ la transformation $(\lambda, \rho) \to (\lambda', \rho')$ par restriction à $I \backslash k$ décrite dans la preuve précédente a la propriété que $M_1(\lambda', \rho') < M_1(\lambda, \rho)$ et $M_2(\lambda', \rho') \leqslant M_2(\lambda, \rho)$.

Il suffit donc, par induction, de construire une autre transformation $(\lambda, \rho) \to (\lambda', \rho')$(entre factorisations de α) pour laquelle $M_2(\lambda', \rho')$ est strictement moindre que $M_2(\lambda, \rho)$(au prix d'un accroissement éventuel de M_1). C'est ce que nous faisons maintenant en supposant que $M_1(\lambda, \rho) = 0$ ainsi qu'il est loisible d'après ce qui précède.

Soit (j_1, k_1) une paire fixe dans $M(\lambda, \rho)$. Par hypothèse $R_{j1} = R_{k1}(=R)$ et il existe donc une partie K de I contenant ces deux indices telle que $R = \{a \in A^* : a\rho \# = K\}$.

Notons E l'union de la restriction à K de la relation binaire $M(\lambda, \rho)$ sur I et de la diagonale de K, c'est-à-dire de $\{(k, k): k \in K\}$. Comme $\mathrm{Card}(G_{ik}) \leqslant \mathrm{Card}(G_{ij}) \times \mathrm{Card}(G_j k)$ pour tout $i, j, k \in K$, la relation E est une équivalence sur R et nous pouvons en choisir une section $\bar{K} \subset K$.

Pour chaque a de R soit $a\gamma$ le K-vecteur tel que pour chaque $j \in K$, sa coordonnée $a\gamma_j$ soit égale à l'élément $a\rho_j \cdot a\rho_k^{-1}$ de $B^{(*)}$ où $k = k_j$ est l'unique élément de la section $\bar{K}$ qui appartienne à la même classe de E que j.

L'ensemble $C = \{a\gamma : a \in R\}$ est fini, par définition, puisque E est une équivalence.

Soit maintenant I' l'union des ensembles $I \backslash K$ et $K \times C$. Pour chaque mot a de A^*, on définit les I'-vecteurs $a\lambda'$ et $a\rho'$ par les conditions suivantes:

$a\lambda'_{i'} = a\lambda_{i'}$ et $a\rho'_{i'} = a\rho_{i'}$ si $i' \in I \backslash K$; et pour $i' = (k, c) \in K \times C$: $a\lambda'_{i'} = a\lambda_k$; $a\rho'_{i'} = a\rho_k$ si $a\gamma = c$ et $= 0$ sinon.

La vérification que (λ', ρ') est encore une factorisation de α satisfaisant (0), (2) et (3) est immédiate et peut être omise. La contribution à $M_2(\lambda', \rho')$ des paires $j', k' \in I \backslash K$ est la même que pour (λ, ρ) et, par construction, celle des paires dans $K \times C$ est nulle. Donc $M_2(\lambda', \rho')$ est strictement moindre que $M(\lambda, \rho)$. Q.E.D.

(5). *Il existe un morphisme μ de A^* dans un monoide de $I \times I$-matrices à entrées dans $B^{(*)} \cup 0$ tel que $a\lambda = 1\lambda \cdot a\mu$ pour chaque mot a.*

Preuve. Soit Q l'ensemble des supports des vecteurs $a\lambda (a \in A^*)$. D'après (0) et (2) on peut choisir une partie minimale fixe S de A^* telle que $\{s\rho\# : s \in S\}$ forme une partition de I.

(5.1.). Soit maintenant $a \in A^*$ donné. Nous montrons d'abord qu'il existe une application partielle $q \to q \cdot a$ de Q dans lui-même telle que $(fa)\,\lambda\# = q \cdot a$ pour chaque $q \in Q$ et $f \in F_q = \{f' \in A^* : f'\lambda\# = q\}$. Soient donc $q \in Q$, $f \in F_q$ et supposons pour commencer que $(fa)\,\lambda\#$ contient un indice j.

D'après (0) on peut prendre un mot $g \in S \cap R_j$ et l'on a $(fag)\,\alpha = (fa)\,\lambda j \cdot g\rho_j = b$ pour un certain mot b de B^*. Comme (λ, ρ) est une factorisation de α on a aussi $b = f\lambda \cdot (ag)\rho$ donc d'après (3) $b = f\lambda_i \cdot (ag)\,\rho_i$ pour un indice unique i.

Prenons un autre mot $f' \in F_q$. L'indice i appartient à q et l'on a donc $f'\lambda_i \cdot (ag)\,\rho_i = b' \in B^*$. Appliquant de nouveau (3) on obtient un indice unique k tel que $b' = (f'ag)\,\alpha = (f'a)\,\lambda_k \cdot g\rho_k$.

Les équations qui viennent d'être écrites donnent:

$$g\rho_j = (fa)\,\lambda_j^{-1} \cdot f\lambda_i \cdot (ag)\,\rho_i\ (\neq 0);$$

$$g\rho_k = (f'a)\,\lambda_k^{-1} \cdot f'\lambda_i \cdot (ag)\,\rho_i\ (\neq 0).$$

Par conséquent $g\rho_j \cdot g\rho^{-1}$ est égal au produit:

$$\rho_i = (fa)\,\lambda_j^{-1} \cdot f\lambda_i \cdot f'\lambda_i^{-1} \cdot (f'a)\,\lambda_k\,.$$

De plus $j,\ k \in g\rho\#$ ce qui implique $R_j = R_h$ d'après (2).

Gardant f et f', soit g' un autre mot de R_j. Le même raisonnement que ci-dessus donne un indice i' et une équation:

$$f\lambda_{i'} \cdot (ag')\,\rho_{i'} = (fa)\,\lambda_j \cdot g'\rho_j \neq 0.$$

Comme k (resp. i') appartient d'après (2) au support commun de $g\rho$ et $g'\rho$ (resp. $f\lambda$ et $f'\lambda$) on a aussi l'équation:

$$f'\lambda_{i'} \cdot (ag')\,\rho_{i'} = (f'a)\,\lambda_k \cdot g'\rho_k \neq 0.$$

On en déduit que $g'\rho_j \cdot g'\rho_k^{-1}$ est égal au produit $p_{i'}$ obtenu en remplaçant par i' l'indice i dans l'expression de p_i.

Donc l'ensemble $G_{jk} = \{g''\rho_j \cdot g''\rho_k^{-1} : g'' \in R_j = R_h\}$ contient au plus Card I éléments. Comme I est fini, la condition (4) montre que l'on doit avoir $j = k$. Ceci établit l'assertion annoncée.

(5.2.). Revenant aux calculs précédents, on voit que (S étant fixée) l'indice i ne dépend que de a, j et q. L'équation $b = (fa)\,\lambda_j \cdot g\rho_j = f\lambda_i \cdot (ag)\,\rho_i$ montre que, de même, le rapport:

$$f\lambda_i^{-1} \cdot (fa)\,\lambda_j = (ag)\,\rho_i \cdot g\rho_j^{-1}\ (= x_{ji})$$

est indépendant du choix de f dans F_q. On peut donc définir une $q \times q \cdot a$—matrice notée am_q ayant une et une seule entrée non nulle ($= x_{ji}$) dans chaque colonne qui satisfasse identiquement $(fa)\,\lambda = f\lambda \cdot am_q$ pour chaque $f \in F_q$.

(5.3.). Posons $I' = Q \times I$ et pour chaque mot a définissons la $I' \times I'$ matrice $a\mu$ par la condition que pour tout $q,\ q' \in Q$ son bloc (q, q') soit la matrice nulle si $q' \neq qa$ et sinon qu'il soit la matrice am_q qui vient d'être écrite. Par construction toutes les entrées non nulles de $a\mu$ sont dans $B^{(*)}$ et on vérifie directement que $(aa')\,\mu = a\mu \cdot a'\mu$ pour tout $a,\ a' \in A^*$. On vérifie de même que l'on a identiquement $a\lambda' = 1\lambda' \cdot a\mu$ où $a\lambda'$ est le I'-vecteur tel que $a\lambda'_{(q,i)} = a\lambda_i$ ou 0 selon que $q = a\lambda\#$ ou non.

Enfin, d'après (3) il correspond à chaque $q \in Q$ un indice unique $i = i_q$ pour lequel $f\lambda_i \cdot 1\rho_i \neq 0$ quand $f \in F_q$. On définit les I'-vecteurs $a\rho'$ par $a\rho' = a\mu \cdot 1\rho(a \in A^*\backslash 1)$ et $1\rho'_{(q,i)} = 1\rho_i$ ou $= 0$ selon que $i = i_q$ ou non.

On a donc identiquement:

$$\begin{aligned}(aa')\,\alpha &= (aa')\,\lambda \cdot 1\rho = (aa')\,\lambda' \quad 1\rho' = 1\lambda' \cdot (aa')\,\mu \cdot 1\rho' \\ &= 1\lambda' \cdot a\mu \cdot a'\mu \cdot 1\rho' = a\lambda' \cdot a'\rho'\end{aligned}$$

ce qui montre que (λ', ρ') est une factorisation de α. Il suffit de la substituer à (λ, ρ) pour satisfaire (5). Q.E.D.

La construction précédente ne conserve que les conditions (0) et (3). Nous supposerons donc désormais que (λ, ρ) satisfait (0), (3) et (5), et nous faisons enfin jouer l'hypothèse que l'image de α appartient au sous-monoïde B^* du groupe $B^{(*)}$.

(6). *Pour chaque indice i de I l'ensemble* $L_i\lambda_i (= \{a\lambda_i : a \in L_i\})$ *est contenue dans* B^* *et ses mots n'ont pas de facteur droit commun non trivial (c'est-à-dire dans* BB^**).*

Preuve. Par induction sur le nombre des indices pour lesquels (6) n'est pas remplie en remplaçant la factorisation (λ, ρ) par une factorisation $(\lambda\delta, \delta^{-1}\rho)$ où δ est une certain $I \times I$ matrice diagonale dont les entrées non nulles sont dans $B^{(*)}$ et au plus une de ces dernières est différente de 1. Il est clair qu'une telle transformation préserve (0), (3) et (5). Soit donc $i \in I$ fixe.

Prenons un mot $g \in R_i$ quelconque et soit d le plus long facteur droit commun (dans B^*) des mots de $(L_i g)\alpha$. On définit la matrice δ par $\delta_{ii} = (g\rho_i)^{-1} d$ et on effectue la transformation correspondante. Ceci permet de supposer désormais $g\rho_i = d$. On a $(ag)\alpha = a\lambda_i \cdot d \in B^*$ pour tout $a \in L_i$. Donc, d'après le choix fait de d, tous les $a\lambda_i$ sont des mots de B^* et ils n'ont pas de facteur droit commun dans $BB^* = B^*\backslash 1$. Q.E.D.

Fin de la vérification de la Propriété

Il reste seulement à montrer que si $a \in A^*$, $i, j \in I$ et $a\mu(i, j) = c \in B^{(*)}$, on a bien $c \in B^*$. Soit donc $f \in L_i$. On a $f\lambda_i \cdot c = (fa)\lambda_j$ où $f\lambda_i$ et $(cfa)\lambda_j$ sont des mots de B^* d'après la première partie de (6). La seconde partie de cette même condition montre que, ou bien $L_i\lambda_i$ est un mot unique qui est nécessairement 1, auquel cas $c = (fa)\lambda_j \in B^*$, ou bien il existe un autre mot $f' \in L_i$ tel que $f\lambda_i = b$ et $f'\lambda_i = b'$ ne se terminent pas par la même lettre de B. Dans ce second cas, supposant c écrit sous forme réduite, l'un au moins des deux produits $f\lambda_i \cdot c$ et $f'\lambda_i \cdot c$ est aussi sous forme réduite. Comme ces produits sont égaux respectivement aux mots $(fa)\lambda_j$ et $(f'a)\lambda_j$ de B^* ceci implique que $c \in B^*$ et achève la preuve de la propriété. Q.E.D.

References

1. S. Eilenberg, "Automata Languages and Machines," Vol. A, Academic Press, New York, 1975.
2. C. C. Elgot et G. Mezei, "On relations defined by generalised finite automata," *IBM J. Res. Develop.* **9** (1965), 47–65.
3. M. Nivat, "Transduction des langages de Chomsky," *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **18** (1968), 339–455.

Printed by the St Catherine Press Ltd., Tempelhof 37, Bruges, Belgium