Theoretical Computer Science 4 (1977) 47–57.

SUR UNE VARIANTE DES FONCTIONS SEQUENTIELLES

M.P. SCHÜTZENBERGER
Université de Paris VII, Paris et I.R.I.A., Rocquencourt, France

Communiqué par M. Nivat
Reçu en juillet 1976

1. Introduction

Nous faisons référence aux Chapitres XI et XII du Traité de Eilenberg [1] pour la définition et la Théorie des fonctions (partielles) rationnelles et séquentielles généralisées d'un monoïde libre dans un autre. Nous nous proposons de montrer ici qu'au prix d'une perte de simplicité dans leur formulation certaines parties des théorèmes classiques de Ginsburg et Rose [3] et de Eilenberg s'appliquent à une famille un peu différente que nous appellerons famille des fonctions *sous-séquentielles* (sSq).

Dans ce qui suit A^* et B^* sont les monoïdes libres engendrés par les ensembles A et B ; B^* est considéré comme un sous-monoïde du groupe libre $B^{(*)}$ (engendré par B) et 0 est le zéro de l'algèbre de $B^{(*)}$ sur $\mathbf{Z}$. Si X est une partie de A^*, on appellera pour abréger *fonction de* X toute application de X dans l'union de B^* et de 0 et on notera $\mathbf{0}$ n'importe quelle function dont l'image est 0.

Soit, dorénavant, $k \geq 0$ un entier naturel fixe. Pour chaque $n \geq 0$ on désigne par F_n l'ensemble $A^kA^* \setminus A^{k+n+1}A^*$ des mots de A^* dont la longueur est comprise entre k et $k+n$. La famille sSq est l'union sur tous les *n finis* des sous-familles sSq(n) des *fonctions sous-séquentielles* de *dimension au plus n* dont la définition est la suivante:

Définition. sSq(n) est la famille des fonctions α de A^kA^* telles qu'il existe une fonction β de A^* et une application $a \to \rho_a$ de A^* dans l'union de $\mathbf{0}$ et d'un ensemble R de n fonctions ρ ($\neq \mathbf{0}$) de F_n satisfaisant l'identité:

$$(af)\alpha = a\beta \cdot f\rho_a \qquad (a \in A^*, \quad f \in F_n). \tag{1}$$

Par conséquent sSq(0) se réduit à $\mathbf{0}$, et on supposera désormais que n est positif. Le Théorème 4.2. du Chapitre XII de [1] montre que les hypothèses de cette dèfinition sont satisfaites (avec $k = 0$, $\beta = \alpha$ et n assez grand) par n'importe quelle fonction séquentielle généralisée ("generalized sequential partial function") et donne une réciproque remarquable de cette propriété.

La motivation pour envisager la possibilité que α et β soient différentes provient du cas des fonctions ayant un domaine fini, des restrictions de fonctions séquentielles généralisées à un domaine (reconnaissable) arbitraire ou de l'exemple 8.2. du Chapitre XI de [1].

Les résultats principaux sont les Propriétés 2 et 3 qui constituent des adaptations au cas sous-séquentiel d'une partie des Théorèmes classiques de Ginsburg et Rose [4]. La Propriété 1 situe ces fonctions parmi les fonctions définies par des transducteurs finis au sens de Nivat [7].

2. Une autre définition

Nous commençons par construire certaines fonctions de A^kA^* ($k \geq 0$, fixe) dont la Propriété 1 à la fin de cette section établit l'équivalence avec les fonctions sous-séquentielles.

Soit Q un ensemble fini (non vide). Un *Q-transducteur sous-séquentiel* est un triple $(\mu, 1\lambda, v)$ où:

μ est un morphisme du monoïde A^* dans un monoïde de $Q \times Q$-matrices ayant leurs entrées dans $B^* \cup 0$ et au plus une entrée non nulle par ligne;

1λ est un Q-vecteur ligne à coordonnées dans $B^* \cup 0$ ayant exactement une coordonnée non nulle;

v est une application de $F_0 = A^k$ dans les Q-vecteurs colonnes à coordonnées dans $B^* \cup 0$.

Les conditions sur μ signifient que ce morphisme est monomial et impliquent que pour chaque mot a le vecteur $a\lambda = 1\lambda.\ a\mu$ ait au plus une coordonnée non nulle, qui est alors un mot de B^*. Il en résulte que le transducteur (μ, λ, v) définit une fonction α de A^kA^* par l'identité:

$$(af)\alpha = 1\lambda \cdot a\mu \cdot fv \qquad (a \in A^*, f \in F_0). \tag{2}$$

Evidemment on retrouve (pour A et B finis) les machines séquentielles généralisées classiques en prenant $k = 0$ (donc $F = \{1\}$), pour 1λ le Q-vecteur ayant une coordonnée égale à 1 et les autres à 0 et pour $1v$ le Q-vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

2.1. *La fonction α définie par le Q-transducteur sous-séquentiel (μ, λ, v) est sous-séquentielle de dimension au plus* Card Q.

Preuve. Pour chaque mot a de A^* on note $a\beta$ et q_a la valeur de la coordonnée non nulle du vecteur $a\lambda$ et son indice si ce vecteur n'est pas nul; sinon $a\beta = 0$ et $q_a = \mathbf{0}$. On étend maintenant v à une fonction de A^hA^* en posant $(af)v = a\mu \cdot fv$ ($a \in A^*, f \in F_0$) et on convient que chaque q désigne la fonction de A^hA^* égale à la valeur de la coordonnée q du vecteur fv ($f \in A^kA^*$). On a donc identiquement:

$$(af)\alpha = a\lambda \cdot fv = a\beta \cdot fq_a$$

pour tout $a \in A^*$, $f \in A^h A^*$, donc, en particulier, pour tout $a \in A^*$, $f \in F_n$ $(= A^h A^* \setminus A^{h+n+1} A^*)$ ce qui achève la vérification. □

Notre objectif est d'établir une réciproque de cet énoncé (Propriété 1 cidessous). Afin de ne pas trop restreindre la généralité, nous considérons une partie G de A^* contenant tous les mots de longueur au plus $2n$ et les facteurs gauches de ses membres et une fonction α fixe de l'ensemble GF_n $(= \{gf \in A^*: g \in G, f \in F_n\})$.

Nous supposons qu'il existe une fonction β de G et une application $g \to \rho_g$ de G dans l'union de $\mathbf{0}$ et d'un ensemble R de n fonctions $(\neq \mathbf{0})$ de F_n telles que l'on ait:

$$(gf)\alpha = (g\beta) \cdot (f\rho_g) \qquad (g \in G, \quad f \in F_n). \tag{1}$$

Quand $G = A^*$, α est par définition une fonction sous-séquentielle de dimension $\leqslant n$. Nous supposons que n est minimum (par rapport à α) c'est-à-dire que l'on ne peut pas effectuer un autre choix de β tel que (1) soit satisfaite par un système de $n' \leqslant n$ fonctions ρ. Ceci implique évidemment que $D_\rho = \{g \in G: \rho = \rho_g\}$ soit non vide pour chaque $\rho \in R$. La donnée de α ne détermine pas complètement β et R. En particulier, d'après (1), chacune des relations $g\beta = 0$ ou $F_n\rho_g$ $(= \{f\rho_g : f \in F_n\}) = 0$ pour un mot g de G équivaut à $(gF_n)\alpha = 0$. On pourra donc supposer qu'elles sont toujours simultanément vérifiées ou non, c'est-à-dire que β et R satisfont la *première condition de normalisation*:

(0). Pour chaque $g \in G$, $g\beta = 0$ ssi $\rho_g = \mathbf{0}$.

Une second condition est la suivante:

(Min). Pour chaque $\rho \in R$, les mots de $(D_\rho)\beta$ n'ont pas de facteur droit commun dans $B^* \setminus 1$ (où D_ρ désigne comme toujours le domaine *propre* de ρ).

Supposons en effet que $b \in B^* \setminus 1$, soit un facteur droit commun de tous les mots de la forme $d\beta$ $(d \in D_\rho)$. Sans altérer la validité de (1) on peut remplacer chaque $d\beta$ par le mot $d\beta \cdot b^{-1}$ de B^* à condition de substituer à ρ la fonction, notée $b[\rho]$, envoyant chaque f sur $b \cdot (f\rho) \cdot (f \in F_n)$.

Cette notation $b[\rho]$ sera constamment utilisée dans la suite. En particulier, pour $j = 0, 1, \ldots, n$ nous désignerons par E_{n-j} la relation sur l'ensemble des fonctions de F_n telle que $(\rho, \rho') \in E_{n-j}$ ssi il existe un élément b de groupe libre $B^{(*)}$ pour lequel ρ' et $b[\rho]$ ont même restriction à F_{n-j} $(= A^h A^* \setminus A^{n+1-j} A^*)$. Comme $B^{(*)}$ est un groupe, chaque E_{n-j} est une relation d'équivalence et, par construction, les E_{n-j} forment une suite croissante. L'emploi de ces relations est dû à Eilenberg [1].

2.2. *La relation E_n se réduit à l'identité sur $R \cup \mathbf{0}$.*

Preuve. Supposons $(\rho, \sigma) \in E_n$, c'est-à-dire $\sigma = b[\rho]$ pour un $b \in B^{(*)}$.

Si $\rho = \mathbf{0}$ on a $f\sigma = b(f\rho) = 0$ pour chaque $f \in F_n$ donc $\sigma = \mathbf{0} = \rho$ et réciproquement.

Soient maintenant $\rho, \sigma \in R$ et $f \in F_n$ tels que $f\rho = r \neq 0$. On a $s = f\sigma = br$ donc $b = sr^{-1}$ où $r, s \in B^*$. Si t est le plus long facteur droit commun dans B^* de r et s, c'est-à-dire si $r = ut$, $s = vt$ où les mots u, v de B^* n'ont pas de facteur droit commun dans $B^* \setminus 1$, on a $b = vu^{-1}$ sous forme réduite. Ceci montre d'une part que $b = 1$, c'est-à-dire que $\rho = \sigma$ quand $u = v = 1$ et, d'autre part, que u (resp. v) est un facteur gauche commun des mots de $F_n\rho$ (resp. $F_n\sigma$).

Il reste donc seulement à vérifier que n ne serait pas minimal si l'on avait $u, v \neq 1$. Supposons donc $u \neq 1$. On peut substituer à ρ la fonction $\rho' = u^{-1}[\rho]$ quitte à remplacer chaque $d\beta$ par $d\beta \cdot u$ ($d \in D_\rho$) et de même pour σ. On a alors $\rho' = \sigma'$ ce qui achève la preuve. □

Nous désignons maintenant par G_1 le sous-ensemble formé des mots g de G pour lesquels gA^n est contenu dans G. Il est non vide puisque G contient tous les mots de longueur $\leq 2n \cdot R_1 = \{\rho_g : g \in G_1\}$.

2.3.0. *Soit* $\rho \in R_1 \cup \mathbf{0}$ *tel que* $F_{n-1}\rho = 0$. *On a* $\rho = \mathbf{0}$.

Preuve. Supposons au contraire $\rho \neq \mathbf{0}$, c'est-à-dire qu'il existe un mot h de F_n pour lequel $h\rho \neq 0$. Puisque $F_{n-1}\rho = 0$ on doit avoir $h \in F_n \setminus F_{n-1} = A^{k+n}$ ce qui permet de l'écrire sous la forme $h = a_1 a_2 \cdots a_n h_n = h_0$ avec $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des letters de A et $h_n \in A^k$.

Comme $\rho \in R_1$ on peut prendre un mot $d = d_0$ dans $D_\rho \cap G_1$ ce qui fait que $dh \in G$. Posons $d_i = da_1 \cdots a_i$; $\rho_i = \rho_{d_i}$ ($\rho = \rho_0$); $h_i = a_{i+1} \cdots a_n h_n$ pour $0 \leq i \leq n$.

Utilisant l'identité (1) et $d_i\, h_i = dh$ on a:

$$0 \neq d\beta \cdot h\rho = (dh)\alpha = (d_i h_i)\alpha = d_i \beta \cdot h_i \rho_i.$$

Ceci implique $d_i\beta \neq 0$ et $h_i\rho_i \neq 0$. Comme $h_i \in F_{n-i}$, on en déduit que les ρ_i appartiennent à R et satisfont $F_{n-i}\rho_i \neq 0$ pour $0 \leq i \leq n$.

Prenons maintenant $i \leq n-1$, $f \in F_{n-1-i}$ et $g = a_1 \cdots a_i\, f \in F_{n-1}$. D'après l'hypothèse $F_{n-1}\rho = 0$ on a:

$$0 = d\beta \cdot g\rho = (dg)\alpha = (d_i f)\alpha = d_i\beta \cdot f\rho_i.$$

On vient d'observer que $d_i\beta \neq 0$ et que, par conséquent, $f\rho_i = 0$. Comme ceci est vrai de tout mot f de F_{n-1-i}, on voit que $F_{n-1-i}\rho_i = 0$ $(0 \leq i \leq n-1)$.

Comparant ces relations avec les relations établies plus haut on en conclût que les ρ_i forment un système de $n+1$ fonctions *distinctes* de R ce qui contredit le fait que $\operatorname{Card} R = n$ et établit $F_n\rho = 0$, c'est-à-dire $\rho = 0$. □

2.3.1. *Soient* $\rho, \rho' \in R_1$ *et* $b \in B^{(*)}$ *tels que* ρ' *et* $b[\rho]$ *aient même restriction à* F_{n-1}. *On a* $\rho = \rho'$.

Preuve. En raison de $\rho \neq \mathbf{0}$ et de la remarque précédente on a $f\rho \neq 0$ pour au moins un $f \in F_{n-1}$. Par conséquent $b = (f\rho')(f\rho)^{-1} \in B^{(*)}$ est déterminé par les restrictions de ρ et ρ' à F_{n-1}.

Procédant de la même façon que pour 2.2.0, nous supposons que $h\rho' \neq b \cdot (h\rho)$ pour un mot h de F_n. L'énoncé étant symétrique en ρ et ρ' (puisque $B^{(*)}$ est un groupe), on peut supposer $h\rho \neq 0$ et, par conséquent, $c = (h\rho')(h\rho)^{-1}$ est un élément bien défini de $B^{(*)} \cup 0$.

Soit $h = a_1 \cdots a_n\ h_n = h_0$ comme dans la preuve précédente et, de même, $d = d_0 \in D_\rho \cap G_1$, $d' = d'_0 \in D_{\rho'} \cap G_1$, d_i; ρ_i; $d'_i = d'\ a_1 \cdots a_i$; $\rho'_i = \rho_{d'_i}$ $(0 \leq i \leq n)$; $\rho = \rho_0$; $\rho' = \rho'_0$. On a:

$$(dh)\alpha = d\beta \cdot h\rho = d_i\beta \cdot h_i\rho_i$$

$$(d'h)\alpha = d'\beta \cdot h\rho' = d'_i\beta \cdot h_i\rho'_i \qquad (0 \leq i \leq n),$$

où $d\beta, d'\beta \neq 0$ et $h\rho' = c \cdot (h\rho)$. La première série d'équations montre que les $d_i\beta$ sont différents de 0 et que les ρ_i sont dans R. La deuxième série mène à la même conclusion en ce qui concerne les $d'_i\beta$ et les ρ'_i quand $c \neq 0$, et l'on trouve alors que $h_i\rho'_i = y_i \cdot (h_i\rho_i)$ où y_i est l'élément de $B^{(*)}$ égal à $(d_i\beta)^{-1} \cdot (d'\beta) \cdot c \cdot (d\beta)^{-1} \cdot (d_i\beta)$ $(0 \leq i \leq n)$. Si au contraire $c = 0$, on a $(d'h)\alpha = 0$ donc $h_i\rho'_i = 0$ et on peut écrire la même relation en prenant tous les y_i égaux à 0 $(0 \leq i \leq n)$.

Soient maintenant $i \leq n-1$, $f \in F_{n-1-i}$, $g = a_1 \cdots a_i f \in F_{n-1}$ comme dans 2.2.0. On a:

$$(dg)\alpha = d\beta \cdot g\rho = d_i\beta \cdot f\rho_i,$$

$$(d'g)\alpha = d'\beta \cdot g\rho' = d'_i\beta \cdot f\rho'_i,$$

où ici $g\rho' = b \cdot (g\rho)$ avec $b \neq 0$.

Comme $d\beta, d'\beta \neq 0$ on a $f\rho'_i = 0$ ssi $f\rho_i = 0$. Par conséquent, quand $d'_i\beta \neq 0$, on peut écrire $f\rho'_i = x_i \cdot (f\rho_i)$ où x_i est l'élément de $B^{(*)}$ obtenu en substituant b à c dans l'expression de y_i. Si $d'_i\beta = 0$ on a $f\rho'_i = f\rho_i = 0$ et on peut prendre $x_i = 1$. Dans les deux cas x_i est indépendant du choix de f dans F_{n-1-i}.

On déduit de ce calcul que chaque paire (ρ_i, ρ'_i) appartient à la relation E_{n-1-i} pour $0 \leq i \leq n-1$ cependant que le calcul précédent avec le mot h avait montré que $(\rho_i, \rho'_i) \notin E_{n-i}$ pour les mêmes valeurs de l'indice i. De fait, dans le cas particulier où $c = 0$, on peut même être sur que $(\rho_n, \rho'_n) \notin E_0$ puisque $h_n\rho_n \neq 0 = h_n\rho'_n$.

Etant donnée la définition des équivalences E_{n-i} ceci montre que leurs restrictions E'_{n-i} à $\{\rho_i, \rho'_i\colon\ 0 \leq i \leq n\}$ forment une suite strictement croissante: $\emptyset \neq E'_n \not\subseteq E''_{n-1} \cdots \not\subseteq E'_1$ ce qui contredit Card $R \neq n$ quand $c \neq 0$ puisqu'alors toutes les fonctions ρ_i et ρ'_i sont dans R. Quand $c = 0$ ces fonctions sont dans $R \cup \mathbf{0}$ et on aboutit de la même manière à une contradiction puisque l'on a en plus l'inclusion stricte de E_1 dans E_0. Par conséquent, $\rho' = b[\rho]$ ce qui implique $\rho = \rho'$ d'après 2.2. $\square$

On pourrait résumer les deux remarques qui précèdent par l'assertion unique:

2.3.2. *La restriction de E_{n-1} à $R \cup \mathbf{0}$ est l'identité.*

Nous introduisons désormais l'hypothèse supplèmentaire que $R_1 = R$. Elle est trivialement satisfaite quand $G = A^*$ puisque dans ce cas G_1 est lui aussi égal à A^*.

2.4. *Soient $a \in A$ et $\rho \in R \cup \mathbf{0}$. Il existe une et une seule fonction σ de $R \in \mathbf{0}$, (notée $\rho \cdot a$) pour lequel $(D_\rho)_a \cap D_\sigma \neq \emptyset$. On a $\rho \cdot a = \mathbf{0}$ pour $\rho = \mathbf{0}$. Quand $\rho \cdot a \neq \mathbf{0}$, il existe un mot b de B^*, (noté $a\mu(\rho, \sigma)$), tel que $(ga)\beta = g\beta \cdot b$ pour tout $g \in D_\rho$ (tel que $ga \in G$).*

Preuve. Puisque $R_1 = R$ on peut prendre un mot g dans $D_\rho \cap G_1$. Soit $\sigma = \rho_{ga}$. Pour chaque $f \in F_{n-1}$ on a:

$$(gaf)\alpha = g\beta \cdot (af)\rho = (ga)\beta \cdot f\sigma.$$

Par conséquent, quand $(aF_{n-1})\rho = 0$ on a $F_{n-1}\sigma = 0$, d'où l'on conclut $\sigma = \mathbf{0}$ *grâce à* 2.3.0 *et* $\sigma \in R_1 = R$.

Dans le cas contraire, $\rho \neq \mathbf{0}$, $g\beta \neq 0$ et, d'après 2.3.0, on peut trouver un $f \in F_{n-1}$ pour lequel $(af)\rho \neq 0$, ce qui entraîne $f\sigma \neq 0$ et permet de définir $b = (g\beta)^{-1}((ga)\beta) = ((af)\rho)(f\sigma)^{-1} \in B^{(*)}$. La première équation montre que b ne dépend pas du choix de f dans F_{n-1} et la seconde qu'il est aussi indépendant de choix de g dans $D_\rho \cap D_\sigma a^{-1}$ ($= \{g \in D_\rho \colon ga \in D_\sigma\}$). Prenons un autre mot g' dans D_ρ et soit $\sigma' = \rho_{g'a}$. On a de même $b' = ((af)\rho)(f\sigma')^{-1} \in B^{(*)}$ et par conséquent $f\sigma' = b'b^{-1}(f\sigma)$ pour chaque $f \in F_{n-1}$ d'où l'on conclut que $\sigma' = \sigma$ d'après 2.3.1. Ceci établit l'existence de l'application $(\rho, a) \to \rho \cdot a$ et le fait que $\mathbf{0} \cdot a = \mathbf{0}$. Il nous reste à vérifier que b est bien un mot de B^*.

Tous les termes de l'équation $g\beta \cdot (af)\rho = (ga)\beta \cdot f\sigma$ sont dans B^*. Il existe donc un mot c de B^* tel que l'une des alternatives suivantes soit réalisée:

$$\text{soit } g\beta = (ga)\beta \cdot c; \quad f\sigma = c((af)\rho) \quad \text{et } b = c^{-1},$$

$$\text{soit } (ga)\beta = g\beta \cdot c; \quad (af)\rho = c(f\sigma) \quad \text{et } b = c.$$

Dans la seconde on a directement $b \in B^*$. Dans la première c est un facteur droit de tous les mots de $D_\rho\beta$ puisque D_ρ a est contenu dans D_σ ainsi qu'on vient de le voir. En vertu de l'hypothèse de normalisation (Min) faite au début de la discussion on a alors $c = 1$ ce qui montre que $b \in B^*$ dans les deux cas. □

Nous soulignons une conséquence utile pour la suite:

2.4 bis. *Pour chaque fonction ρ de R (resp. de $R \cup \mathbf{0}$), l'ensemble D_ρ contient un mot de longueur au plus $n - 1$ (resp. au plus n).*

Preuve. On vient d'établir l'existence d'une application $(R \cup \mathbf{0}) \times A \to R \cup \mathbf{0}$

satisfaisant $\mathbf{0} \cdot a = \mathbf{0}$ $(a \in A)$. Elle s'étend à une action de A^* sur $R \cup \mathbf{0}$ et par définition chaque fonction ρ de $R \cup \mathbf{0}$ a la forme $\rho = \rho_1 \cdot a$ pour au moins un mot a de A^*. La remarque résulte alors immédiatement de ce aue $\mathrm{Card}(R) \leqslant n$. □

2.5. *Il existe un R-transducteur sous-séquentiel (μ, λ, v) tel que α soit la restriction à G de la fonction définie par celui-ci.*

Preuve. C'est une conséquence directe de l'énoncé précédent. A chaque lettre a de A on associe la $R \times R$ matrice $a\mu$ dont chaque entrée (ρ, σ) est égale à $a\mu(\rho, \sigma)$ ou à 0 selon que $\sigma = \rho \cdot a$ ou non $(\rho, \sigma \in R)$. Cette application s'étend à un morphisme monomial.

Pour chaque mot a de A^* on note $a\lambda$ le R-vecteur Ligne dont la coordonnée ρ est égale à $a\beta$ si $\rho = \rho_a$ et à 0 sinon $(\rho \in R)$ avec $a\lambda = 0$ quand $a\beta = 0$. Par induction sur la longueur de a on vérifie que $a\lambda = 1\lambda \cdot a\mu$ $(a \in G)$.

Enfin on définit le R-vecteur fv $(f \in F_0)$ par la condition que sa coordonnée ρ soit $f\rho$ $(\rho \in R)$. Par définition on a identiquement

$$(gf)\alpha = g\beta \cdot f\rho_g = g\lambda \cdot fv = 1\lambda \cdot g\mu \cdot fv \quad (g \in G, f \in F_0)$$

ce qui établit le résultat. □

Compte tenu de 2.1, on a donc comme corollaire immédiat la:

Propriété 1. Les fonctions sous-séquentielles de dimension au plus n sont les fonctions définies par les Q-transducteurs sous-séquentiels où $\mathrm{Card}(Q) \leqslant n$.

Nous concluons cette section par une dernière remarque. Dans la preuve de celle-ci, étant donnée une fonction α et une partie Y de A^* on note $Y\hat{\alpha}$ le plus long facteur gauche commun des mots de $Y\alpha$ avec la convention que $Y\hat{\alpha} = 0$ quand $Y\alpha = 0$.

2.6. *Deux fonctions sous-séquentielles de dimension $\leqslant n$ ayant même restriction à F_{2n} sont égales.*

Preuve. Posons $G_0 = A^* \backslash A^{n+1}A^*$ de telle sorte que $F_{2n} = G_0F_n$. Soit α (avec ρ, μ et c comme ci-dessus) une fonction sous-séquentielle de dimension $\leqslant n$. Nous rappelons tout d'abord que l'existence d'un morphisme monomial μ et le fait que $\mathrm{Card}\, R \leqslant n$ impliquent que chaque fonction $\rho \in R$ (resp. $\in R \cup \mathbf{0}$) ait la forme ρ_g pour au moins un mot g de longueur au plus $n-1$ (resp. au plus n), ainsi qu'on l'a vu en 2.4 bis. Nous observons aussi que d'après 2.1 la fonction v dans les R-vecteurs et, par conséquent, les fonctions ρ, peuvent être étendues à des fonctions de F_n même si la dimension minimale de α est strictement moindre que n.

Définissons pour chaque $g \in G_0$ une fonction σ_g de F_n par la condition que $f\sigma_g = 0$ ou $= ((gF_n)\hat{\alpha})^{-1}((gf)\alpha)$ selon que $(gF_n)\alpha = 0$ ou non $(f \in F_n)$. Il existe des mots b_g de B^* tels que $\rho_g = b_g[\sigma_g](g \in G)$ et, posant $S = \{\sigma_g : g \in G_0\} \backslash 0$, on déduit de 2.2 et de la définition de l'équivalence E_n que celle-ci se réduit à l'identité sur $S \cup \mathbf{0}$. Il y a donc bijection entre R et S où, par construction ce dernier ensemble est complètement déterminé par la restriction de α à F_{2n}. Ceci permet de définir une application v' de F_n dans les R-vecteurs colonne par la condition que la valeur de la coordonnée ρ de fv' soit $f\sigma$ $(f \in F_n, \rho \in R)$ où $\sigma \in S \cup \mathbf{0}$ est la fonction correspondant à ρ. De fait $fv = \boldsymbol{b} \cdot fv'$ où $\boldsymbol{b}$ est la $R \times R$ matrice diagonale dont les entrées non nulles sont les mots b_g définis plus haut.

A chaque mot g de G_0 on associe aussi le R-vecteur ligne $g\lambda'$ égal à zéro si $(gF_n)\alpha = 0$ et dont, sinon, la seule coordonnée non nulle a pour indice ρ_g et est choisie de telle sorte que $g\lambda' \cdot fv' = (gf)\alpha$ $(f \in F_n)$. Ceci est possible (de façon unique) puisque de fait $g\lambda' = g\lambda \cdot \boldsymbol{b}^{-1}$.

Compte tenu de la remarque faite au début de la preuve et de la bijection entre R et S, on peut maintenant construire pour chaque lettre $a \in A$ une $R \times R$ matrice monomiale $a\mu'$ à entrées dans $B^{(*)} \cup 0$ unique qui satisfasse $(ga)\lambda' = g\lambda' \cdot a\mu'$ $(ga \in G_0)$. Par construction $a\mu' = \boldsymbol{b}^{-1}(a\mu)\boldsymbol{b}$ et l'on a donc $(af)\alpha = 1\lambda' \cdot a\mu' \cdot fv'$ pour tous les $f \in F_n$ et $a \in A^*$ ce qui achève de montrer que α est entièrement déterminée par sa restriction à F_{2n}. □

3. Connection avec les fonctions rationnelles et séquentielles

Dans toute cette section, nous supposons que les ensembles A et B sont finis.

Le premier énoncé de cette section peut être considéré comme l'application au cas particulier des fonctions sous-séquentielles d'une partie d'un théorème classique de Ginsburg et Rose [4].

La théorie de Eilenberg ([1], Chap. IX, 7), établit qu'une fonction rationnelle α est définie par un morphisme μ de A^* sur un monoïde de $Q \times Q$ matrices (Q, fini) à entrées dans $B^* \cup 0$, un Q-vecteur ligne 1λ et un Q-vecteur colonne v, ayant une coordonnée égale à 1 et les autres nulles, ces objects satisfaisant la condition que $a\alpha = 1\lambda \cdot a\mu . v \in B^* \cup 0$ pour chaque mot a de A^*. La même théorie permet de supposer que pour chaque $q \in Q$ il existe des mots $a \cdot a' \in A^*$ tels que les vecteurs $a\lambda = 1\lambda \cdot a\mu$ et $a'v = a\mu \cdot v$ aient leur coordonnée d'indice q non nulle. Soit $n = \operatorname{Card} Q = \dim(\alpha)$. On garde la notation $Y\hat{\alpha}$ introduite à la fin de la section précédente pour noter le plus long facteur gauche commun des note de $Y\alpha$. Comme d'usage $|b|$ désigne la longueur du mot b.

Propriété 2. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction rationelle α de domaine A^kA^* soit sous-séquentielle est que pour chaque mot f de $F_n = A^kA^* \backslash A^{k+n+1}A^*$ $(n = \dim \alpha)$ on ait:

$$\operatorname{Sup}\{|(af)\alpha| - |(aF_n)\hat{\alpha}| : a \in A^*\} < \infty \tag{3}$$

où $(aF_n)\,\hat{\alpha}$ désigne le plus long facteur commun gauche des mots de la forme $(af)\alpha$ $(f \in F_n)$.

Preuve. Il est immédiat que la condition (3) est nécessaire. Pour établir qu'elle est suffisante on utilise les notations introduites ci-dessus pour décrire la fonction rationnelle α et pour tout mot a on désigne par $a\beta$ le plus long facteur gauche commun des coordonnées non nulles du vecteur $a\lambda = 1\lambda \cdot a\mu$. On note $a\lambda'$ le Q-vecteur $(a\beta)^{-1}[a\lambda]$ dont chaque coordonnée $a\lambda' q$ est égale à $(a\beta)^{-1}.\ a\lambda q$ $(q \in Q)$ en convenant que $a\beta$ et $a\lambda'$ sont nuls quand $a\lambda = 0$. Enfin π désigne l'extension naturelle aux vecteurs du morphisme envoyant B^* sur le monoïde trivial $\{1\}$ et P est l'ensemble des Q-vecteurs $\{a\lambda\pi : a \in A^*\}$.

Soit $p \in P\backslash 0$ tel que $p = a\lambda\pi$ pour une infinité de mots a. Comme Card $Q = n$ on peut trouver des mots a de longueur $\leqslant 2^n - 1$ et g de longueur $\leqslant 2^n$ tels que $a\lambda\pi = (ag)\lambda\pi = p$. On a donc $(ag^m)\lambda\pi = p$ pour tout $m \geqslant 0$.

Supposons que le vecteur $(ag)\lambda'$ ne soit pas égal à $a\lambda'$ à une permutation près de ses coordonnées. Comme $(ag)\lambda = a\lambda \cdot g\mu$, il existe une puissance $g^v = h$ $(1 \leqslant v \leqslant n-1)$, deux indices distincts $q, q' \in Q$ et un mot $b \in B^*\backslash 1$ tels que $bm = (ah^m)\ \lambda'_q = a\lambda'_q \cdot b_m$ et $b'_m = (ah^m)\lambda'_{q'}$ soient pour tout $m \geqslant 0$ deux mots différents de 0 n'ayant aucun facteur gauche commun non trivial. Utilisant de nouveau Card $Q = n$, on peut trouver $f, f' \in F_n$ tels que $(ah^m f)\alpha = b_m c$, $(ah^m f')\alpha = b'_m c'$ $(c, c' \in B^*)$ ce qui montre que la condition (3) est violée.

Supposons au contraire que les hypothèses précédentes ne sont satisfaites par aucun $p \in P\backslash 0$. Chaque mot a assez long admet un facteur gauche a' de longueur $\leqslant 2^n - 1$ pour lequel $a\lambda' = a'\lambda'$. Par conséquent $a\alpha = a\beta \cdot (a'\lambda' \cdot v) = a\beta \cdot 1\rho'_a$ où $1\rho'_a \in B^*$ ne dépend que de a'. L'ensemble $R \cup \mathbf{0} = \{1\rho'_a : a \in A^*\}$ est donc un système *fini* de fonctions de $F_0 = A^k$ pour $k = 0$ ce qui établit le résultat. □

On peut noter le contre-exemple suivant dans lequel $A = \{a_1, a_2\}$ et $B = \{b\}$. Soient ϕ_1 et ϕ_2 les morphismes de A^* dans B^* définis par:

$$a_1\phi_1 = a_2\phi_2 = 1; \quad a_2\phi_1 = a_1\phi_2 = b.$$

La fonction α envoyant chaque mot g de A^* sur $g\phi_2$ ou $g\phi_1$ selon que la longueur de g est paire ou impaire est rationnelle. Quelque soit n positif on a $(gF_n)\ \hat{\alpha} = b^m$ avec $m = \operatorname{Min}\{m_1, m_2\}$ où m_i est le nombre d'occurences de a_i dans g $(i = 1, 2)$. Par conséquent pour tout $a \in A$ on voit que $(gaF_n)\hat{\alpha} \in (gF_n)\hat{\alpha}(1 \cup b)$ bien que $\hat{\alpha}$ ne soit manifestement pas une fonction rationnelle.

Nous caractérisons maintenant les fonctions séquentielles généralisées parmi les fonctions sous-séquentielles. La condition (4) de l'énoncé ci-dessous signifie que α "préserve les segments initiaux" selon la terminologie classique et il s'agit donc encore d'une variante des théorèmes connus.

Propriété 3. Soit α une fonction sous-séquentielle de dimension au plus n telle que:

$$(fa)\alpha \in 0 \cup (fa)B^* \tag{4}$$

pour tout mot f de $F_{n-1} = A^kA^* \setminus A^{k+n}A^v$ et toute lettre a de A.

Il existe une fonction séquentielle généralisée ayant même restriction que α à $A^{k+1}A^*$.

Preuve. Utilisant les notations de la section précédente, nous vérifions d'abord l'existence d'une application $(\rho, f; a) \to a\tau_{\rho,f}$ de $(R \times F_0) \times A$ dans $B^* \cup 0$ telle que l'on ait:

$$(gfa)\alpha = (gf)\alpha \cdot a\tau_{\rho,f} \quad (a \in A;\ g \in D_\rho). \tag{4.1}$$

Pour cela nous utilisons l'application $(\rho, a) \to \rho \cdot a$ (de $(R \cup \mathbf{0}) \times A$ dans $R \cup \mathbf{0}$ construite dans 2.4 et le fait déjà observé que D_ρ contient toujours au moins un mot g de longueur $\leq n-1$ $(\rho \in R)$).

En vertu de l'hypothèse (4) on a dans (4.1) soit $(gfa)\alpha = 0$ soit $(gfa)\alpha = (gf)\alpha \cdot b$ avec $(gf)\alpha \neq 0$ et $b \in B^*$. On conviendra que $b = 0$ si $(gf)\alpha = 0$. Maintenant l'identité (1) montre que $(g'f)\alpha = g'\beta \cdot f\rho$ et $(g'fa)\alpha = g'\beta \cdot (fa)\rho$ quelque soit $g' \in D_\rho$. Donc $(fa)\rho = f\rho \cdot b$ et, identiquement, $(g'fa)\alpha = (g'f)\alpha \cdot b$ $(g' \in D_\rho)$. On peut donc définir $a\tau_{\rho,f} = b$.

Soit maintenant Q l'ensemble des suites de $k+1$ fonctions de $R \cup \mathbf{0}$. Posons $q_1 = (0, 0, \ldots, \rho_1)$ et définissons une application $Q \times A \to Q$ par la condition que si $q = (\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_{k+1}})$ et $a \in A$, $q \cdot a = (\rho_{i_2}, \rho_{i_3}, \ldots, \rho_{i_{k+1}}, \rho')$ avec $\rho' = \rho_{i_{k+1}} \cdot a$ dans la notation de 2.4 si $\rho' \neq \mathbf{0}$ et sinon $q \cdot a = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$ $(= q_0)$.

Cette application s'étend à une action $Q \times A^* \to Q$. On pose $Q = \{q_1 \cdot a$: $a \in A^* \setminus A^kA^*\}$ et $Q'' = \{q_1 \cdot a : a \in A^kA^*\}$. Comme chaque $q \in Q'' \setminus q_0$ a toutes ses composantes différentes de $\mathbf{0}$ par construction on voit que les ensembles Q' et $Q'' \setminus q_0$ sont disjoints.

Pour terminer nous nous construisons une application τ de $Q \times A$ dans $B^* \cup 0$ (notée $a\tau_q$, $a \in A$, $q \in Q$) de la façon suivante:

D'abord $a\tau_q = 0$ si $q = q_0$ ou $q \notin Q' \cup Q''$ $(a \in A)$. Si $q \in Q'' \setminus q_0$, on peut écrire $q = q_1 \cdot gf$ où $g \in A^*$ et $f \in A^k$ et on pose alors $a\tau_q = a\tau_{\rho,f}$ avec $\rho = \rho_g$. Si $q = q_1 \cdot g \in Q' \setminus q_0$, on pose $a\tau_q = (ga)\alpha$ ou $= 1$ selon que $ga \in A^k$ ou $\in A^* \setminus A^kA^*$.

La théorie des fonctions séquentielles généralisées montre que les deux applications $Q \times A \to Q$ et $\tau : Q \times A \to B^* \cup 0$ définissent une telle fonction σ. On vérifie facilement par induction sur la longueur du mot a que si k est positif on a $a\sigma = 1$ ou $a\sigma = a\alpha$ selon que $|a| < k$ ou $\geq k$ et que si k est nul, on a $a\sigma = a\alpha$ pour tout $a \in A\ A^*$. $\square$

Références

[1] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines* Vol. A (Academic Press, NY, 1975).

[2] C. Elgot and J.E. Mezei, On relations defined by generalized finite automata, *IBM. J. Res.* **9** (1965) 47–68.

[3] S. Ginsburg, *An Introduction to Mathematical Machine Theory* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1962).

[4] S. Ginsburg and G.F. Rose, A characterisation of machine mappings, *Canad. J. Math.* **18** (1966) 381–388.

[5] J. Hartmanis and R.E. Stearns, *Algebraic Theory of Sequential Machines* (Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, NJ, 1966).

[6] M. Minsky, *Computation Finite and Infinite Machines* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967).

[7] M. Nivat, Transduction des languages de Aiousky, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) **18** (1968).