

Combinatoire et représentation  
du groupe symétrique, Strasbourg, 1976

## LA CORRESPONDANCE DE ROBINSON.

M. -P. Schützenberger

### 1. Introduction.

1.1. La correspondance  $R$  entre permutations et tableaux standards de Young introduite en 1938 par G. de B. Robinson [12] dans la théorie des représentations du groupe symétrique a été depuis étudiée en elle-même par divers auteurs qui lui ont découvert une série de propriétés combinatoires curieuses, ou utiles pour l'étude des fonctions symétriques. Dans le présent travail nous nous proposons de donner un exposé systématique des principaux résultats basé sur la théorie de C. Green ([5], [6], [7]) grâce à laquelle il devient possible de montrer que la correspondance  $R$  est naturelle sur l'ensemble de tous les tableaux gauches ("skew" de Young, appelés ici tableaux) muni d'une structure convenable.

J'ai utilisé de nombreuses idées de G. Thomas et de A. Lascoux pour simplifier ces preuves et organiser les énoncés de façon à réduire autant que j'ai pu la partie combinatoire.

La technique est la suivante. On considère le plan entier  $\tilde{P} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  muni de son ordre naturel  $\leq ((x, y) \leq (x', y') \text{ ssi } x \leq x' \text{ et } y \leq y')$  et on identifie chaque tableau (gauche, "skew") de Young à un morphisme (de structure d'ordre) bijectif d'un intervalle du plan sur une chaîne standard  $[n] = \{1 < 2 < \dots < n\}$ . On associe une certaine relation d'ordre  $C_\varphi$  sur  $[n]$  à chaque tableau  $\varphi$  d'image  $[n]$  et pour  $j \geq 0$ ,  $k \geq 1$  on définit  $L_j(\varphi; k)$  comme le maximum du nombre des éléments parmi les parties de  $[n-j]$  qui sont unions de  $k$   $C_\varphi$ -chaînes.

La fonction  $L$  induit une équivalence  $\equiv$  sur l'ensemble des tableaux ( $\varphi \equiv \psi$  ssi  $L(\varphi) = L(\psi)$ ) dont chaque classe contient un et un seul élément qui soit un tableau standard c'est-à-dire dont la forme soit celle d'un diagramme de Ferrers : c'est la correspondance de Robinson et on peut caractériser les transformations entre tableaux (les "glissements") qui commutent avec  $\equiv$ .

La famille des tableaux peut être munie d'un produit associatif pour lequel  $\equiv$  est une congruence. De ce point de vue les permutations peuvent être considérées comme des produits  $\sigma$  dont chaque terme a pour domaine un point. Il se trouve que les ordres  $C_\sigma$  et  $C_{\sigma^{-1}}$  sont isomorphes et on en déduit aisément le théorème fondamental de G. de B. Robinson que la correspondance  $\sigma \rightarrow (\sigma R, \sigma^{-1} R)$  est une bijection des permutations sur les paires de tableaux standards de même forme.

Cet énoncé fournit le substrat combinatoire aux résultats classiques connus sous le nom de "règle de Littlewood-Richardson" et "théorème d'Aitken". Le lien avec la théorie des fonctions de Schur s'effectue en vérifiant que les manipulations précédentes équivalent au calcul dans le quotient de l'anneau des polynômes en  $n$  variables  $x_i$  (non commutatives) par la congruence  $x_i^2 \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Nous ferons référence aux travaux de G. Thomas ([18], [19]) qui montrent de façon plus précise, que le relèvement de la structure multilinéaire seule considérée ici peut être réalisé au moyen des opérateurs de Baxter introduits en algèbre par G. -C. Rota.

Une partie importante des propriétés que nous venons de résumer résulte de ce que la congruence  $\equiv$  commute avec les involutions naturelles induite par la structure d'ordre sur le plan  $\tilde{P}$ . Pour profiter au maximum des simplifications que procurent ces opérations nous avons rassemblé dans la seconde partie de cette introduction l'ensemble des définitions et des notions géométriques, au demeurant parfaitement triviales, qui seront utilisées par la suite. Le chapitre 2 contient la définition des glissements. Le chapitre 3 montre d'après C. Green que ces opérations entre tableaux préservent la fonction  $L$  et qu'elles peuvent être obtenues en composant des transformations encore plus simples dues à D. E. Knuth [8]. La correspondance de Robinson est définie dans le même chapitre et le théorème fondamental sur les permutations est établi dans le chapitre 4. Le dernier chapitre établit la connexion avec les fonctions de Schur.

Les lecteurs de ce mémoire devront remercier le Professeur D. Foata qui a consacré beaucoup d'efforts à son amélioration et sans lequel je n'aurais pu le terminer.

## 1.2. NOTATIONS.

Intervalles. Dans tout ce travail nous désignerons par  $J$  la famille des parties finies  $F$  du plan entier  $\tilde{P} = Z \times Z$  qui sont des intervalles par rapport à l'ordre naturel  $\leq$  c'est-à-dire qui satisfont la condition

$$(1) \quad p, p' \in F, \quad p'' \in \tilde{P}, \quad p \leq p'' \leq p' \Rightarrow p'' \in F.$$

Un interval  $F$  sera dit principal ( $F \in \hat{J}$ ) ssi il possède un point minimum (par rapport à l'ordre naturel) unique c'est-à-dire ssi il a la forme d'un diagramme de Ferrers. Chaque intervalle  $F$  est contenu dans un plus petit intervalle principal  $\hat{F}$  que l'on peut définir comme la plus petite partie  $F'$  du plan qui contienne  $F$  et qui soit telle que

$$(2) \quad p, p' \in F' \Rightarrow \text{Min} \{p, p'\} \in F'.$$

Il sera commode de désigner par  $\hat{J}^1$  la sous-famille des intervalles  $F$  dont  $(1, 1)$  est le point minimum de  $\hat{F}$ , c'est-à-dire de disposer d'une section de  $J$  par rapport aux translations.

Ordre croisé. Concurrément avec l'ordre naturel  $\leq$ , nous utiliserons un second ordre sur le plan  $\tilde{P}$ , dit ordre croisé dont le graphe  $C \subset \tilde{P} \times \tilde{P}$  sera défini par l'identité :

$$(3) \quad ((x, y), (x', y')) \in C \quad \text{ssi} \quad x \leq x' \quad \text{et} \quad y \geq y' .$$

Autrement dit, l'involution  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$  sur le plan établit un isomorphisme entre les ordres naturels et croisés. La transposition  $p = (x, y) \rightarrow p^T = (y, x)$  est un anti-isomorphisme entre  $C$  et l'ordre opposé  $\bar{C}$ . Il en est de même de la symétrie par rapport à l'origine  $p = (x, y) \rightarrow -p = (-x, -y)$  c'est-à-dire que pour toute paire  $(p, p')$  de points les relations :

$$(4) \quad (p, p') \in C ; (p', p) \in \bar{C} ; (p^T, p'^T) \in C ; (-p', -p) \in C ; (-p^T, -p'^T) \in C ;$$

sont équivalentes.

Nous dirons qu'une partition ordonnée  $(F_1, F_2, \dots, F_n)$  d'une partie  $F$  du plan est une C-partition ssi, d'une part deux points de  $F$  sont incomparables pour l'ordre naturel quand ils appartiennent à deux composantes distinctes et, d'autre part,  $(p, q) \in C$  pour tout  $p \in F_i, q \in F_j$  quand  $i < j$ . Par exemple la suite ordonnée des points  $\{(n, 1)\}, \{(n-1, 2)\}, \dots \{(n-i, i+1)\}, \dots \{(1, n)\}$  forme une C-partition de leur union  $F$ .

On voit facilement qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $(F_1, \dots, F_r)$  soit une C-partition est qu'il existe des points  $(x_i, y_i)$  ( $i = 2, \dots, r$ ) tels que pour chaque  $j = 1, \dots, r$  et  $(x, y) \in F_j$  on ait :

$$x \leq x_i, y \geq y_i \text{ si } j \leq i \text{ et } x_i < y, y_i > y \text{ si } j > i .$$

Manifestement chaque composante  $F_i$  d'une  $C$ -partition d'un intervalle  $F$  est elle-même un intervalle.

Morphisme. Dans tout ce travail un morphisme sera une application partielle  $\varphi$  du plan  $P$  dans une chaîne dont la restriction à son domaine est un morphisme de structure d'ordre, c'est-à-dire qui est telle que  $p\varphi \leq p'\varphi$  pour toute paire ordonnée  $p \leq p'$  de points de son domaine. Pour l'essentiel nous n'aurons à faire qu'à une famille plus restreinte, à savoir la famille  $\mathfrak{m}$  des morphismes qui satisfont les deux conditions supplémentaires suivantes :

- (1) leur domaine  $F$  est un intervalle fini du plan ;
- (2) leur restriction à celui-ci est une bijection sur leur image  $A$  .

Si besoin est, on précisera le domaine ou l'image par des écritures telles que  $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}(F)$  ou  $\mathfrak{m}_A(F)$  .

Comme les morphismes de  $\mathfrak{m}$  sont des bijections, il n'y aura pas d'inconvénient à désigner par la même notation  $\varphi|F'$  ou  $\varphi|A'$  leur restriction à une partie  $F'$  de leur domaine ou  $A'$  de leur image.

Nous ferons un usage constant de la remarque triviale que si le domaine  $F$  d'un morphisme  $\varphi$  (non nécessairement bijectif) est un intervalle (resp. un intervalle principal) et si  $B$  est un intervalle (resp. un intervalle initial) de son image, le domaine de la restriction  $\varphi|B$  est encore un intervalle (resp. un intervalle principal).

Nous supposerons en général que la chaîne  $A = \{a_1 < a_2 \dots < a_n\}$  est fixée. Ses éléments seront appelés pièces. Enfin on notera  $a \rightarrow -a$  l'anti-isomorphisme de  $A$  sur la chaîne opposée  $-A = \{-a_n < \dots < -a_2 < -a_1\}$  .

La transposition et la symétrie par rapport à l'origine permettent d'associer à chaque application  $\varphi : F \rightarrow A$  trois autres applications  $\varphi^T : F^T \rightarrow A$ ,  $\bar{\varphi} : -F \rightarrow -A$  et  $\overline{\varphi^T} = \varphi^{-T} : -F^T \rightarrow -A$  en posant

$$(5) \quad p^T \varphi^T = p\varphi; (-p)\bar{\varphi} = -(p\varphi) \quad \text{et} \quad (-p^T)\varphi^{-T} = -(p\varphi)$$

pour chaque point  $p$  de  $F$ .

Il est clair que ces opérations sont des involutions sur  $\mathcal{M}$  et que si  $\varphi$  est principal (c'est-à-dire si son domaine est principal) il en est de même de son transposé  $\varphi^T$ .

DEFINITION. Etant donnée une bijection  $\varphi : F \rightarrow A$ , la relation d'ordre  $C_\varphi$  sur  $A$  est définie par la condition que pour toute paire de pièces  $a, b$  de  $A$  on ait :

$$(6) \quad (a, b) \in C_\varphi \text{ ssi } a \leq b \text{ et } (a\varphi^{-1}, b\varphi^{-1}) \in C.$$

On définit de même  $\bar{C}_\varphi$  en remplaçant  $C$  par l'ordre opposé  $\bar{C}$ .

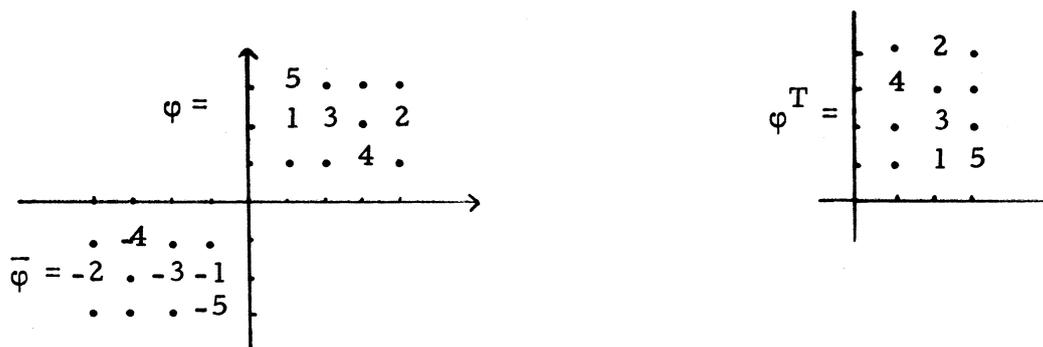
En raison de son importance pour la suite nous isolons la remarque suivante :

1.1. On a  $\bar{C}_\varphi = C_{\varphi^T}$  et la bijection  $a \rightarrow -a$  de  $A$  sur  $-A$  établit un anti-isomorphisme entre les ordres  $C_\varphi$  sur  $A$  et  $C_{\bar{\varphi}}$  sur  $-A$ .

Preuve. L'isomorphisme entre  $\bar{C}_\varphi$  et  $C_{\varphi^T}$  résulte de ce que  $(p, q) \in \bar{C}$  équivaut à  $(q^T, p^T) \in C$ . L'anti-isomorphisme entre  $C_\varphi$  et  $\bar{C}_{\bar{\varphi}}$ , de ce que si  $a\varphi^{-1} = p$  et,  $b\varphi^{-1} = q$ , la double condition  $a \leq b$ ,  $(p, q) \in C$  équivaut à  $-b \leq -a$ ,  $(-q, -p) \in C$ .

Q. E. D.

L'exemple suivant peut aider le lecteur à visualiser ces notations. (Conformément à l'usage courant dans le reste des mathématiques les coordonnées X (resp. Y) vont en croissant de gauche à droite (resp. de bas en haut)). La bijection  $\varphi$  n'est pas un morphisme (à cause de la paire (3, 2)) et son domaine n'est pas un intervalle.



On a :

$$C_{\varphi} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 4)\};$$

$$\overline{C}_{\varphi} = C_{\varphi^T} = \{(1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\};$$

$$C_{\varphi^{-1}} = \{(-2, -1), (3, -1), (-4, -1), (-4, -3)\};$$

$$C_{\varphi^{-T}} = \{(-5, -1), (-3, -2), (-5, -3), (-5, -4)\}.$$

Par contre la bijection

$$\psi = \begin{array}{cccc} 2 & 5 & . & . \\ . & 1 & 4 & . \\ . & . & . & 3 \end{array}$$

est un morphisme dont le domaine est un intervalle qui, d'ailleurs, admet la

C-partition  $(F_1, F_2)$  où  $F_1$  a la forme  $\begin{array}{ccc} * & * & . \\ . & * & * \end{array}$  et où  $F_2$  est réduit au point portant la pièce 3. On a

$$C_{\psi} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

**Produit.** Deux applications  $\psi : F \rightarrow A$  et  $\psi' : F' \rightarrow A$  ne diffèrent que par une translation ssi leurs domaines  $F$  et  $F'$  ont le même nombre de points et s' il existe  $(u, v) \in Z \times Z$  tel que  $(x+u, y+v)\psi' = (x, y)\psi$  pour chaque point  $(x, y)$  de  $F$ .

Considérons maintenant une suite  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  de morphismes  $\varphi_i \in \mathcal{M}_{A_i}(F_i)$ . Nous écrirons  $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_r = 0$  quand les  $A_i$  ne forment pas une partition de leur union  $B$ . Dans le cas contraire nous dirons qu'une application  $\varphi : F \rightarrow B$  est un produit des  $\varphi_i$  (et nous écrirons  $\varphi \in \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_r$ ) ssi  $F$  admet une  $C$ -partition  $(F'_1, \dots, F'_r)$  telle que chaque restriction  $\varphi'_i = \varphi|_{F'_i}$  ne diffère de  $\varphi_i$  que par une translation ( $i = 1, 2, \dots, r$ ).

Pour illustrer ceci considérons par exemple les trois morphismes principaux  $\varphi_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ ;  $\varphi_2 = 5$ ;  $\varphi_3 = 34$ . Un produit  $\varphi \in \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$  serait par exemple :

$$\varphi = \begin{array}{cccc} 3 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & 5 & . & . \\ . & . & 3 & 4 \end{array} \quad \text{ou aussi bien} \quad \varphi' = \begin{array}{cccc} 3 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & 5 & . & . \\ . & . & . & 3 & 4 \end{array}$$

Soit  $F$  le domaine d'un produit  $\varphi \in \varphi_1 \dots \varphi_r$  où chaque  $\varphi_i$  appartient à  $\mathcal{M}$ . Par hypothèse  $F$  est un intervalle,  $\varphi$  est bijectif et enfin  $\varphi$  est un morphisme puisque deux points de  $F$  sont incomparables pour l'ordre naturel quand ils appartiennent à deux composantes distinctes. Donc  $\varphi \in \mathcal{M}$ .

Posant  $0\psi = \psi 0 = 00 = 0$ , ( $\psi \in \mathcal{M}$ ) il en résulte immédiatement que la notion de produit que nous venons de définir munit  $\mathcal{M} \cup \{0\}$  d'une structure de semi-groupe. De fait, c'est même une structure de monofde puisque  $\mathcal{M}$  contient le morphisme de domaine vide (à ne pas confondre avec le zéro  $0$ ) qui est élément neutre du produit.

Il est clair que les relations  $\varphi \in \varphi_1 \varphi_2$  ;  $\varphi^T \in \varphi_2^T \varphi_1^T$  ;  $\bar{\varphi} \in \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_1$  ;  $\bar{\varphi}^T \in \bar{\varphi}_1^T \bar{\varphi}_2^T$  sont identiquement équivalentes. Nous soulignons la remarque suivante :

1.2. Soit  $\varphi \in \varphi_1 \dots \varphi_r$  un produit. L'ordre  $C_\varphi$  ne dépend que de la suite  $(C_{\varphi_1}, \dots, C_{\varphi_r})$  des ordres associés à ses facteurs.

Preuve. Comme chaque point du domaine de  $\varphi_i$  est en relation  $C$  avec tous les points de celui de  $\varphi_j$  pour  $i < j$ , le graphe  $C_\varphi$  est l'union des graphes  $C_{\varphi_i}$  et des paires  $(a_i, a_j)$  où  $a_i$  (resp.  $a_j$ ) appartient à l'image de  $\varphi_i$  (resp. de  $\varphi_j$ ) et  $i < j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, r$ ).

Q. E. D.

Permutations. Une bijection  $\sigma$  d'image  $A$  sera dite une permutation de  $A$  ( $\sigma \in S_A^1$ ) ssi son domaine est constitué des points  $(n+1-i, i)$  ( $1 \leq i \leq n = \text{Card } A$ ), ce qui entraîne qu'il soit un intervalle et que  $\sigma \in \mathcal{M}$ ; nous la représenterons le plus souvent par la suite  $(1\sigma) (2\sigma) \dots (n\sigma)$  des pièces de  $A$  lues dans l'ordre  $C$ .

L'énoncé suivant sera utilisé plusieurs fois par la suite.

1.3. A chaque morphisme bijectif  $\varphi$  d'image  $A$  correspond une et une seule permutation  $\sigma = \sigma(\varphi)$  telle que  $C_\sigma = C_\varphi$ . Une condition suffisante pour qu'un autre morphisme bijectif  $\psi$  de même image  $A$  satisfasse  $C_\varphi = C_\psi$  est que chaque pièce de  $A$  se trouve dans la même ligne dans  $\varphi$  et dans  $\psi$ .

Preuve. Nous définissons un ordre total  $C^L$  contenant l'ordre croisé  $C$  par l'identité :

$$((x, y), (x', y')) \in C^L \text{ ssi } (x \leq x' \text{ et } y = y') \text{ ou } (y > y')$$

et à chaque morphisme bijectif  $\varphi$  d'image  $A$  nous associons l'ordre  $C_\varphi^L$  contenant  $C_\varphi$  par la condition que  $(a, b) \in C_\varphi^L$  ssi  $a \leq b$  et  $(a\varphi^{-1}, b\varphi^{-1}) \in C^L$ .

Puisque  $C^L$  est un ordre total il correspond à  $\varphi$  une et une seule permutation  $\sigma = \sigma(\varphi)$  de  $S_A^1$  pour laquelle  $C_\varphi^L = C_\sigma^L$ , à savoir celle représentée par la suite  $s_k s_{k-1} \dots s_1$  où chaque  $s_i$  est la suite des pièces (lues dans l'ordre naturel) sur la ligne  $y_i$  de  $\varphi$  et où  $y_k > y_{k-1} > \dots > y_1$ . Par conséquent  $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$  dans les conditions de l'énoncé. De plus  $C_\sigma^L = C_\sigma$  puisque les deux ordres  $C^L$  et  $C$  coïncident sur le domaine de toute permutation.

Supposons  $(a, b) \in C_\varphi^L \setminus C_\varphi$ . On a  $a \leq b$  et les points  $p = (x, y) = a\varphi^{-1}$  et  $p' = (x', y') = b\varphi^{-1}$  sont tels que d'une part  $x \leq x'$  et  $y = y'$  ou  $y > y'$  et d'autre part on n'ait pas  $x \leq y'$  et  $y \geq y'$ . On a donc  $x > x'$  et  $y \geq y'$ , c'est-à-dire  $b\varphi = (x', y') < a\varphi = (x, y)$  ce qui montre que  $\varphi$  n'est pas un morphisme.

Par conséquent sous l'hypothèse contraire, on a  $C_\varphi = C_\varphi^L$  (puisque  $C_\varphi \subset C_\varphi^L$  par construction) ce qui achève la preuve.

Q. E. D.

Pour des raisons évidentes on peut appeler connexe toute partie du plan qui n'admet pas de  $C$ -partition non triviale. Nous laissons au lecteur de vérifier l'observation (que nous n'utiliserons pas) qu'à chaque morphisme  $\varphi \in \mathcal{M}$  correspond un morphisme  $\psi$  de  $\mathcal{M}$ , unique à une translation près dans le plan, dont le domaine est connexe et pour lequel  $C_\varphi = C_\psi$  et  $C_{\varphi T} = C_{\psi T}$ .

## 2. Les Glissements.

Disons qu'une partie  $F$  et un point  $p$  du plan sont un quasi-intervalle et un complément de celui-ci si  $F \cup p$  est un intervalle et  $p \notin F$ , ce qui n'exclut pas la possibilité que  $F$  soit déjà lui-même un intervalle.

Soient maintenant  $\varphi \in \mathcal{M}$  un morphisme bijectif sur  $A$  dont le domaine est l'intervalle  $F$  et  $p = (x, y)$  un complément de  $F$  tel que  $F$  contienne au moins un des deux points  $p^X = (x+1, y)$ ,  $p^Y = (x, y+1)$ . Nous construisons une suite  $(\varphi_0, p_0) = (\varphi, p), \dots, (\varphi_k, p_k)$  de paires dans lesquelles chaque  $\varphi_i$  est une bijection sur  $A$  dont le domaine  $F_i$  est un quasi-intervalle de complément  $p_i$  par les trois conditions suivantes :

- (1)  $k$  est le premier indice pour lequel  $F_i \cap \{p_i^X, p_i^Y\} = \emptyset$  ;
- (2) Pour chaque  $i = 0, 1, \dots, k-1$  on a :  $F_{i+1} = (F_i \setminus p_{i+1}) \cup p_i$  où  $p_{i+1} \in \{p_i^X, p_i^Y\}$  est défini par la condition que  $p_{i+1}\varphi_i = \text{Min}\{p_i^X\varphi_i, p_i^Y\varphi_i\}$  ;
- (3)  $p_i\varphi_{i+1} = p_{i+1}\varphi_i$  et  $p'\varphi_{i+1} = p'\varphi_i$  pour tous les autres points  $p'$ .

Autrement dit,  $\varphi_{i+1}$  se déduit de  $\varphi_i$  en amenant au point  $p_i$  la plus petite des pièces  $p_i^X\varphi_i$  et  $p_i^Y\varphi_i$  si  $F_i$  contient les deux points  $p_i^X$  et  $p_i^Y$  et sinon la seule de ces pièces qui existe. Comme les points  $p_i$  forment une suite strictement croissante, le processus s'arrête puisqu'il finit par donner un point  $p_k$  qui se trouve être un point maximal du domaine  $F_k$ .

Nous poserons  $\varphi_k = \varphi \Gamma_p$  (ou pour préciser s'il le faut  $(\varphi_k, p_k) = \varphi \Gamma_p$ ) et nous appellerons  $\varphi_k$  le glissement de  $\varphi$  de sommet  $p$ .

L'exemple suivant où  $k = 3$ ,  $q = p_k$  illustre cette construction :

$$\varphi = \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 8 \\ \cdot & 3 & 4 & 7 \\ & \cdot & p & 2 & 6 \end{array} ; \quad \varphi_1 = \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 8 \\ \cdot & 3 & 4 & 7 \\ & \cdot & 2 & p_1 & 6 \end{array} ; \quad \varphi_2 = \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 8 \\ \cdot & 3 & p_2 & 7 \\ & \cdot & 2 & 4 & 6 \end{array} ; \quad \varphi_3 = \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 8 \\ \cdot & 3 & 7 & p_3 & 9 \\ & \cdot & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

Nous rassemblons en un seul énoncé les propriétés des glissements qui nous serviront par la suite en posant  $\psi = \varphi_k$ ,  $q = p_k$ . Les opérations  $\varphi \rightarrow \varphi^T$  ou  $\bar{\varphi}$  sont celles définies dans la section précédente et pour chaque point  $q = (x, y)$  on note  $q^{-X} = (x-1, y)$ ;  $q^{-Y} = (x, y-1)$ .

2.1. On a les propriétés suivantes :

- (1) Chaque  $\varphi_i$  est un morphisme bijectif et  $a\varphi_i^{-1} \leq a\varphi^{-1}$  pour chaque  $a$  de  $A$  ;
- (2) Le domaine  $G$  de  $\psi$  est un intervalle tel que  $G \cup q = F \cup p$  et  $G \cap \{q^{-X}, q^{-Y}\} \neq \emptyset$  ;
- (3)  $\psi^T = \varphi^T \Gamma_{\substack{T \\ p}}$  ;
- (4)  $\bar{\psi} \Gamma_{-q}$  est défini et est égal à  $(\bar{\varphi}, -p)$  ;
- (5) Si  $B$  est un intervalle de  $A$  et  $\psi \mid B \neq \varphi \mid B$  il existe un point  $p'$  pour lequel  $\psi \mid B = (\varphi \mid B)\Gamma_{p'}$ .

Preuve. Par hypothèse  $\varphi_0 = \varphi$  est un morphisme et on peut donc procéder par induction sur  $i$ . Par construction  $\varphi_{i+1}$  satisfait identiquement  $a\varphi_{i+1}^{-1} \leq a\varphi_i^{-1}$  ( $a \in A$ ) avec égalité pour toutes les pièces sauf une, qui passe du point  $p_{i+1}$  au point  $p_i < p_{i+1}$  et qui, d'après l'hypothèse que  $\varphi_i$  est un morphisme peut être définie par la condition d'être la pièce minimum de l'ensemble  $\{p'\varphi_i : p_i \leq p'\}$ . Ceci suffit pour vérifier que  $\varphi_{i+1}$  est un morphisme.

(2) En effet, par construction tous les  $F_i \cup p_i$  sont égaux à l'intervalle initial  $F \cup p$  et le point  $q = p_k$  est un point maximal propre de celui-ci.

(3) Immédiat.

(4) On a  $F_k \cap \{p_k^{-X}, p_k^{-Y}\} \neq \emptyset$ , ce qui équivaut à  $-G \cup \{(-q)^X, (-q)^Y\} \neq \emptyset$  où  $-G \cup -q$  est un intervalle. L'énoncé équivaut donc à l'assertion que pour chaque  $i = k, k-1, \dots, 0$  la donnée de  $\varphi_i$  et du point  $p_i = (x, y)$  détermine le point

$p_{i-1}$  par la condition duale que  $p_{i-1}\varphi_i = \text{Max} \{p_i^{-X}\varphi_i, p_i^{-Y}\varphi_i\}$ . Or ceci est clair car si  $p_{i-1} = p_i^{-X} = (x-1, y)$  (resp.  $= p_i^{-Y}$ ) on a  $p_{i-1}\varphi_i = p_i\varphi_{i-1} \geq (x, y-1)\varphi_{i-1}$  (resp.  $\geq p_i^{-X}\varphi_{i-1}$ ) puisque  $\varphi_{i-1}$  est un morphisme.

(5) Comme  $\varphi \mid B \in \mathfrak{M}$  ceci résulte immédiatement du caractère local de la construction.

Q. E. D.

D'après (4), la paire finale  $(\psi, q) (= (\varphi_k, p_k))$  détermine de façon unique la paire initiale  $(\varphi, p)$  que nous appellerons le glissement inverse  $\varphi = \psi \overline{\Gamma}_q$  de sommet  $q$  de  $\psi$ . Les glissements et les glissements inverses constituent donc une famille de bijections sur l'ensemble  $\mathfrak{M}_A$  contenant l'inverse de chacun de ses membres [15].

La semi-orbite  $\varphi\Gamma^*$  d'un morphisme  $\varphi$  sera définie comme le plus petit ensemble fermé par glissement qui le contienne ; son orbite sera la plus petite union de semi-orbites fermée par glissements inverses qui contienne  $\varphi\Gamma^*$ .

Disons pour abrégé que  $\varphi$  est un morphisme principal de point minimum  $(x, y)$  ssi son domaine est un intervalle principal ayant cette propriété (cf. Introduction).

2.2. Chaque semi-orbite  $\varphi\Gamma^*$  contient un morphisme principal de point minimum  $(x, y)$  pour tous  $x, y \in Z$  assez petits.

Preuve. Soient  $F$  le domaine de  $\varphi$  et  $\hat{F}$  le plus petit intervalle principal contenant  $F$ . Si  $F$  lui-même n'est pas principal,  $\hat{F} \setminus F$  contient au moins un point maximal. On vérifie facilement que  $p \cup F$  est un intervalle et que si  $G$  est le domaine du glissement  $\varphi\Gamma_p$ , l'ensemble  $\hat{G} \setminus G$  est contenu dans  $\hat{F} \setminus (F \cup p)$ . Donc, par induction sur  $\text{Card } \hat{F} \setminus F$ , la semi-orbite de  $\varphi$  contient un morphisme principal  $\psi$  dont le point minimum  $(x, y)$  est contenu dans  $\hat{F}$ .

Pour achever la preuve il suffit de montrer que la semi-orbite de  $\psi$

contient des morphismes principaux de point minimum  $(x-1, y)$  et  $(x, y-1)$ . En raison de la symétrie par rapport à la transposition, il suffit de vérifier ceci pour  $(x-1, y)$ . Soit  $H$  le domaine de  $\psi$ . Il contient un point maximum de la forme  $(x, y')$  avec  $y' \geq y$ . L'union de  $H$  et du point  $p' = (x-1, y')$  est un intervalle. Appliquant la construction précédente au glissement  $\psi = \psi_{\Gamma_{p'}}$ , on obtient un morphisme principal de point minimum  $(x-1, y)$  appartenant à la semi-orbite de  $\psi'$ , donc de  $\varphi$ .

Q.E.D.

Soient  $a < b < c$  trois pièces et  $\varphi_1 = \begin{smallmatrix} b & c \\ \cdot & a \end{smallmatrix}$ . Le glissement de sommet  $(1, 1)$  fait passer du morphisme  $\varphi_1$  au morphisme  $\varphi_1 K = \begin{smallmatrix} b & \cdot \\ a & c \end{smallmatrix}$  et du morphisme  $\varphi_2 = \begin{smallmatrix} a & c \\ \cdot & b \end{smallmatrix}$  au morphisme  $\varphi_2 K = \begin{smallmatrix} c & \cdot \\ a & b \end{smallmatrix}$ . Nous appellerons  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  tableaux élémentaires et l'opération  $\varphi_i \rightarrow \varphi_i K$  transformation (élémentaire) de Knuth. Cet auteur a montré que ces transformations et leurs inverses engendrent pour l'essentiel toutes les opérations entre tableaux qui nous intéressent. Nous nous proposons de donner une forme un peu plus stricte de ce résultat (en évitant les inverses). Plus précisément, nous appellerons semi-orbite de Knuth  $\chi K^*$  d'un morphisme  $\chi$  le plus petit ensemble de morphismes  $X$  contenant  $\chi$  qui satisfasse les deux conditions suivantes :

- (1)  $\varphi \in X, C_\varphi = C_\psi \Rightarrow \psi \in X$  ;
- (2) Si  $\varphi \in X$  est un produit de la forme  $\varphi' \varphi_i \varphi''$  où  $\varphi_i$  est un des deux morphismes  $\varphi_1$  ou  $\varphi_2$  ci-dessus on a  $\varphi'(\varphi_i K)\varphi'' \in X$ .

Rappelons la notation  $\sigma(\varphi)$  pour désigner la permutation associée à un morphisme  $\varphi$  ainsi qu'il a été expliqué dans l'énoncé 1.3. La permutation  $\sigma(\varphi_1)$  (resp.  $\sigma(\varphi_2)$ ) est  $bca$  (resp.  $acb$ ) et  $\sigma(\varphi_1 K) = bac$  (resp.  $\sigma(\varphi_2 K) = cab$ ).

Il est immédiat que la semi-orbite  $\chi K^*$  est caractérisée par la condition que  $\varphi \in \chi K^*$  implique  $\psi \in \chi K^*$  quand il existe deux permutations  $\sigma'$  et  $\sigma''$  et

trois pièces  $a < b < c$  telles que

- (3) Soit  $\sigma(\varphi) = \sigma' bca\sigma''$  et  $\sigma(\psi) = \sigma' bac\sigma''$  ;  
 Soit  $\sigma(\varphi) = \sigma' acb\sigma''$  et  $\sigma(\psi) = \sigma' cab\sigma''$  .

D'après la définition de  $\chi K^*$  chaque morphisme de cette semi-orbite peut être obtenu par une suite de glissements à partir de  $\chi$  . Il est un peu plus difficile de vérifier le théorème de Knuth qui affirme la réciproque de cette propriété. Nous commençons par examiner en détail le cas où  $\chi$  est un produit  $(\lambda)(b)$  où  $\lambda$  est un morphisme dont le domaine est une ligne,  $\lambda = b_1 b_2 \dots b_m$  ( $b_1, \dots, b_m \in A$ ) et où  $b$  est une pièce unique.

Si  $b_m < b$  le morphisme  $\varphi$  formé de la ligne  $b_1 \dots b_m b$  peut être obtenu par glissement à partir de  $\chi$  et il appartient à  $\chi K^*$  puisque  $\varphi$  et  $\chi$  correspondent à la même permutation  $b_1 \dots b_m b$  .

Supposons donc  $b_m > b$  . Soit  $b_r$  la plus petite des pièces de l'image de  $\lambda$  qui soit plus grande que  $b$  .

2.3. Le produit  $\varphi = (b_r)(\lambda')$  où  $\lambda'$  est le morphisme obtenu en remplaçant  $b_r$  par  $b$  dans  $\lambda$  appartient à  $\chi K^*$  et peut être obtenu par glissements à partir de  $\chi$  .

Preuve. On peut supposer que dans  $\chi$  chaque  $b_i$  se trouve au point  $(i, 1)$  ( $1 \leq i \leq m$ ) et  $b$  au point  $(m+1, 0)$  . On passe par glissement au morphisme  $\varphi_m$  qui ne diffère de  $\chi$  que par le fait que  $b$  se trouve au point  $(m, 0)$  . Définissons  $\varphi_i = \varphi_{i+1} \Gamma(i, 1)$  ( $i = m-1, \dots, 1$ ) . Chaque glissement  $\varphi_{i+1} \rightarrow \varphi_i$  consiste quand  $i > r$  (resp.  $i \leq r$ ) à déplacer  $b$  (resp.  $b_r$ ) d'un pas vers la gauche et à abaisser la pièce  $b_{i+1}$  (resp.  $b_i$ ) . Chacun d'eux est une opération  $K$  ce qui établit le résultat puisque  $\varphi_1 = \varphi$  a bien la forme indiquée.

Q. E. D.

EXEMPLE. Soient  $\lambda = 1\ 2\ 3\ 5\ 6$  ;  $b = 4$  . On a  $b_r = 5$  et

$$\varphi_5 = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \end{array} ; \quad \varphi_4 = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 & \end{array} ; \quad \varphi_3 = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 5 & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & 3 & 4 & 6 & \end{array} ;$$

$$\varphi_2 = \begin{array}{cccccc} 1 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & \end{array} ; \quad \varphi_1 = \begin{array}{cccccc} 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & \cdot \end{array} .$$

Nous considérons maintenant un cas plus compliqué. Soient  $\varphi_i$  et  $\varphi_{i+1}$  deux des morphismes consécutifs construits dans un glissement et supposons que l'on se trouve dans le cas où  $\varphi_{i+1}$  diffère de  $\varphi_i$  par le déplacement de la pièce  $c$  du point  $(x, y)$  au point adjacent en dessous  $(x, y-1)$ . On peut représenter la ligne  $y$  de  $\varphi_i$  par un produit  $s_3cs_4$  où  $s_3$  et  $s_4$  sont des suites croissantes de pièces ; de la même manière la ligne  $y-1$  de  $\varphi_{i+1}$  peut être notée  $s_1cs_2$ . Par hypothèse, les longueurs de ces suites satisfont  $|s_1| \leq |s_3|$  ;  $|s_2| \geq |s_4|$ . De plus si  $s_2 = a_1a_2 \dots a_m$  et  $s_4 = b_1 \dots b_p$  où les  $a_j, b_j$  sont des pièces, on a par hypothèse  $c < a_1$  et  $a_i < b_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, p \leq m$  ; des relations similaires valent pour  $s_1$  et  $s_3$ . Un exemple avec  $c = 6$  est fourni par  $s_1 = 1\ 3$  ;  $s_2 = 7\ 8$  ;  $s_3 = 2\ 4\ 5$  ;  $s_4 = 9$  ce qui correspond aux lignes  $y$  et  $y-1$  de  $\varphi_i$  et de  $\varphi_{i+1}$  représentées par

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 5 & 6 & 9 & \cdot \\ \cdot & 1 & 3 & \times & 7 & 8 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 5 & \times & 9 & \cdot \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 8 & \end{array}$$

2.3. bis On a  $\psi \in \varphi K^*$  où  $\varphi$  est le produit des deux lignes  $s_3cs_4$  et  $s_1s_2$  , et  $\psi$  celui des deux lignes  $s_3s_4$  et  $s_1cs_2$  .

Preuve. Par induction sur le nombre des pièces, le cas initial étant trivial. Si  $|s_3| > |s_1|$  on peut écrire  $s_3 = s_3's_3''$  où  $|s_3''| = |s_1|$  et l'on voit que  $\varphi$  et  $\psi$  sont les produits de  $s_3'$  par  $\varphi'$  et par  $\psi'$  obtenus en remplaçant  $s_3$  par  $s_3''$ . Le résultat découle alors de l'hypothèse d'induction sauf si  $|s_3'| = 0$ , c'est-à-dire sauf si  $|s_1| = |s_3|$  comme nous le supposons désormais. On distingue deux cas :

$$(1) \quad |s_1| = |s_3| = 0$$

Soient  $s_2 = a_1 \dots a_m$  et  $s_4 = b_1 \dots b_p$  comme ci-dessus. On peut considérer  $\varphi$  comme le produit de  $cs_4$  par les singolets  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , ce que nous écrivons

$$\varphi = (cs_4)(a_1)(a_2) \dots (a_m) .$$

D'après  $c < a_1 < b_1$  et 2.3, on voit que la semi-orbite de Knuth du produit  $(cs_4)(a_1)$  contient le morphisme  $\varphi_1 = \begin{matrix} b_1 & \dots & \dots & \dots \\ ca_1 b_2 & \dots & \dots & b_p \end{matrix}$ . Donc  $\varphi_1 \in \varphi K^*$  où

$$\varphi_1 = (b_1)(ca_1 b_2 \dots b_p)(a_2) \dots (a_m) .$$

On obtient de même  $\varphi_2 \in \varphi_1 K^* \subset \varphi K^*$  où :

$$\varphi_2 = (b_1)(b_2)(ca_1 a_2 b_3 \dots b_p)(a_3) \dots (a_m)$$

et où on peut aussi bien écrire  $(b_1 b_2)$  que  $(b_1)(b_2)$ . Répétant la même opération on obtient enfin  $\varphi_m \in \varphi K^*$  où :

$$\varphi_m = (b_1 \dots b_m)(c_1 a_1 \dots a_m b_{m+1} \dots a_p) = \psi .$$

Ce qui achève la vérification dans ce cas.

$$(2) \quad |s_1| = |s_3| \geq 1$$

On peut poser  $s_1 = as'_1$  et  $s_3 = bs'_3$  où  $a < b$  sont deux pièces. Considérant  $\varphi$  comme le produit  $(bs'_3 cs'_4)(a)(s'_1 s_2)$  et appliquant 2.3 aux deux premiers facteurs, on trouve que  $\varphi K^*$  contient le produit  $(b)(as'_3 cs'_4)(s'_1 s_2)$ . Donc, appliquant l'hypothèse d'induction aux deux derniers facteurs de ce produit, on obtient que  $\varphi K^*$  contient le produit  $(b)(as'_3 s_4)(s'_1 cs_2) = \varphi'$ . Maintenant comme  $a$  est la plus petite de toutes les pièces, le morphisme formé par les deux dernières lignes de  $\varphi'$  a la forme  $(\bar{c} \bar{s}_3) \bar{s}_2$  avec  $\bar{c} = a$ ,  $\bar{s}_3 = s'_3 s_4$  et  $\bar{s}_2 = s'_1 cs_2$ . On

peut donc lui appliquer la même opération que dans le cas 1 ci-dessus. On trouve que le produit de  $b$ ,  $\bar{s}_3$  et  $\bar{c}s_2$  est dans  $\varphi'K^*$ , donc dans  $\varphi K^*$ , c'est-à-dire que l'on a :

$$\varphi'' = (b)(s'_3 s'_4)(a s'_1 c s_2) \in \varphi K^* .$$

Ceci conclut la preuve car comme  $b$  est plus petit que toutes les pièces de  $s'_3 s'_4$ , la permutation de  $\varphi''$  est la même que celle du produit des deux lignes  $(b s'_3 s'_4)(a s'_1 c s_2) = (s_3 s_4)(s_1 c s_2) = \psi$ .

Q. E. D.

**THÉORÈME 2.4** (D. E. Knuth [8]). Chaque semi-orbite de glissement est une semi-orbite de Knuth.

Preuve. D'après nos définitions, il suffit de montrer que  $\chi' \in \chi K^*$  quand  $\chi'$  est obtenu par un seul glissement à partir du morphisme  $\chi$ .

Considérons la suite  $\chi_1 = \chi, \chi_2, \dots, \chi_h = \chi'$  des morphismes construits pour définir ce glissement. Il suffit d'établir  $\chi_{i+1} \in \chi_i K^*$  pour tout  $i$ . La permutation  $\sigma(\chi_i)$  est la même que la permutation associée au produit des lignes de  $\chi_i$ . Donc si  $\chi_{i+1}$  ne diffère de  $\chi_i$  que par le déplacement de la pièce  $c$  du point  $(x, y)$  au point  $(x-1, y)$ , on a  $\sigma(\chi_i) = \sigma(\chi_{i+1})$  et le résultat est établi pour cette paire. Si au contraire  $\chi_{i+1}$  est obtenu en faisant passer  $c$  de  $(x, y)$  en  $(x, y-1)$ , on peut se borner à considérer le produit des lignes  $y$  et  $y-1$  de  $\chi_i$  et  $\chi_{i+1}$  et le résultat découle de l'énoncé 2.3 bis.

Q. E. D.

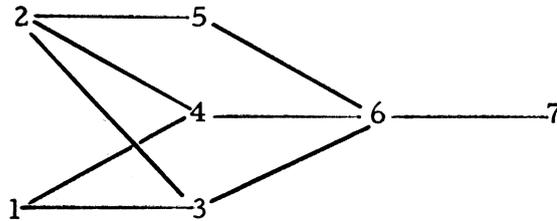
### 3. Le théorème de C. Green.

Etant donnés  $k \geq 1$  et  $\varphi \in \mathcal{M}_A$ , soit  $\mathcal{E}(\varphi; k)$  l'ensemble des parties de  $A$  qui sont unions de  $k$   $C_\varphi$ -chaînes et, comme indiqué dans l'introduction :

$$L_j(\varphi, k) = \text{Max} \{ \text{Card } E : E \in \mathcal{E}(\varphi|_{A_j}; k) \}$$

où  $A_j$  est l'intervalle initial de  $A$  obtenu en lui enlevant ses  $j$  plus grandes pièces ( $j \geq 0$ ) (et où, par conséquent,  $A_0 = A$ ;  $A_m = \emptyset$  pour  $m \geq \text{Card } A$ ). Par

exemple, si  $\varphi = \begin{matrix} 2 & 5 & \cdot & \cdot \\ 1 & 4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & 6 & 7 \end{matrix}$ , le graphe de  $C_\varphi$  est représenté par



et la partie significative de la fonction  $L(\varphi)$  est fournie par la Table :

$j =$	0	1	2	3	4	5	6	7	.	.	.
$k = 1$	4	3	2	2	2	1	1	0	.	.	.
$k = 2$	6	5	4	4	3	2	1	0	.	.	.
$k = 3$	7	6	5	4	3	2	1	0	.	.	.
$k = 4$	7	6	5	4	3	2	1	0	.	.	.
...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

**THÉORÈME 3.1** (C. Green [5]). On a  $L(\varphi) = L(\psi)$  pour chaque  $\psi$  de l'orbite de  $\varphi$ .

Preuve. Puisque les orbites sont définies par itération de glissements et de glissements inverses il suffit de considérer le cas où  $\psi$  est un glissement de  $\varphi$ .

D'après 2.1 (5) on a alors que chaque  $\psi|_{A_j}$  est égal à un glissement de  $\varphi|_{A_j}$  ou à  $\varphi|_{A_j}$  lui-même. Par conséquent, il suffit d'établir  $L_0(\varphi) = L_0(\psi)$  ce qui a

été démontré par C. Green dont nous reproduisons le raisonnement pour la commodité du lecteur.

D'après le théorème 2.4 de D. E. Knuth et le fait que  $\mathcal{E}(\varphi; k)$  ne dépend que de l'ordre  $C_\varphi$ , on peut se limiter au cas où  $\varphi$  et  $\psi$  sont respectivement des produits de la forme  $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$  et  $\varphi_1(\varphi_2 K)\varphi_3$  ainsi qu'on l'a dit pour définir  $K^*$ .

Supposons d'abord  $\varphi_2 = \begin{smallmatrix} a & c \\ \cdot & b \end{smallmatrix}$  et  $\varphi_2 K = \begin{smallmatrix} c & \cdot \\ a & b \end{smallmatrix}$  où, on le rappelle,  $a < b < c$ . On a  $C_\psi \subset C_\varphi$  et  $C_\varphi \setminus C_\psi = \{(a, c)\}$ . Par conséquent, pour chaque  $k \geq 1$ , l'ensemble  $\mathcal{E}(\psi, k)$  est contenu dans  $\mathcal{E}(\varphi, k)$  (d'où  $L_0(\psi; k) \leq L_0(\varphi; k)$ ) et la partie  $E$  ne peut appartenir au second mais non au premier de ces ensembles que si elle contient une chaîne de la forme  $sacs'$ . Si  $b$  n'appartient pas à une chaîne de  $E$ , le fait que  $a < b < c$  entraîne que  $sabs'$  soit une  $C_\psi$ -chaîne, donc que  $E' = (E \setminus sacs') \cup sabs'$  soit une union de  $k$   $C_\psi$ -chaînes disjointes. Si au contraire  $E$  contient une chaîne  $tbt'$ , on voit de même que  $sabt'$  et  $tcs'$  sont deux  $C_\psi$ -chaînes. Donc  $E' = (E \setminus \{sacs', tbt'\}) \cup \{sabt', tcs'\}$  appartient à  $\mathcal{E}(\psi; k)$ . Dans les deux hypothèses  $\text{Card } E = \text{Card } E'$  et l'on a donc vérifié  $L_0(\psi) = L_0(\varphi)$ , dans le premier cas de Knuth.

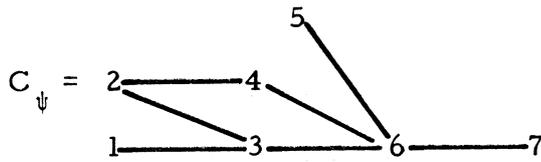
Le second cas où  $\varphi_2 = \begin{smallmatrix} b & c \\ \cdot & a \end{smallmatrix}$  et  $\varphi_2 K = \begin{smallmatrix} b & \cdot \\ a & c \end{smallmatrix}$  est traité de façon symétrique puisque l'on a alors  $C_\varphi \subset C_\psi \setminus C_\varphi = \{(a, c)\}$ . Le résultat est donc prouvé dans tous les cas.

Q. E. D.

Par exemple, faisant subir au morphisme  $\varphi$  ci-dessus le glissement de sommet (1, 1) on obtient

$$\psi = \begin{matrix} 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \end{matrix}$$

pour lequel



Le lecteur pourra vérifier l'invariance de la fonction  $L$  associée.

On observera qu'un résultat légèrement plus fort a été établi, à savoir que si  $\psi$  appartient à la semi-orbite de  $\varphi$ , il correspond à chaque  $E \in \mathcal{E}(\varphi, k)$  un  $E' \in \mathcal{E}(\psi, k)$  ayant la propriété qu'il existe une bijection  $a \rightarrow a'$  de  $E$  sur  $E'$  telle que  $a' \leq a$ , identiquement. J'ignore si cette propriété suffit pour caractériser les morphismes de l'orbite de  $\varphi$  qui appartiennent à sa semi-orbite. Elle montre en tout cas que  $\begin{smallmatrix} a & c \\ \cdot & b \end{smallmatrix}$  n'appartient pas à la semi-orbite de  $\begin{smallmatrix} c & \cdot \\ a & b \end{smallmatrix}$  ( $a < b < c$ ), ce qui présente un certain intérêt en raison du fait (établi plus bas) que ceci reste vrai pour tout morphisme contenant ces configurations.

Dans la suite de ce travail nous désignerons par  $\mathcal{L} = \bigcup_{0 \leq n} \mathcal{L}_n$  la famille des fonctions  $L(\varphi)$  ( $\varphi \in \mathcal{M}$ ),  $\mathcal{L}_n$  étant la sous-famille de celles qui, de façon équivalente, satisfont  $L_0(k) = n$  pour tout  $k \geq n$  ou  $L_j(k) = 0$  pour tout  $j \geq n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire qui correspondent à des morphismes dont le domaine a  $n$  points.

Introduisons la notation  $\mathcal{P}_A$  pour désigner les morphismes de  $\mathcal{M}$  d'image  $A$  dont le domaine est un intervalle principal de point minimum  $(1, 1)$ . Soit  $n = \text{Card } A$ .

3.2. A chaque  $L \in \mathcal{L}_n$  correspond un et un seul morphisme principal  $\psi$  de  $\mathcal{P}_A$  pour lequel  $L = L(\psi)$ . Son domaine est déterminé par  $L_0$  et la position de la pièce  $\text{Max } A$  est déterminée par  $L_0$  et  $L_1$  seulement.

Preuve. Par hypothèse  $L = L(\varphi)$  où  $\varphi \in \mathcal{M}_A$ . D'après 2.2, la semi-orbite de  $\varphi$  contient au moins un morphisme principal  $\psi$  et d'après le théorème précédent on

$$a \quad L(\psi) = L(\varphi) .$$

Nous pouvons supposer que  $\psi \in \mathcal{P}_A$  et il ne reste plus qu'à montrer que  $\psi$  est déterminé de façon unique par sa fonction  $L$ . Tout d'abord, puisque  $\psi$  est un morphisme, toutes les pièces d'une  $C_\psi$ -chaîne doivent se trouver dans des colonnes différentes. Donc  $L_0(\psi; k)$  est au moins égal à la somme des longueurs de  $k$  lignes de  $\psi$  ( $k \geq 1$ ). De fait  $L_0(\psi; k)$  est exactement égal à la somme des longueurs des  $k$  plus longues lignes de  $\psi$  puisque chaque ligne est une  $C_\psi$ -chaîne. Comme par hypothèse le domaine  $F$  de  $\psi$  a la forme d'un diagramme de Ferrers ceci montre qu'il est entièrement déterminé par la fonction  $L_0$ .

Soit maintenant  $A_1 = A \setminus a$  où  $a = \text{Max } A$ . Le point  $p = a\psi^{-1}$  est un point maximal de  $F$ . Donc le domaine  $F' = F \setminus p$  de  $\psi|_{A_1}$  est aussi principal. D'après la première partie de la preuve, il est déterminé par  $L_1(\psi) = L_0(\psi|_{A_1})$  et l'on a donc  $a\psi^{-1} = F \setminus F'$ , le résultat s'en déduit par induction sur  $\text{Card } A$ .

Q.E.D.

Par exemple tous les morphismes  $\varphi$  dont le domaine est l'intervalle principal

$$\begin{array}{cccc} & x & & \\ x & x & & \\ x & x & x & x \end{array} \quad \text{satisfont}$$

$$L_0(\varphi; 1) = 4 \quad ; \quad L_0(\varphi; 2) = 4 + 2 = 6 \quad ; \quad L_0(\varphi; k \geq 3) = 4 + 2 + 1 = 7 .$$

Selon que la pièce  $\text{Max } A$  se trouve dans la première, deuxième ou troisième ligne, on a :

$$L_1(\varphi, 1) = 3 \text{ ou } 4 \text{ ou } 4 \quad ; \quad L_1(\varphi, 2) = 5 \text{ ou } 5 \text{ ou } 6 \quad \text{et} \quad L(\varphi_1, k \geq 3) = 6 \quad \text{dans les trois cas.}$$

Notons  $\equiv$  l'équivalence sur  $\mathcal{M}$  telle que  $\varphi \equiv \psi$  ssi  $L(\varphi) = L(\psi)$  et si ces deux morphismes ont même image. Le corollaire suivant résume les propriétés

dont nous aurons besoin. Nous faisons référence à l'introduction pour la définition des involutions  $\varphi \rightarrow \varphi^T$  et  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ .

3.3. Les classes de l'équivalence  $\equiv$  sont les orbites. Supposant  $\varphi \equiv \psi$  on a :

- (1)  $\varphi$  et  $\psi$  ne diffèrent que par une translation si leurs domaines sont principaux ;
- (2)  $\varphi^T \equiv \psi^T$  ;  $\bar{\varphi} = \bar{\psi}$  et  $\varphi|B \equiv \psi|B$  pour tout intervalle  $B$  de leur image ;
- (3)  $\varphi\varphi' \equiv \psi\psi'$  quels que soient  $\varphi'$  et  $\psi'$  tels que  $\varphi' \equiv \psi'$  .

Preuve. Le théorème de C. Green montre que  $\varphi \equiv \psi$  quand ces deux morphismes appartiennent à la même orbite et 3.2 montre que cette équivalence satisfait (1).

Réciproquement, d'après 2.2 on peut trouver dans les semi-orbites de deux morphismes quelconques  $\varphi$  et  $\psi$  des morphismes principaux ayant même point minimum de leur domaine. Si de plus  $L(\varphi) = L(\psi)$ , ces morphismes principaux sont égaux d'après (1) et par conséquent  $\varphi$  et  $\psi$  sont dans une même orbite.

Les relations (2) découlent directement des assertions (3), (4) et (5) de 2.1. puisque les classes de  $\equiv$  sont les orbites.

Pour vérifier (3) nous pouvons supposer que les domaines  $F$  et  $F'$  de  $\varphi$  et de  $\varphi'$  forment une  $C$ -partition de leur union. Il existe alors des morphismes principaux  $\rho \equiv \varphi$  et  $\rho' \equiv \varphi'$  dont un produit  $\rho\rho'$  est contenu dans la semi-orbite de  $\varphi\varphi'$  et satisfait  $\rho\rho' \equiv \varphi\varphi'$ . Ceci permet de supposer désormais que  $\varphi = \rho$ ,  $\varphi' = \rho'$  et que  $\psi$  et  $\psi'$  eux aussi sont principaux. D'après (1),  $\varphi$  et  $\psi$  sont égaux à des translations près et il en est de même de  $\varphi'$  et  $\psi'$ . On a donc  $C_\varphi = C_{\psi'}$ ,  $C_{\varphi'} = C_{\psi}$ , d'où enfin  $C_{\varphi\varphi'} = C_{\psi\psi'}$ , d'après 1.2. ce qui implique l'équivalence cherchée.

Q. E. D.

Rappelons la notation  $\mathcal{P}$  pour désigner la sous-famille des morphismes principaux de  $\mathcal{M}$  dont  $(1, 1)$  est le point minimum de domaine. L'énoncé précédent justifie la

**DÉFINITION.** La correspondance de Robinson est la projection  $R$  de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{P}$  envoyant chaque morphisme sur l'unique morphisme de son orbite qui appartienne à  $\mathcal{P}$ .

3.4. On a les formules :

- (1)  $\varphi^T R = (\varphi R)^T$  ;  $\overline{\varphi} R = (\overline{\varphi R}) R$  ;
- (2)  $(\varphi | A') R = (\varphi R | A') R$  pour chaque intervalle  $A'$  de l'image de  $\varphi$  où  
 $(\varphi R | A') R = \varphi R | A'$  quand  $A'$  est un intervalle initial ;
- (3)  $(\varphi \psi) R = (\varphi R \cdot \psi R) R$  où le domaine de  $(\varphi \psi) R$  contient celui de  $\varphi R$  et de  $\psi R$  .

Preuve. Par définition les relations  $\varphi \equiv \psi$  et  $\varphi R = \psi R$  sont équivalentes. Donc (1) et (2) sont seulement une reformulation de l'énoncé précédent, puisque  $\varphi R | A'$  est principal avance  $A'$  est un intervalle initial de l'image de  $\varphi$ . La seconde assertion de (3) résulte de 3.2 et du fait évident que quelques soient les les morphismes  $\varphi$  et  $\psi$  (d'images disjointes) on a  $L_0(\varphi \psi) \geq L_0(\varphi)$  ,  $L_0(\psi)$  .

Q.E.D.

On observera que le théorème de Green montre directement à travers son corollaire 3.4 que le sous-ensemble  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{M}$  peut être muni d'une structure de monoïde en définissant le produit  $\pi$  de deux morphismes  $\varphi, \psi$  de  $\mathcal{M}$  par  $\pi = (\varphi \psi) R$  (avec la convention  $OR = O$ ) . Il serait convenable de nommer ce résultat théorème de Schensted puisque l'associativité de ce produit peut être facilement établie en établissant le cas particulier  $((a\varphi)Rb)R = (a((\varphi b)R))R$  ( $a, b \in A$  ,  $\varphi \in \mathcal{P}$ ) ce qui a été effectué directement par cet auteur [13] .

Nous complétons cette section par quelques remarques.

3.5. Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_A$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi \equiv \psi$  est que  $L_0(\varphi|B_j) = L_0(\psi|B_j)$  pour tous les termes  $B_j$  d'une suite strictement décroissante maximale  $B_0 = A \supset B_1 \supset \dots \supset B_n = \emptyset$  d'intervalles de  $A$ .

Preuve. D'après (2) de 3.3 cette condition est nécessaire. Réciproquement, chaque  $B_i$  est par hypothèse un intervalle de  $B_j$  pour  $j \leq i$ . On peut donc procéder par induction sur  $n = \text{Card } A$  et supposer que  $\varphi|B_1 \equiv \psi|B_1$ . Si  $A \setminus B_1 = a$  est la plus grande pièce de  $A$ , l'énoncé résulte directement de 3.2. Sinon, comme  $B_1$  est un intervalle de  $A$ , la pièce  $a$  doit être la plus petite de celui-ci. Toujours d'après 3.2, on peut supposer que  $\varphi, \psi, \varphi|B_1$  et  $\psi|B_1$  ont des domaines principaux de point minimum  $(1, 1)$ . Donc  $\varphi|B_1 = \psi|B_1$  ont même domaine  $F'$  et comme  $\varphi = \varphi|B_0, \psi = \psi|B_0$ , on déduit de  $L_0(\varphi|B_0) = L_0(\psi|B_0)$  et de 3.2 que  $\varphi$  et  $\psi$  ont le même domaine principal  $F$ . On a évidemment  $L_0(\varphi|B) = L_0(\varphi)$  et par conséquent  $F \setminus F'$  est un point maximal  $p$  de  $F$ . Par définition,  $\varphi|B_1$  est déduit de  $\varphi$  en enlevant la pièce  $a = \text{Min } A$  du point  $(1, 1)$  et en effectuant le glissement de sommet  $(1, 1)$ . Comme cette opération est invertible on retrouve  $\varphi = \psi$  en appliquant à  $\varphi|B_1 = \psi|B_1$  le glissement inverse de sommet  $p$ .

Q.E.D.

Une partie substantielle des preuves des résultats des chapitres suivants utilise la transformation envoyant chaque morphisme  $\varphi$  de  $\mathcal{P}$  (c'est-à-dire tel que  $\varphi = \varphi R, \varphi \in \mathcal{M}$ ) sur le morphisme  $\bar{\varphi} R$  qui appartient évidemment aussi à  $\mathcal{P}$ . Cette opération change en  $-A$  l'image  $A$  de  $\varphi$  ce qui peut être incommode et pour y remédier nous définirons  $\varphi^J$  comme l'image de  $\bar{\varphi} R$  par l'isomorphisme  $\Omega$  de la chaîne  $-A$  sur la chaîne  $A$ . Autrement dit  $a \rightarrow (-a) \Omega (= \bar{a})$  est l'anti-isomorphisme  $a \rightarrow \bar{a}$  de la chaîne  $A$  sur elle-même.

Par exemple si  $\varphi = \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{matrix}$  on a  $\bar{\varphi} = \begin{matrix} -3 & -1 \\ -5 & -4 & -2 \end{matrix}$  et par conséquent  $\varphi^J = \begin{matrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix}$  puisqu'ici  $-i\Omega = 6-i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ).

Dans l'énoncé suivant on note  $A^{(m)}$  (resp.  $A_m$ ) l'intervalle final (resp. initial) de  $A$  formé des  $n-m$  plus grandes (resp. plus petites) pièces de  $A$  et on emploie le même symbole  $\Omega$  pour désigner l'isomorphisme entre  $A^{(m)}$  et  $A_m$  ( $m = 0, 1, \dots, n = \text{Card } A$ ). En application des formules de 3.4 on a :

3.6. L'opération  $\varphi \rightarrow \varphi^J$  est une involution sur chaque  $\mathcal{P}_A(F)$  qui commute avec la transposition et qui satisfait identiquement les relations

$$\varphi^J |_{A_m} = ((\varphi |_{A^{(m)}})R\Omega)^J \quad \underline{\text{équivalentes à}} \quad \overline{\varphi R |_{-A^{(m)}}} = \overline{(\varphi |_{A^{(m)}})R} \quad (0 \leq m \leq n).$$

Preuve. Soient  $\varphi$  un morphisme de  $\mathcal{P}_A(F)$  et  $\psi = \overline{\varphi}R$ . On sait (1.1.) que l'involution  $a \rightarrow -a$  établit un anti-isomorphisme entre l'ordre  $C_\varphi$  (sur  $A$ ) et l'ordre  $C_{\overline{\varphi}}$  (sur  $-A$ ). Donc  $L_0(\varphi) = L_0(\overline{\varphi}) = L_0(\psi)$  et comme le domaine  $F$  de  $\varphi$  est principal par hypothèse on conclut en vertu de 3.2 que  $F$  est aussi le domaine de  $\psi$ . Donc  $\varphi^J$  appartient à  $\mathcal{P}_A(F)$ .

Comme l'application  $\chi \rightarrow \overline{\chi}$  ( $\chi \in \mathcal{M}$ ) est une involution sur la famille des orbites et qu'elle commute avec la transposition, on a immédiatement que  $\varphi = \overline{\psi}R$  d'où  $\varphi^{JJ} = \varphi$  et que  $\overline{\varphi}^T R = \psi^T$  d'où  $\varphi^{JT} = \varphi^{TJ}$ .

Maintenant comme  $-A^{(m)}$  est un intervalle initial de l'image  $-A$  de  $\psi$  et que  $\psi = \psi R$ , on a  $\psi |_{-A^{(m)}} \in \mathcal{P}$ , c'est-à-dire que  $\psi |_{-A^{(m)}}$  est l'image par  $R$  de la restriction à  $-A^{(m)}$  d'un morphisme quelconque de l'orbite de  $\psi$  (en raison de 3.3(2)) donc en particulier de  $\overline{\varphi}$ .

Comme  $\overline{\varphi} |_{-A^{(m)}}$  est trivialement égal à  $\overline{\varphi |_{A^{(m)}}}$ , on a par conséquent  $\psi |_{-A^{(m)}} = (\overline{\varphi} |_{-A^{(m)}})R = \overline{(\varphi |_{A^{(m)}})R}$  ce qui est la seconde des identités énoncées. La première s'en déduit facilement en observant que  $\varphi^J |_{A_m}$  ne diffère de  $\overline{\varphi R} |_{-A^{(m)}}$  que par un isomorphisme entre les images et qu'il en est de même des membres de droites des deux relations de par la définition même de l'isomorphisme.

me  $\Omega$ .

Q.E.D.

Cet énoncé fournit une justification directe de l'algorithme suivant de calcul de  $\varphi^J$  (cf. [14]p. 57-59). Soient  $A = \{a_1 < a_2 \dots < a_n\}$  et  $\varphi_0 = \varphi$ . Pour chaque  $m = 1, \dots, n$ , on calcule  $\varphi_m$  en enlevant la pièce  $a_m$  du point minimum  $(1, 1)$  du domaine de  $\varphi_{m-1}$  et en effectuant ensuite le glissement de  $\varphi_{m-1}$  de sommet  $(1, 1)$ , ce qui libère un point maximum  $q_m$  du domaine de  $\varphi_{m-1}$ . On pose alors  $q_m \varphi^J = \bar{a}_m = a_{n+1-m}$ .

Par exemple si  $\varphi = \begin{matrix} 3 & 4 & \cdot \\ 1 & 2 & 5 \end{matrix} = \varphi_0$  on obtient  $\varphi^J = \begin{matrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$  à la suite des opérations suivantes :

$$\varphi_1 = \begin{matrix} 3 & * \\ 2 & 4 & 5 \end{matrix} ; \quad \varphi_2 = \begin{matrix} * \\ 3 & 4 & 5 \end{matrix} ; \quad \varphi_3 = \begin{matrix} 4 & 5 & * \end{matrix} ; \quad \varphi_5 = \begin{matrix} 5 & * \end{matrix} .$$

Le lecteur pourra vérifier que le morphisme  $\overline{\varphi R}$  est (à une translation près) l'unique morphisme de l'orbite de  $\varphi$  dont le domaine est co principal (c'est-à-dire possède un point maximum unique) ce qui est une autre manière de formuler la dualité  $\varphi \rightarrow \varphi^J$ .

La structure de celle-ci est loin d'être entièrement éclaircie. Ainsi j'ai observé (sans pouvoir le démontrer) que si deux morphismes  $\varphi$  et  $\psi$  de  $\mathcal{P}$  ne diffèrent que par la transposition de deux pièces consécutives (dans leur image) les morphismes  $\varphi^J$  et  $\psi^J$  ne diffèrent que par une permutation de leurs pièces consistant en un cycle de longueur paire et des points fixes. Par exemple :

$$\varphi = \begin{matrix} 6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & 5 & 7 & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \psi = \begin{matrix} 6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & 5 & 8 & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{matrix}$$

diffèrent par la transposition  $(7, 8)$  cependant que

$$\varphi^J = \begin{array}{cccc} 6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & 7 & 8 & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \quad \text{et} \quad \psi^J = \begin{array}{cccc} 6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 7 & \cdot \\ 1 & 3 & 5 & 8 \end{array}$$

se déduisent l'un de l'autre par la permutation circulaire (2, 3, 5, 8, 7, 4).

L'algorithme précédent peut être formulé dans un cadre moins spécial (qui contient aussi celui décrit au début de la section suivante). La technique est discutée dans un travail (à paraître) présenté au Colloque d'analyse combinatoire de l'Accademia dei Lincei en 1974.

Le dernier énoncé de cette section utilise la dualité  $\varphi \rightarrow \varphi^J$  pour établir un résultat combinatoire servant de base au théorème d'Aitken. Nous rappelons que  $\hat{J}^1$  désigne la famille des domaines principaux de point minimum (1, 1). Une écriture telle que  $\lambda \in \mathcal{P}_m(F)$  signifiera que le domaine de  $\lambda$  est l'intervalle principal  $F$  de la famille  $\hat{J}^1$  et que  $m = \text{Card } F$ .

3.7. Soient  $F$ ,  $G$  et  $H$  trois intervalles de  $\hat{J}$ ,  $\lambda_1 \in \mathcal{P}_m(F)$  et  $\rho_1 \in \mathcal{P}_p(G)$ .

On suppose que  $H$  contient  $F$  et  $G$ . Il existe une bijection entre les ensembles

$$V(\lambda_1; G; H) = \lambda_1 R^{-1} \cap \mathcal{M}_m(H \setminus G) \quad \text{et} \quad V(\rho_1; F; H) = \rho_1 R^{-1} \cap \mathcal{M}_p(H \setminus F).$$

Preuve. Par définition on a  $m = \text{Card } F$ ,  $p = \text{Card } G$  et les ensembles considérés sont vides sauf si  $\text{Card } H = m+p (= n)$  ainsi que nous le supposons désormais.

Soit  $A = [n]$ . Soit  $U(\lambda_1, \rho_1)$  l'ensemble des morphismes  $\varphi \in \mathcal{P}_A(H)$  tels que

$\varphi|_G = \rho_1^J$  et  $(\varphi|_{H \setminus G})R\Omega = \lambda_1$  où  $\Omega$  est l'isomorphisme de l'intervalle

$A^{(m)} = A \setminus [p]$  sur  $A_m = [m]$  dans les notations de 3.6. L'ensemble  $U(\rho_1, \lambda_1)$

est défini de façon symétrique.

Il y a bijection entre  $V(\lambda_1; G; H) = V$  et  $U(\lambda_1, \rho_1)$  puisque nous pouvons associer à chaque  $\lambda \in V$  l'unique  $\varphi \in U(\lambda_1, \rho_1)$  tel que  $\varphi|_G = \rho_1^J$  et  $\varphi|_{H \setminus G} = \lambda \Omega^{-1}$  et réciproquement. Il en est de même pour  $V(\rho_1, F, H)$  et  $U(\rho_1, \lambda_1)$  et il suffit de montrer  $\varphi^J \in U(\rho_1, \lambda_1)$  pour chaque  $\varphi \in U(\lambda_1, \rho_1)$  pour obtenir la bijection cherchée puisque  $J$  est une involution et que les ensembles sont

définis de façon symétrique.

Soit donc  $\varphi$  comme ci-dessus. D'après 3.6, la restriction de  $\varphi^J$  à  $A_m$  est égale à  $((\varphi|_{A^{(m)}})R\Omega)^J$  donc à  $\lambda_1^J$  puisque par construction

$$\varphi|_{A^{(m)}} = \varphi|_{H \setminus G} = \lambda \Omega^{-1} \quad \text{où } \lambda R = \lambda_1.$$

On en déduit que  $\varphi^J|_{A_m} = \varphi|_F$  donc que  $\varphi|_{A^{(p)}} = \varphi|_{H \setminus F}$  puisque  $A^{(p)} = [n] \setminus [m] = A \setminus A_m$ . Appliquons le même énoncé à  $\varphi^J$  et  $p$  au lieu de  $\varphi$  et  $m$ .

Comme  $\varphi^{JJ} = \varphi$  on obtient que  $\varphi^{JJ}|_{A^{(p)}} = ((\varphi^J|_{A^{(p)}})R\Omega)^J$  (avec ici  $\Omega : A^{(p)} \rightarrow A_p = [p]$ ). Dans cette relation on a  $\varphi^{JJ} = \varphi$  et, par construction,  $\varphi|_{A_p} = \rho_1^J$ . En outre, comme on vient de le voir,  $\varphi^J|_{A^{(p)}} = \varphi^J|_{H \setminus F}$ . Comme  $J$  est une involution on a la conclusion désirée  $\rho_1 = (\varphi^J|_{H \setminus F})R\Omega$ .

Q.E.D.

Comme les deux ensembles  $V$  ont le même nombre d'éléments et que le premier (resp. le second) ne dépend pas du choix du morphisme  $\rho_1$  (resp.  $\lambda_1$ ), ce nombre, que nous désignerons par  $g(F, G; H)$ , ne dépend que des intervalles  $F, G$  et  $H$  et ceci de façon symétrique en  $F$  et  $G$ . Comme de plus  $R$  commute avec la transposition on peut résumer l'énoncé précédent par l'identité suivante, dans laquelle on suppose  $g(F, G; H) = 0$  si les conditions de 3.7 ne sont pas satisfaites.

$$3.7. \text{ bis} \quad g(F, G; H) = g(G, F; H) = g(F^T, G^T; H^T).$$

Nous verrons plus loin que les  $g$  sont les paramètres de structure de la multiplication des fonctions de Schur.

Je mentionne enfin une construction dont le seul intérêt est de manifester une propriété de continuité curieuse de l'opération  $R$ .

Considérons un intervalle  $F$  du plan, un morphisme bijectif  $\varphi : F \rightarrow [n]$ , deux entiers positifs  $p$  et  $q$  et un système  $(\rho)$  de  $n$  morphismes bijectifs

$\rho_{i,j}$   $((i, j) \in F)$  dont les domaines sont l'intervalle rectangulaire du plan  $[p] \times [q]$  et les images, la chaîne  $[pq]$ .

Soit  $G$  l'intervalle du plan formé des points de la forme  $(ip+k, jq+k')$  où  $(i, j) \in F$  et  $(k, k') \in [p] \times [q]$ . On définit le produit en couronne de  $(\rho)$  dans  $\varphi$  comme le morphisme bijectif  $\psi$  de domaine  $G$  tel que l'on ait identiquement :

$$(ip+k, jq+k')\psi = (i, j)\varphi.n + (k, k')\rho_{i,j}$$

Ceci fait on a la remarque suivante dont la preuve ne fait pas intervenir d'idées nouvelles et est omise :

3.8. Si  $\psi$  est le produit en couronne de  $(\rho)$  dans  $\varphi$ , alors  $\psi R$  est le produit en couronne de  $(\rho)$  dans  $\varphi R$ .

#### 4. Le théorème de Robinson.

Nous commençons par un calcul dû initialement à  $G.$  de B. Robinson qui l'a présenté dans [12] au moyen du formalisme des "lattice permutations" (dont la possibilité de la traduction immédiate en termes de tableaux ne semble pas toujours avoir été perçue). La formulation ci-dessous est celle de Schensted [4] avec une simplification due à Knuth [9]. Nous rappelons que  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des morphismes  $\varphi$  de  $\mathcal{M}$  tels que  $\varphi = \varphi R$ , c'est-à-dire dont le domaine est un intervalle principal de point minimum  $(1, 1)$ .

4.1. (1) Si  $b \in A$  et  $\varphi \in \mathcal{P}_{A \setminus b}$ , le domaine de  $(\varphi b)R$  est l'union de celui de  $\varphi$  et d'un point ;

(2) Réciproquement, si  $\psi \in \mathcal{P}_A(F)$  il correspond à chaque point maximal  $p$  de son domaine une et une seule paire  $b \in A$ ,  $\varphi \in \mathcal{P}(F \setminus p)$  telle que  $\psi = (\varphi b)R$ .

Preuve. Supposons que  $b$  et  $\varphi$  satisfont les conditions de (1).

Si  $b$  est plus grande que toutes les pièces de la première ligne  $\varphi_1$  de  $\varphi$  on a  $C_{\varphi b} = C_{\psi}$  où  $\psi = \psi R$  est obtenu en mettant  $b$  à la fin de  $\varphi_1$ . Donc  $\psi = (\varphi b)R$  et le résultat est établi dans ce cas.

Dans le cas contraire on construit une suite  $b_0 = b, b_1, \dots, b_k$  par la condition que chaque  $b_{i+1}$  soit la plus petite pièce  $> b_i$  de la ligne  $i$  de  $\varphi$  et que  $b_k$  soit le premier terme pour lequel la pièce obtenue soit plus grande que toutes les pièces de la ligne supérieure ou soit située sur la plus haute ligne de  $\varphi$ . Ceci fait, on définit  $\psi$  en remplaçant dans  $\varphi$  chaque  $b_{i+1}$  par  $b_i$  et en plaçant  $b_k$  à la fin de la ligne  $k+1$ . On vérifie que  $\psi = \psi R \in \mathcal{M}$ . Le fait que  $\psi = (\varphi b)R$  est établi par induction en observant que  $\varphi \equiv \varphi' \varphi_1$  où  $\varphi'$  est la restriction de  $\varphi$  aux lignes  $2, 3, \dots$  et en faisant appel à 2.3 qui montre que  $\varphi_1 b \equiv b_1 \psi_1$  d'où  $\varphi b \equiv \varphi' b_1 \psi_1$ .

(2) Réciproquement si le point  $p$  se trouve à l'extrémité de la ligne  $k+1$  de  $\psi$  on construit la suite  $b_k = p\psi^{-1}, b_{k-1}, \dots, b_0 = b$  où chaque  $b_i$  est la plus grande pièce  $< b_{i+1}$  de la ligne  $i$  de  $\psi$ . Effectuant la substitution inverse de celle faite dans (1) on trouve un morphisme  $\varphi = \varphi R$  et on vérifie que l'on a bien  $\psi = (\varphi b_0)R$  par le même argument que ci-dessus.

Q.E.D.

EXEMPLE.

$$\varphi = \begin{array}{cccc} 7 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 8 & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{array} \quad (\varphi 5)R = \begin{array}{cccc} 7 & 8 & \cdot & \cdot \\ 3 & 6 & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

Nous avons défini dans le chapitre des notations à la fin de l'introduction le sous-ensemble  $S_A^1 \subset \mathcal{M}$  des permutations d'image  $A$  comme l'ensemble des  $\sigma \in \mathcal{M}$  dont le domaine est formé des points  $p_i = (n+1-i, i)$  ( $1 \leq i \leq n = \text{Card } A$ ). Chaque permutation est donc un produit  $(p_1 \sigma) (p_2 \sigma) \dots (p_n \sigma)$ . Nous définissons son inverse  $\sigma^{-1}$  comme le produit  $\tau = c_1 c_2 \dots c_n \in S_n^1$  où pour chaque  $r = 1, 2, \dots, n$ , on a  $c_r = j$  ssi  $p_j \sigma$  est la  $r$ -ième pièce de  $A$  (par ordre

croissant). C'est donc l'inverse habituel quand  $A$  est la chaîne standard  $[n]$ .  
On a la formule importante :

4.2. Les ordres  $C_\sigma$  sur  $A$  et  $C_{\sigma^{-1}}$  sur  $[n]$  sont isomorphes.

Preuve. Soit  $b = p_i\sigma$  et  $b' = p_j\sigma$  respectivement la  $r$ -ième et la  $s$ -ième pièce de  $A$ . Par définition on a  $(b, b') \in C_\sigma$  ssi d'une part  $b \leq b'$ , c'est-à-dire  $r \leq s$ , et d'autre part  $(p_i, p_j) \in C$ , c'est-à-dire  $i \leq j$  et ces deux conditions équivalent donc à  $(c_r, c_s) \in C_{\sigma^{-1}}$ .

Q. E. D.

L'énoncé 4.2 est donc une simple reformulation du fait connu que  $\sigma \rightarrow \sigma^{-1}$  induit une bijection sur l'ensemble des paires en inversion.

Nous établissons maintenant le résultat le plus important de la théorie. Dans son énoncé  $\mathcal{L}_n^{(2)}$  désigne l'ensemble des paires de fonctions  $(L, L') \in \mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_n$  telles que  $L_0 = L'_0$ . Comme d'habitude  $\text{Card } A = n$ .

**THÉORÈME 4.3** (G. de B. Robinson). L'application  $\sigma \rightarrow (L(\sigma), L(\sigma^{-1}))$  est une bijection de  $S_A^1$  sur  $\mathcal{L}_n^{(2)}$ .

Preuve. On vient de voir que les ordres  $C_\sigma$  et  $C_{\sigma^{-1}}$  sont isomorphes ce qui entraîne immédiatement  $L_0(\sigma) = L_0(\sigma^{-1})$  et l'application est donc une application de  $S_A^1$  dans  $\mathcal{L}_n^{(2)}$ .

Réciproquement, considérons une paire  $(M, N) \in \mathcal{L}_n^{(2)}$  et montrons qu'il lui correspond une et une seule permutation  $\sigma \in S_A^1$  telle que  $M = L(\sigma)$ ,  $N = L(\sigma^{-1})$ .

Ceci est trivial pour  $n = 1$  et nous procédons par induction sur  $n \geq 2$ .

D'après 3.3 il existe une et une seule paire  $\varphi = \varphi R$ ,  $\psi = \psi R$  d'image  $[n]$  telle que  $M = L(\varphi)$ ,  $N = L(\psi)$ . Puisque  $M_0 = L_0$ , les morphismes  $\varphi$  et  $\psi$  ont même domaine  $F$ . De plus, d'après 3.2, la fonction  $M_1$  détermine le point maximum  $p$  de  $F$  où se trouve la pièce  $n$  dans  $\psi$ . D'après 4.1, il existe une et une seule paire  $(\varphi', b)$  où  $\varphi' = \varphi' R$  a pour domaine  $F \setminus p$  et  $b \in [n]$  telle que  $(\varphi' b) R = \varphi$ . Par construction la paire de fonctions  $(L(\varphi'), L(\psi|_{[n-1]}))$  appartient à  $\mathcal{F}_{n-1}^{(2)}$ . D'après la définition des fonctions  $L$ , la fonction  $L(\psi|_{[n-1]})$  est déterminée par  $M$  puisque c'est simplement la fonction  $M^+$  telle que  $M_j^+ = M_{j+1}$  ( $j = 0, 1, \dots$ ).

D'après l'hypothèse d'induction il existe une et une seule permutation

$\tau' = b'_1 \dots b'_{n-1}$  de  $S_{n-1}^1$  qui soit telle que

$$L(\tau') = L(\varphi') \quad \text{et} \quad L(\tau'^{-1}) = M^+.$$

Nous définissons maintenant la permutation  $\tau = b_1 \dots b_n$  de  $S_n^1$  en posant  $b_n = b$  (où  $b$  est la pièce obtenue plus haut) et pour chaque  $i \leq n-1$ ,  $b_i = b'_i$  où  $1 + b'_i$  selon que  $b_i < b$  ou  $b_i > b$ . Comme  $b'_i \rightarrow b_i$  est un isomorphisme on a bien  $\varphi = \tau R$ , donc  $N = L(\tau)$  et comme  $b_n = b$  est le dernier élément du produit  $\tau$  on a  $M = L(\tau^{-1})$ .

L'unicité de cette permutation  $\tau$  est une conséquence immédiate du caractère biunivoque de chacune des étapes de sa construction. On obtient enfin  $\sigma \in S'_A$  en posant  $\sigma = \tau \Omega^{-1}$  où  $\Omega$  est l'isomorphisme de  $[n]$  sur  $A$ .

Q. E. D.

Une formulation équivalente de ce théorème est l'assertion que l'application  $RR : \sigma \rightarrow (\sigma R, \sigma^{-1} R)$  est une bijection de  $S_n^1$  sur l'ensemble des paires de morphismes de  $\mathcal{P}_n$  ayant même domaine. Je fais référence au remarquable travail de G. Viennot [20] pour une interprétation géométrique de ces résultats.

Nous signalons maintenant quelques propriétés de cette correspondance en employant les notations  $J$  et  $\Omega$  définies à la fin de la section 3. On pose  $\bar{b} = (-b)\Omega$  ( $b \in [n]$ ) où  $\Omega$  est ici l'isomorphisme de  $-[n]$  sur  $[n]$ . Par conséquent  $b \rightarrow \bar{b}$  est simplement l'anti-isomorphisme de la chaîne  $[n]$  sur elle-même. Les relations de (1) ci-dessous dans lesquelles  $J$  n'intervient pas sont dues à Schensted [14].

4.3. Soient  $\sigma = b_1 b_2 \dots b_n \in S_A^1$  une permutation et  $(\varphi, \psi) = \sigma RR$ . On a :

$$(1) \quad \begin{aligned} (\bar{b}_n \bar{b}_{n-1} \dots \bar{b}_1)RR &= (\varphi^J, \psi^J) \\ (b_n b_{n-1} \dots b_1)RR &= (\varphi^T, \psi^{JT}) \\ (\bar{b}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)RR &= (\varphi^{JT}, \psi^T). \end{aligned}$$

(2) Si  $\beta = b_1 \dots b_p$  et  $\gamma = b_{p+1} \dots b_n$  sont une factorisation de  $\sigma$ , on a  $\beta^{-1}R = \psi|[p]$  et  $\gamma^{-1}R = (\psi|[n] \setminus [p])R\Omega$  où  $\Omega : [n] \setminus [p] \rightarrow [n-p]$ .

Preuve. Comme  $b_n \dots b_1 = \sigma^T$  et comme la transposition commute avec  $R$  on a

$(b_n \dots b_1)R = \varphi^T$ . D'autre part, d'après les définitions de l'involution  $\chi \rightarrow \bar{\chi}$  ( $\chi \in \mathcal{M}$ ) et de l'isomorphisme  $\Omega : -[n] \rightarrow [n]$  on a  $\bar{\sigma}\Omega = \bar{b}_n \dots \bar{b}_2 \bar{b}_1$ , donc  $(\bar{b}_n \dots \bar{b}_2 \bar{b}_1)R = \varphi^J$  en raison de la définition de  $J$  et de l'identité  $\bar{\chi}R = (\overline{\chi R})R$ .

La troisième formule  $(\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)R = \varphi^{JT}$  résulte des deux précédentes puisque  $J$  et  $T$  commutent.

Pour établir les formules concernant  $\psi$  il suffit de vérifier l'une d'elles et d'utiliser la dualité  $\sigma \rightarrow \sigma^{-1}$ . Le plus simple est de noter que si  $\sigma' = \bar{b}_n \dots \bar{b}_2 \bar{b}_1$  on a de façon équivalente,  $\sigma'^{-1} = (\sigma^{-1})^T$  d'où  $(\bar{b}_n \dots \bar{b}_2 \bar{b}_1)RR = (\varphi^{JT}, \psi^T)$ .

La deuxième partie de l'énoncé résulte de ce que  $\beta^{-1}$  est la restriction de  $\sigma^{-1}$  à l'intervalle initial  $[p]$  de son image et que, de même,  $\gamma^{-1}$  est la restriction de  $\sigma^{-1}$  au complément de  $[p]$ .

Q. E. D.

4.4. La correspondance  $\sigma \rightarrow \sigma R$  établit une bijection entre les involutions sur  $[n]$  et la famille  $\mathcal{P}$  telle que le nombre des points fixes de  $\sigma$  est égal au nombre des colonnes de longueur impaire de  $\sigma R$ .

Preuve. La permutation  $\sigma$  est une involution ssi  $\sigma = \sigma^{-1}$ , donc d'après le théorème de Robinson, ssi  $\sigma R = \sigma^{-1}R$  ce qui établit la première partie de l'énoncé.

En ce qui concerne la seconde nous procédons par induction sur  $[n]$  et nous considérons une involution  $\sigma = b_1 b_2 \dots b_n$ . Si  $b_n = n$ ,  $\sigma$  a un point fixe de plus que l'involution  $\sigma' = b_1 \dots b_{n-1}$  et le morphisme  $\sigma R$  a une colonne impaire de plus que  $\sigma'R$  puisque d'après 4.1,  $\sigma R = (\sigma'n)R$  est obtenu en ajoutant la pièce  $n$  à la fin de la première ligne de  $\sigma'R$ , ce qui crée une nouvelle colonne de longueur 1.

Soit maintenant  $b_n = m \neq n$ . Nous considérons  $\sigma'$  comme ci-dessus et l'involution  $\tau$  sur  $A = [n] \setminus \{n, m\}$  obtenue en supprimant  $b_m = n$  et  $b_n = m$  dans le produit  $\sigma$ . Comme  $n$  est une pièce maximale,  $\tau R$  est la restriction de  $\sigma'R$  à  $A$ ; c'est-à-dire que  $\tau R$  se déduit de  $\sigma'R$  en retranchant la pièce  $n = b_m$  qui se trouve au point  $q$  du domaine  $F$  de  $\sigma'$ .

D'autre part, toujours d'après 4.1, on voit que  $\sigma R = (\sigma'm)R$  a pour domaine l'union de  $F$  et d'un point  $p$ . Comme  $\sigma R = \sigma^{-1}R$  ce point  $p$  porte la pièce maximale  $n$  de l'image  $[n]$  de  $\sigma^{-1}$ . Autrement dit, l'opération  $\sigma'R \rightarrow (\sigma'm)R$  déplace la pièce  $n$  du point  $q$  au point  $p$  qui se trouve donc dans la ligne immédiatement supérieure à celle de  $q$ . Si  $p$  et  $q$  sont dans la même colonne, les domaines  $F \cup p$  de  $\sigma$  et  $F \setminus q$  de  $\tau$  ont le même nombre de colonnes impaires, d'où le résultat par induction puisque  $\tau$  a, par construction, le même nombre de points fixes que  $\sigma$ .

Si au contraire  $p = (i, j)$  et  $q = (i', j')$  sont dans deux colonnes distinctes, c'est-à-dire si  $i \neq i'$ , ces deux points sont des points maximaux de  $F \cup p$  et les

longueurs de ces colonnes sont  $j$  et  $j' = j-1$ , donc de parités différentes. Par conséquent le domaine  $F \setminus q$  de  $\tau$  a encore le même nombre de colonnes impaires que celui de  $\sigma$ .

Q. E. D.

En particulier  $R$  établit une bijection entre les involutions sans points fixes et les morphismes  $\varphi$  de  $P$  dont toutes les colonnes du domaine ont une longueur paire. Une autre bijection a été découverte par W. H. Burge ([3]) entre ces involutions et les morphismes  $\varphi$  de  $P$  dont le domaine a la forme  $\{\alpha\}$  de Littlewood (cf. [3]). Je n'ai pas réussi à trouver le cadre dans lequel la construction de Burge est naturelle.

L'énoncé suivant est associé à 3.7.

4.5. Soient  $F, G$  deux domaines principaux de  $\hat{J}^1$  de cardinaux respectifs  $m$  et  $p$ ,  $\chi \in \mathcal{P}_n(H)$  et  $\lambda_1 \in \mathcal{P}_m(F)$ . L'ensemble  $W(F, G; \chi) = \{(\rho, \lambda) \in \mathcal{P}(G) \times \mathcal{P}(F) : (\rho\lambda)R = \chi\}$  est non vide ssi  $n = m+p$  et  $F, G \subset H$ . S'il en est ainsi, il est en bijection avec l'ensemble  $\lambda_1 R^{-1} \cap \mathcal{M}_m(H \setminus G)$ .

Preuve. Supposons  $(\rho, \lambda) \in W$ . La condition  $(\rho\lambda)R = \chi \in \mathcal{P}_n(H)$  implique évidemment que les images  $B$  et  $C$  de  $\rho$  et de  $\lambda$  forment une partition de  $A = [n]$ , donc que  $n = m+p$ . Le fait que  $H$  contient  $F$  et  $G$  résulte de 3.4 (2).

Choisissons arbitrairement un morphisme  $\rho_1 \in \mathcal{P}_p(G)$ . D'après le théorème de Robinson il existe une et une seule permutation  $\beta$  d'image  $B$  telle que  $\beta R R = (\rho, \rho_1)$  (resp.  $\gamma$  d'image  $C$  telle que  $\gamma R R = (\lambda, \lambda_1)$ ). Soit  $\sigma$  un produit  $\beta\gamma$ . Par construction on a  $\sigma R = (\beta R \cdot \gamma R)R = (\rho\lambda)R = \chi$ . Considérons  $\psi = \sigma^{-1}R$ . D'après 4.3  $(\psi|[p])R = \beta^{-1}R = \rho_1$  et  $(\psi|[n] \setminus [p])R = \gamma^{-1}R = \lambda_1$ . Par conséquent pour chaque  $\rho_1$  arbitrairement choisi la correspondance  $(\rho, \lambda) \rightarrow (\psi|[n] \setminus [p])R$  est une application de  $W$  dans  $\lambda_1 R^{-1} \cap \mathcal{M}_m(H \setminus G)$ .

Réciproquement, supposant donné  $\lambda$  dans ce dernier ensemble, on définit  $\psi \in \mathcal{P}_n(H)$  par ses restrictions  $\psi|_{[p]} = \rho_1$ ;  $\psi|_{[n] \setminus [p]} = \lambda \Omega^{-1}$  et on obtient  $\sigma$  comme l'unique permutation telle que  $\sigma R R = (\varphi, \psi)$ . La factorisation  $\sigma = \beta \gamma$  est déterminée sans ambiguïté par les longueurs  $p$  et  $n-p = m$  de  $\beta$  et de  $\gamma$  et on obtient la paire  $(\beta R, \gamma R)$  de  $W(F, G; \chi)$ .

Q. E. D.

Il résulte de l'existence de cette bijection que  $W$  est indépendant du choix de  $\chi$  dans  $H$  et on écrira plutôt  $W(F, G; H)$ . Il existe une bijection évidente avec  $W(F^T, G^T; H^T)$ . L'énoncé 3.7 permet d'en établir une autre avec  $W(G, F; H)$ . Enfin 4.5 lui-même signifie que  $g(F, G; H) = \text{Card } W(F, G; H)$ .

On indiquera dans la section suivante comment ces relations se traduisent en termes d'identités dans l'algèbre des fonctions de Schur. Ceci motive la recherche d'un algorithme facilitant le calcul des nombres  $g(F, G; H)$  c'est-à-dire, essentiellement, du nombre des tableaux  $\psi$  de domaine  $H \setminus G$  tels que  $\psi R$  ait pour domaine l'intervalle principal  $F$ . Cet algorithme est connu sous le nom de "règle de Littlewood-Richardson". Nous en exposons maintenant la base combinatoire en utilisant une idée de A. Lascoux et une technique de preuve suggérée par D. Foata.

Nous considérons désormais une partition non croissante fixe

$\nu = \{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k > 0\}$  de l'entier  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ . Elle définit une partition de la chaîne  $[n]$  en intervalles successifs  $I_1, \dots, I_k$  de longueurs respectives  $n_1, \dots, n_k$  et un intervalle principal  $F = F_\nu$  dont les longueurs des colonnes sont les  $n_i$ . Le morphisme  $\chi = \chi_\nu$  de domaine  $F$  tel que les pièces de l'intervalle  $I_i$  soient dans la  $i$ -ème colonne de  $F$  ( $1 \leq i \leq k$ ) sera appelé le morphisme naturel de  $\nu$ .

Par exemple le morphisme naturel de  $\nu = (3, 2, 2, 1)$  est

$$\chi = \begin{array}{cccc} & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 2 & 5 & 7 & \cdot \\ & 1 & 4 & 6 & 8 & \cdot \end{array}$$

Soit maintenant  $A$  une chaîne ayant  $n$  éléments.

4.6. Si  $\varphi: F \rightarrow A$  est un morphisme bijectif, la permutation  $\tau = \tau_\varphi$  telle que  $(\tau R, \tau^{-1} R) = (\varphi, \chi)$  est celle obtenue en lisant  $\varphi$  par colonnes (de haut en bas et de gauche à droite).

Preuve. La pièce  $n$  se trouve au point  $(k, n_k)$  du tableau naturel  $\chi$ . Donc, d'après l'algorithme de Robinson, le dernier élément de la permutation  $\tau$  est la pièce  $a' = (k, 1)_\varphi$ . Soient  $\nu' = (n_1, n_2, \dots, n_{k-1})$  et  $\varphi'$  le morphisme de domaine  $F_{\nu'}$  et d'image  $A \setminus a'$  obtenu en enlevant  $a'$  et en abaissant d'un pas toutes les autres pièces situées dans la  $k$ -ième colonne de  $\varphi$ . On a  $\tau = \tau' a'$  où  $\tau'$  est la permutation de  $A \setminus a'$  telle que  $(\tau' R, \tau'^{-1} R) = (\varphi', \chi_{\nu'})$  (où  $\chi_{\nu'}$  dénote évidemment le morphisme naturel de  $\nu'$ ). Par induction sur  $n$ ,  $\tau'$  a la forme voulue, ce qui établit le résultat.

Q.E.D.

Par exemple si  $\varphi = \begin{array}{cccc} & 7 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 3 & 5 & 8 & \cdot \\ & 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}$  on trouve que  $\tau = \tau_\varphi = (7\ 3\ 1\ 5\ 2\ 8\ 4\ 6)$ .

Le lecteur observera que la permutation  $\tau = \tau_\varphi$  qui vient d'être construite en lisant  $\varphi$  "par colonnes" n'est pas la permutation  $\sigma = \sigma(\varphi)$  définie dans l'introduction par la lecture successive des lignes de  $\varphi$  (de gauche à droite et de bas en haut). Dans l'exemple précédent on aurait  $\sigma(\varphi) = (7\ 3\ 5\ 8\ 1\ 2\ 4\ 6)$ . C'est  $\sigma(\varphi)$  qui sera utilisée dans l'énoncé suivant. Auparavant nous associons à la même partition  $\nu$  le morphisme  $\omega = \omega_\nu$  de  $[n]$  sur  $[k]$  envoyant chaque intervalle  $I_i \subset [n]$  sur  $i \in [k]$ . Par conséquent si  $\sigma = s_1 s_2 \dots s_n$  est une permutation de  $[n]$  son image  $\sigma\omega = s_1\omega \cdot s_2\omega \dots s_n\omega$  a pour multidegré  $\nu$  (en ce sens que le nombre  $|\sigma\omega|_i$  d'occurrences de chaque  $i \in [k]$  dans  $\sigma\omega$  est exactement  $n_i$ ). De plus nous désignons

par  $Y$  l'ensemble des mots  $x = x_1 x_2 \dots x_n$  sur l'alphabet  $[k]$  qui satisfont la condition que pour chaque  $m \leq n$  et  $i \leq k-1$  le nombre des occurrences de  $i$  dans le facteur gauche  $x_1 \dots x_m$  soit au moins égal à celui des occurrences de  $i+1$ . Ces mots sont les "lattice permutations" de MacMahon et G. de B. Robinson. Suivant l'usage des physiciens nous les appellerons mots de Yamanouchi.

Par exemple si  $k = 2$ , le sous-ensemble des mots de  $Y$  de multidegré  $(3, 2)$  est formé des 5 mots :

$$\{11122, 11212, 11221, 12112, 12121\}.$$

La condition  $Y$  implique que le multidegré soit une partition ordonnée et signifie que, pour chaque lettre  $i$ , la  $j$ -ème occurrence de celle-ci dans le mot précède la  $j$ -ème occurrence de la lettre  $i+1$  pour tout  $j \leq n_{j+1}$ .

Ceci permet de définir la famille  $Y'_\nu$  des permutations  $\sigma = s_1 s_2 \dots s_n$  de  $[n]$  telles que, d'une part,  $\sigma\omega$  soit un mot de Yamanouchi de multidegré  $\nu$  et que, d'autre part, on ait  $s_i > s_j$  quand  $i < j$  et  $s_i\omega = s_j\omega$ . On a alors :

4.7. L'ensemble  $\chi R^{-1}$  est formé des morphismes bijectifs  $\psi$  d'image  $[n]$  et de domaine quelconque tels que leur permutation (par ligne)  $\sigma = \sigma(\psi)$  appartienne à  $Y'_\nu$ .

Preuve. Comme  $(\sigma(\psi))R$  est égal à  $\psi R$  il suffit d'établir que la condition  $\sigma \in Y'_\nu$  caractérise les permutations  $\sigma$  pour lesquelles  $\sigma R$  est le morphisme naturel  $\chi$ . D'après l'énoncé précédent on sait d'autre part que  $\sigma R = \chi$  ssi son inverse  $\sigma^{-1}$  est la permutation  $\tau_\varphi$  obtenue en lisant "par colonne" un tableau  $\varphi$  de domaine  $F$  et d'image  $[n]$ .

Considérons d'abord une telle permutation  $\tau = \tau_\varphi$  et vérifions que son inverse  $\sigma = \tau^{-1}$  appartient bien à  $Y'_\nu$ . Par définition  $\tau$  envoie chaque intervalle  $I_i$  de  $[n]$  sur l'ensemble  $C_i$  des pièces figurant dans la  $i$ -ème colonne de  $\varphi$ . Donc

$C_i \sigma = I_i$  et  $C_i \sigma \omega = i$  ( $i \in [k]$ ) ce qui montre que  $\sigma$  a le multidegré  $\nu$ . De plus pour chaque  $i \leq k-1$  et  $j \leq n_{i+1}$ , la pièce  $x$  située dans  $\varphi$  dans la colonne  $j$  et la ligne  $i$  est plus petite que la pièce  $y$  située juste en dessus. Comme  $x$  (resp.  $y$ ) est la  $j$ -ième lettre de  $\sigma$  dont l'image par  $\omega$  soit  $i$  (resp.  $i+1$ ), la condition  $Y$  est vérifiée par  $\sigma \omega$ .

Réciproquement, soient  $\sigma \in Y'_\nu$  et  $\tau$  son inverse. La dernière condition caractérisant  $Y'_\nu$  montre que la restriction de  $\tau$  à chaque  $C_i = \{j : j\sigma\omega = i\}$  est un mot dont les lettres vont en décroissant de gauche à droite et que  $C_i$  a  $n_i$  éléments puisque  $\sigma\omega$  est de multidegré  $\nu$ .

La condition que  $\sigma\omega$  est un mot de Yamanouchi implique que pour chaque  $i \leq k-1$  et  $j \leq n_{j+1}$  la  $j$ -ième lettre  $x$  de  $\sigma$  dont l'image par  $\omega$  est  $i$  soit plus petite que la  $j$ -ième lettre  $y$  dont l'image est  $i+1$ . Il en résulte que la bijection  $\varphi : F \rightarrow [n]$  dont les colonnes sont les  $C_i$  est un morphisme et le résultat est établi puisque  $\tau = \tau_\varphi$  par construction.

Q.E.D.

Reprenant le même exemple que plus haut où  $\tau = (7 \ 3 \ 1 \ 5 \ 2 \ 8 \ 4 \ 6)$ , on a  $\tau^{-1} = \sigma = (3 \ 5 \ 2 \ 7 \ 4 \ 8 \ 1 \ 6)$  dont l'image par  $\omega$  est  $(1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 1 \ 3) \in Y'_\nu$ .

##### 5. Connexion avec les fonctions de Schur.

Nous commençons par compléter l'outillage combinatoire. Si  $\varphi$  est un morphisme de  $\mathcal{M}$ , une file de  $\varphi$  est un intervalle maximal  $B$  de son image qui est une  $C_\varphi$ -chafne. Par exemple les files de

$$\varphi = \begin{array}{cccc} 10 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & 9 & 12 & \cdot \\ \cdot & 1 & 4 & 7 \end{array} \quad \text{sont}$$

$$B_1 = (1, 4), B_2 = (5, 7, 8), B_3 = (9), B_4 = (10, 12).$$

Il est clair que les files de  $\varphi$  constituent une partition ordonnée (de façon naturelle) de son image  $A$  et qu'elles sont déterminées sans ambiguïté par la donnée de  $A$  et de la suite (dite suite de files)  $N(\varphi) = (n_1, n_2, \dots, n_k)$  du nombre de leurs éléments ( $N(\varphi) = (2, 3, 1, 2)$  dans l'exemple ci-dessus).

5.1. Soit  $N(\varphi) = (n_1, \dots, n_k)$  la suite de files d'un morphisme  $\varphi$  de  $\mathcal{M}_n$ . Alors :

- (1)  $N(\varphi) = N(\varphi R)$  ;
- (2)  $N(\overline{\varphi}) = (n_k, \dots, n_1)$  et  $N(\varphi^T)$  sont déterminées par  $N(\varphi)$  ;
- (3) Quand  $\varphi$  est une permutation  $\sigma$ , les longueurs des facteurs croissants maximaux de  $\sigma^{-1}$  sont  $n_1, \dots, n_k$ .

Preuve. (1) Soit  $B$  un intervalle de l'image  $[n]$  de  $\varphi$ . Il est contenu dans une file de  $\varphi$  ssi il est contenu dans une  $C_\varphi$ -chaîne, c'est-à-dire, de façon équivalente ssi  $(\varphi|B)R$  se réduit à une seule ligne d'où le résultat d'après la formule  $(\varphi R|B)R = (\varphi|B)R$  de 3.4.2.

(2) La première assertion résulte immédiatement de l'anti-isomorphisme entre les ordres  $C_\varphi$  et  $C_{\overline{\varphi}}$ . La seconde utilise une observation qui présente un intérêt plus général.

Soient  $a < b$  deux pièces de  $A$  qui n'appartiennent ni à une file de  $\varphi$  ni à une file du morphisme transposé  $\varphi^T$ . Posant  $p = a\varphi^{-1} = (x, y)$  et  $q = b\varphi^{-1} = (x', y')$ , ceci équivaut à  $(p, q) \notin C$  et  $(p^T, q^T) \notin C$ , c'est-à-dire à :

$$\text{NON } (x \leq x' \text{ et } y \geq y') \text{ et } \text{NON } (y \leq y' \text{ et } x \geq x')$$

c'est-à-dire encore à :

$$(x > x' \text{ ou } y < y') \text{ et } (x < x' \text{ ou } y > y')$$

soit enfin à :

$$(x > x' \text{ et } y > y') \text{ ou } (x < x' \text{ et } y < y').$$

La première alternative est exclue puisque  $\varphi$  est un morphisme et puisque  $a (= (x, y)\varphi) < b (= (x', y')\varphi)$ . On a donc  $x < x'$  et  $y < y'$  et comme le domaine de  $\varphi$  est un intervalle ce dernier contient deux points  $r = (x, y')$  et  $s = (x', y)$  satisfaisant  $p < r$ ,  $s < q$ . Utilisant de nouveau le fait que  $\varphi$  est un morphisme, on en déduit enfin qu'il existe deux pièces  $c = r\varphi$  et  $d = s\varphi$  telles que  $a < c$ ,  $d < b$ .

Par conséquent deux pièces consécutives de la chaîne  $A$  appartiennent à une file de  $\varphi$  ou à une file de  $\varphi^T$ . Comme de plus les ordres  $C_\varphi$  et  $C_{\varphi^T}$  ont une intersection triviale on obtient le résultat que les files de  $\varphi^T$  sont les intervalles maximaux de  $A$  pour lesquels toutes les pièces appartiennent à des files de  $\varphi$  différentes, et vice versa.

(3) Ceci résulte immédiatement de l'isomorphisme entre  $C_\sigma$  et  $C_{\sigma^{-1}}$  et du fait que les intervalles initiaux de longueur  $m$  ( $m \leq n$ ) de l'image de  $\sigma$  correspondent aux facteurs gauches de même longueur de la permutation inverse  $\sigma^{-1}$ .

Q.E.D.

Soit par exemple  $\varphi = \begin{matrix} 7 & 9 & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & 8 & \cdot \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix}$ . Ses files sont  $(1\ 2)$ ,  $(3\ 4\ 5\ 6)$ ,  $(7\ 8)$ ,  $(9)$  et  $N(\varphi) = (2, 4, 2, 1)$ . La permutation associée  $\sigma = \sigma(\varphi)$  est  $7\ 9\ 3\ 4\ 8\ 1\ 2\ 5\ 6$  dont l'inverse  $\sigma^{-1}$  est  $6\ 7\ 3\ 4\ 8\ 9\ 1\ 5\ 2$ . Les facteurs croissants maximaux de  $\sigma^{-1}$  ont bien pour longueur 2, 4, 2 et 1. Le morphisme transposé  $\varphi^T$  a pour files  $(1)\ (2\ 3)\ (4)\ (5)\ (6\ 7)\ (8\ 9)$  ( $N(\varphi^T) = (1, 2, 1, 1, 2, 2)$ ). La permutation associée est  $6\ 5\ 2\ 1\ 8\ 4\ 3\ 9\ 7$  dont l'inverse est  $4\ 3\ 7\ 6\ 2\ 1\ 9\ 5\ 8$  dont les longueurs des facteurs croissants maximaux sont bien 1, 2, 1, 1, 2, 2. (cf. les relations discutées dans 4.3).

En raison de son importance pour la suite nous isolons le fait suivant.

5.2. Tous les morphismes (bijectifs) de chaque orbite de glissement ont la même suite de files.

Preuve. Ceci résulte immédiatement de (1) ci-dessus.

Q.E.D.

La réciproque est évidemment fautive comme le montre l'exemple (minimal) des deux-morphismes principaux

$$\begin{array}{ccc} 4 & \cdot & \cdot \\ 2 & 6 & \cdot \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \text{ et } \begin{array}{ccc} 6 & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & \cdot \\ 1 & 3 & 5 \end{array}$$

qui ont la même suite de files (1, 2, 2, 1).

Ces notions permettent d'appliquer une partie de considérations développées dans les sections précédentes à une famille  $\tilde{\mathfrak{M}}$  généralisant celle des morphismes bijectifs. Nous appellerons les éléments de  $\tilde{\mathfrak{M}}$  les morphismes verticalement injectifs. Comme on le verra ils correspondent aux monômes intervenant dans les fonctions de Schur.

**DÉFINITION.** A étant une chaîne et F un intervalle du plan,  $\tilde{\mathfrak{M}}_A(F)$  est la famille des morphismes  $\alpha$  de domaine F dont l'image est une partie de A et dont la restriction à chaque colonne de F est injective.

Autrement dit  $\alpha$  appartient à  $\tilde{\mathfrak{M}}$  ssi aucune pièce ne figure plus d'une fois dans une même colonne. Par exemple le morphisme  $\alpha = \begin{array}{ccc} 6 & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 6 \\ \cdot & \cdot & 2 \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ 5 \end{array}$  appartient à  $\tilde{\mathfrak{M}}_A$  pour toute chaîne A contenant 2, 5 et 6.

Le multidegré  $|\alpha|$  d'un morphisme  $\alpha$  de la famille  $\tilde{\mathfrak{M}}_A$  des morphismes

de  $\tilde{\mathfrak{M}}$  dont l'image est contenue dans  $A$  est la fonction donnant le nombre d'occurrences  $|\alpha|_a$  de chaque  $a \in A$  dans  $\alpha$ .

Il est clair que la notion de produit définie dans l'introduction s'étend de façon naturelle à  $\tilde{\mathfrak{M}}$  et que le multidegré d'un produit est la somme des multidegrés de ses facteurs. Les morphismes de  $\mathfrak{M}$  peuvent donc être caractérisés comme les éléments multilinéaires de  $\tilde{\mathfrak{M}}$ .

Nous établissons maintenant une correspondance très simple entre les deux familles.

Soit  $\alpha \in \tilde{\mathfrak{M}}_A(F)$ . L'ensemble  $A \times \mathbb{N}$  est une chaîne pour l'ordre lexicographique : ses éléments sont simplement les pièces de  $A$  indexées. On associe à  $\alpha$  un morphisme bijectif  $\alpha'$  de domaine  $F$  dont l'image est une partie  $A'$  de  $A \times \mathbb{N}$  en indexant pour chaque pièce chacune de ses occurrences dans l'ordre croissant en lisant  $\alpha$  de gauche à droite. Par exemple si

$$A = \{a, b, c, d, e, f\} \quad \text{et} \quad \alpha = \begin{array}{cccc} & c & \cdot & \cdot & \cdot \\ & b & e & f & f \\ & \cdot & b & b & c \end{array}$$

on obtient

$$\alpha' = \begin{array}{cccc} & c1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & b1 & e1 & f1 & \cdot \\ & \cdot & b2 & b3 & c2 \end{array} .$$

Ceci fait, si  $\Omega$  est le morphisme bijectif de  $A'$  sur  $[n]$  ( $n = \text{Card } F$ ), l'application  $\varphi = \alpha' \Omega$  est un morphisme bijectif de  $F$  sur  $[n]$  que l'on notera  $\alpha P$ . De plus si  $\gamma'$  est le morphisme naturel de  $A'$  dans  $A$  consistant à oublier les indices et  $\gamma = \Omega^{-1} \gamma'$ , on a la relation

$$\alpha P \Omega^{-1} \gamma' = \alpha' \gamma' = \alpha .$$

Dans l'exemple précédent on trouve  $\alpha P = \begin{array}{ccc} & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & 6 & 7 & \cdot \\ & \cdot & 2 & 3 & 5 \end{array}$  et  $\gamma$  est défini par  $a_{\gamma^{-1}} = d_{\gamma^{-1}} = \emptyset$  ;  $b_{\gamma^{-1}} = \{1, 2, 3\}$  ;  $c_{\gamma^{-1}} = \{4, 5\}$  ;  $e_{\gamma^{-1}} = \{6\}$  ;  $f_{\gamma^{-1}} = \{7\}$ .

Par construction chaque  $a_{\gamma^{-1}}$  ( $a \in A$ ) est un intervalle de  $[n]$  et le multidegré

de  $\alpha$  est défini par  $\gamma$ .

Par construction aussi chaque  $a\gamma^{-1}$  ( $a \in A$ ) est contenu dans une file de  $\alpha'$  et comme celles-ci sont en bijection par  $\Omega$  avec celles de  $\alpha^P$  on a la remarque importante que chaque file de  $\alpha^P$  est une union de parties de la forme  $a\gamma^{-1}$  ( $a \in A$ ).

Il en résulte que l'on peut retrouver pour chaque morphisme bijectif  $\varphi : F \rightarrow [n]$  l'ensemble  $\varphi^P^{-1}$  des morphismes  $\alpha \in \tilde{\mathcal{M}}_A(F)$  tels que  $\varphi = \alpha^P$ . Pour ceci il suffit de considérer la suite  $(B_1, \dots, B_k)$  des files de  $\varphi$  et la famille  $\Gamma_\varphi$  des morphismes  $\gamma$  de  $[n]$  dans  $A$  tels que  $a\gamma^{-1}$  soit contenu dans une file,  $B_i$ , pour chaque  $a \in A$ . Comme les pièces d'une même file sont dans des colonnes distinctes par définition, le morphisme  $\varphi_\gamma = \alpha$  ( $\gamma \in \Gamma_\varphi$ ) est verticalement injectif et en construisant  $\alpha'$  on vérifie directement que  $\alpha^P$  est bien égal à  $\varphi$ .

Nous étendons aussi aux morphismes verticalement injectifs les opérations de glissement. Etant donné un tel morphisme  $\alpha$ , soit  $\alpha'$  le morphisme bijectif obtenu en indexant les occurrences d'une même pièce comme expliqué plus haut. Si  $\beta'$  appartient à l'orbite de  $\alpha'$ , l'énoncé 5.2 montre que ses files sont les mêmes que celles de  $\alpha'$ . Par conséquent le morphisme  $\beta'\gamma' = \beta$  obtenu en oubliant les indices dans  $\beta'$  est verticalement injectif et a même multidegré que  $\alpha$ . Nous dirons que  $\beta$  appartient à l'orbite de  $\alpha$ . De fait on voit sans peine que chaque opération de glissement peut être réalisée directement sur  $\alpha$  à condition d'appliquer la convention que si  $a'$  et  $a''$  sont deux occurrences d'une même pièce  $a$  de  $A$ , l'on considère que  $a' < a''$  chaque fois que  $a'$  se trouve à gauche de  $a''$ . Ainsi, par exemple, avec  $A = \{a, b\}$  les deux transformations élémentaires de Knuth (cf. section 2, énoncé 2.3) deviennent

$$\begin{array}{ccc} a & b & \\ \cdot & a & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} b & \cdot & \\ a & a & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} b & b & \\ \cdot & a & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} b & \cdot & \\ a & b & \end{array} .$$

Nous résumons cette discussion par l'énoncé suivant :

5.3. P est une projection de  $\tilde{\mathcal{M}}$  sur  $\mathcal{M}$  qui commute avec la correspondance R de Robinson et qui satisfait la condition que si  $\alpha_1 P = \alpha_2 P$  on a  $\alpha_1 = \alpha_2$  ssi  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ont même multidegré.

Preuve. Le fait que P commute avec R résulte immédiatement de ce que P commute avec les glissements qui ont été définis ci-dessus pour les morphismes de  $\tilde{\mathcal{M}}$ .

Supposons que  $\alpha_1, \alpha_2 \in \tilde{\mathcal{M}}$  soient tels que  $\alpha_1 P = \alpha_2 P = \varphi$ . Ainsi qu'on l'a vu,  $\alpha_i = \varphi \gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) où  $\gamma_i$  est un morphisme de la chaîne  $[n]$  ( $n = \text{Card Dom } \varphi$ ) dans  $A$ . Comme  $|\alpha_i|_a = \text{Card}(a\gamma_i^{-1})$  pour chaque  $a \in A$ , la donnée de ces nombres détermine entièrement  $\gamma_i$  puisque cette application est un morphisme. Donc  $|\alpha_1| = |\alpha_2|$  implique  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Q.E.D.

Une formulation plus intéressante consiste à considérer  $\tilde{\mathcal{M}}_A$  comme un monoïde par rapport au produit défini dans l'introduction et généralisé de la façon indiquée plus haut. Comme P commute avec R, on peut prendre le quotient de ce monoïde par la congruence dont les classes sont les orbites et puisque l'ensemble  $\tilde{\mathcal{M}}_A R = \{\alpha R : \alpha \in \tilde{\mathcal{M}}_A\}$  est une section de cette congruence d'après l'énoncé précédent, il est tolérable de désigner ce quotient par  $\tilde{\mathcal{M}}_A \tilde{R}$ . Autrement dit,  $\tilde{\mathcal{M}}_A \tilde{R}$  désigne si l'on veut l'ensemble  $\tilde{\mathcal{M}}_A R$  muni d'un produit défini par l'identité  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (\alpha_1 \alpha_2) R$ .

Dans ce qui suit on utilisera largement P et  $P^{-1}$  pour passer du cas général au cas multilinéaire (bijectif) qui est souvent plus commode à trafter. Une technique plus profonde (mais basée aussi implicitement sur la notion de file) est due à G. Thomas. L'outil essentiel est alors constitué par les opérateurs de Baxter ([18], [19]).

Soit d'autre part  $A^*$  le monoïde libre engendré par les éléments de la chaîne  $A$  (considérée comme un alphabet totalement ordonné).

**THÉORÈME 5.4** (D. E. Knuth, A. Lascoux). Il existe un isomorphisme naturel (préservant les multidegrés) entre les monoïdes  $\tilde{\mathcal{M}}_A \tilde{R}$  et le quotient de  $A^*$  par la congruence  $\equiv$  telle que :

$$a'b'a'' \equiv b'a'a'' \quad ; \quad b'b''a' \equiv b'a'b''$$

pour tout  $a', a'', b', b'' \in A$  satisfaisant  $a' \leq a'' < b' \leq b''$  .

Preuve. Soit  $\alpha \in \tilde{\mathcal{M}}_A$  . Si  $\alpha P = \varphi$  et  $\alpha = \varphi\gamma$  , on associe à  $\alpha$  le mot  $\sigma(\alpha) = \sigma(\varphi).\gamma \in A^*$  (où  $\sigma(\varphi)$  est la permutation associée à  $\varphi$ ) qui est obtenu en lisant ces lignes successives de haut en bas. Quand  $\alpha_1, \alpha_2 \in \tilde{\mathcal{M}}_A$  , le mot  $\sigma(\alpha_1\alpha_2)$  associé à leur produit est le produit des mots  $\sigma(\alpha_1)$  et  $\sigma(\alpha_2)$  associés à chacun d'eux. Ceci établit un morphisme  $\sigma$  préservant les multidegrés de  $\tilde{\mathcal{M}}_A$  dans  $A^*$  . De fait ce morphisme est surjectif puisque l'on peut associer à chaque mot  $a = a_1a_2 \dots a_n$  ( $a_j \in A$ ). Le morphisme de  $\tilde{\mathcal{M}}_A$  qui est le produit des morphismes  $\alpha_j$  dont l'image est  $a_j$  et le domaine un point unique,  $p_j$  , (ces points  $p_j$  étant disposés sur une chaîne pour l'ordre croisé). Comme  $R$  commute avec les glissements, le théorème 2.4 équivaut alors à l'assertion que  $\sigma$  est un isomorphisme de  $\tilde{\mathcal{M}}_A \tilde{R}$  sur  $A^*/\equiv$  puisque les transformations élémentaires de Knuth sont celles définissant la congruence  $\equiv$  .

Q. E. D.

Nous désignerons désormais par  $\mathbb{Z}(X)$ , pour tout ensemble  $X$  , le  $\mathbb{Z}$ -module de base  $X$  . Si  $X$  est un monoïde  $\mathbb{Z}(X)$  est une algèbre. Dans tous les cas on fera la convention habituelle de noter par la même écriture  $Y$  une partie de  $X$  et l'élément de  $\mathbb{Z}(X)$  qui est la somme des membres de  $Y$  . Par exemple  $\tilde{\mathcal{M}}_A (H \setminus G)$  désignera la somme dans  $\mathbb{Z}(\tilde{\mathcal{M}}_A)$  des morphismes verticalement injectifs

dont l'image est contenue dans  $A$  et dont le domaine est  $H \setminus G$ . Dans l'énoncé suivant,  $F, F', G, H, H'$  sont trois intervalles de la famille  $\hat{J}^1$  (des intervalles principaux de point minimum  $(1, 1)$ ); les nombres  $g(F, G; H)$  sont ceux définis dans 3.7 et l'on rappelle que  $g(F, G; H) = 0$  sauf si  $G, F \subset H$  et  $\text{Card } H = \text{Card } F + \text{Card } G$ .

5.5. Soient  $F, G$  et  $H$  trois intervalles de la famille  $\hat{J}^1$ . On a les identités suivantes dans  $\mathbb{Z}(\tilde{\mathcal{M}}_A)$ .

$$(1) \quad (\tilde{\mathcal{M}}_A(H \setminus G))R = \Sigma \{g(F', G; H) \cdot \tilde{\mathcal{M}}_A(F') : F' \in \hat{J}^1\}$$

$$(2) \quad (\tilde{\mathcal{M}}_A(F) \tilde{\mathcal{M}}_A(G))R = \Sigma \{g(F, G; H') \cdot \tilde{\mathcal{M}}_A(H') : H' \in \hat{J}^1\}.$$

Preuve. On peut supposer  $F, G \subset H$  et  $\text{Card}(H \setminus G) = \text{Card } F = m$ .

Le module  $\mathbb{Z}(\mathcal{M}_A)$  (des morphismes bijectifs d'image  $A$ ) est un module quotient de  $\mathbb{Z}(\tilde{\mathcal{M}}_A)$  obtenu en envoyant sur zéro tous les éléments dont le multidegré n'est pas  $(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ . Comme  $P$  commute avec  $R$ , il en est de même de  $P^{-1}$  et il suffit donc pour établir (1) de vérifier l'identité

$$(1 \text{ bis}) \quad (\mathcal{M}_m(H \setminus G))R = \Sigma \{g(F', G; H) \mathcal{M}_m(F') : F' \in \hat{J}^1\}$$

et d'appliquer  $P^{-1}$  aux deux membres. L'identité (1 bis) est elle-même une simple traduction de 3.7 ainsi que nous le montrons maintenant.

Soit  $\Lambda$  l'ensemble des morphismes de la forme  $\lambda R$  où  $\lambda \in \mathcal{M}_m(H \setminus G)$  et  $F'_{\lambda_1}$  le domaine de chaque  $\lambda_1 \in \Lambda$ . Rappelant la notation  $V(\lambda_1; G; H) = \lambda_1 R^{-1} \cap \mathcal{M}_m(H \setminus G)$ , ( $\lambda_1 \in \Lambda$ ), le membre de gauche de (1 bis) est égal à  $\Sigma \{V(\lambda_1; G; H)R : \lambda_1 \in \Lambda\}$ .

D'après 3.7 on sait que chaque ensemble  $V(\lambda_1; G; H)$  contient un nom-

bre d'éléments  $g(F'_{\lambda_1}, G; H)$  qui ne dépend que du domaine de  $\lambda_1$ . Puisque par définition l'image par  $R$  de chacun de ses éléments est  $\lambda_1$ , on voit que la somme précédente est égale à

$$\Sigma \{g(F'_{\lambda_1}, G; H)\lambda_1 : \lambda_1 \in \Lambda\} = \Sigma \{g(F, G; H) \cdot \mathfrak{m}_m(F) : F \in \hat{J}^1\}$$

puisque, de plus  $g(F, G; H)$  est nul quand  $F$  n'est pas le domaine de  $\lambda_1$ .

L'identité (2) se vérifie de façon analogue au moyen de l'énoncé 4.5. Soient  $m = \text{Card } F$ ,  $p = \text{Card } G$  et  $n = m+p$ . Puisque  $R$  et  $P^{-1}$  commutent, le membre de gauche de (2) est égal à  $\Sigma \{(\varphi\psi)R P^{-1} : (\varphi, \psi) \in W\}$  où  $W$  désigne l'ensemble des paires de morphismes bijectifs  $(\varphi, \psi)$  domaines respectifs  $F$  et  $G$  dont l'union des images est l'intervalle  $[n]$ . Pour chaque paire  $(\varphi, \psi)$  de  $W$  il existe un intervalle principal  $H' \in \hat{J}^1$  et un morphisme bijectif  $\chi = (\varphi\psi)R$  de domaine  $H'$ . D'après l'énoncé 4.5 on sait que pour un tel  $\chi$  l'ensemble  $W(F, G; \chi)$  des paires  $(\varphi, \psi) \in W$  telles que  $(\varphi\psi)R = \chi$  a un nombre d'éléments noté  $g(F, G; H')$  qui ne dépend que de son domaine  $H'$ . Donc le membre de gauche de (2) est égal à l'expression obtenue en appliquant  $P^{-1}$  à la somme  $g(F, G; H')\mathfrak{m}_n(H')$  étendue à tous les intervalles  $H' \in \hat{J}^1$  ayant  $n$  éléments, ce qui est précisément le membre de droite de cette identité.

Q. E. D.

Soit maintenant  $\mathfrak{S}_A$  l'ensemble des termes de l'algèbre quotient  $\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{m}}_A \tilde{R})$  qui ont la forme  $\tilde{\mathfrak{m}}_A(K)$  pour un intervalle principal  $K \in \hat{J}^1$  quelconque. Il est d'usage de coder  $K$  par la suite  $c(K) = c_1 c_2 \dots c_r$  des longueurs de ses colonnes et d'écrire  $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$  au lieu de  $\tilde{\mathfrak{m}}_A(K)$  quand il n'y a pas d'ambiguïté sur  $A$ . Utilisant l'isomorphisme entre les algèbres  $\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{m}}_A \tilde{R})$  et  $\mathbb{Z}(A^*/\equiv)$ , on trouve, par exemple, pour  $A = \{a, b\}$ ,  $K = \begin{smallmatrix} * & * \\ * & * \end{smallmatrix}$  que  $\{2, 1\} = b a a + b a b$  puisque  $a b a \equiv b a a$  et  $b b a \equiv b a b$ .

Quand les éléments de  $A^*$  sont des variables commutatives, les termes

de la forme  $\tilde{m}_A(K')$  où  $K'$  est un intervalle quelconque sont les fonctions de Schur classiques définies par  $K'$  en prenant comme définition celle fournie par le Théorème IX du chapitre X de Littlewood ([11]).

Il résulte immédiatement de la définition des morphismes verticalement injectifs que les termes  $\tilde{m}_A(K)$  de  $\mathfrak{S}_A$  pour lesquels le nombre des lignes de  $K$  excède Card A sont identiquement nuls (et que tous les autres sont positifs).

Par exemple si  $A = \{a, b\}$  les éléments de degré au plus trois de  $\mathfrak{S}_A$  sont :

$$\{1\} = a + b ; \{2\} = b a ; \{11\} = a a + a b + b b ; \{21\} = b a a + b a b \\ (\equiv a b a + a b b) \text{ et } \{1, 1, 1\} = a a a + a a b + a b b + b b b .$$

Pour  $A = \{a, b, c\}$  on trouve, par exemple :

$$\{2, 1\} = b a a + b a b + c a a + c a c + c b b + c b c + c a b + b a c ; \\ \text{et } \{3\} = c b a .$$

Les énoncés qui suivent constituent l'extension banale aux variables non commutatives de résultats de A. Lascoux.

**THÉORÈME 5.6 .** Le sous-monofde  $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_A)$  de  $\mathbb{Z}(\tilde{m}_A \tilde{R})$  est une algèbre commutative contenant tous les termes de la forme  $\tilde{m}_A(K)$  où  $K$  est un intervalle quelconque du plan, et la transposition  $K \rightarrow K^T$  induit un automorphisme de  $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_A)$ .

**Preuve.** Tous les morphismes apparaissant dans les membres de droite des identités (1) et (2) ci-dessus ont des domaines principaux et sont donc invariants pour  $R$ . Ceci signifie que (1) et (2) sont de fait des identités dans l'algèbre quotient  $\mathbb{Z}(\tilde{m}_A \tilde{R})$  et non pas seulement dans  $\mathbb{Z}(\tilde{m}_A)$ .

La première exprime que tout  $\tilde{m}_A(K)$  où  $K$  est un intervalle quelconque appartient au module  $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_A)$ . La seconde que ce même module contient le produit de deux termes de  $\mathfrak{S}_A$ . Par conséquent  $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_A)$  est une sous-algèbre de  $\mathbb{Z}(\tilde{m}_A \tilde{R})$ . La première égalité de l'identité (3.7 bis) signifie qu'elle est commutative puisque ses coefficients de structure satisfont l'identité  $g(F, G; H) = g(G, F; H)$ . La deuxième égalité de (3.7 bis) montre que la transposition  $H \mapsto H^T$  induit un automorphisme.

Q. E. D.

5.7. Pour chaque chaîne  $A$ , les termes non nuls de  $\mathfrak{S}_A$  forment une base (indépendante) du quotient commutatif du module  $(\mathfrak{S}_A)$ , donc du module  $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_A)$  lui-même.

Preuve. Pour chaque  $n$  on ordonne les intervalles principaux ayant  $n$  points par ordre lexicographique inverse de la suite (décroissante)  $(l_1, \dots, l_q)$  des longueurs de leurs lignes. Si  $K$  est l'intervalle décrit par cette suite on a  $e = \tilde{m}_A(K) \neq 0$  ssi  $\text{Card } A \geq q$  et, dans ce cas, la somme  $e$  contient un monôme dont le multidegré est  $(l_1, \dots, l_q)$ . Ce monôme ne peut pas apparaître dans une somme de la forme  $\tilde{m}_A(K')$  quand  $K'$  est un intervalle précédant strictement  $K$ . Par conséquent l'image de  $e$  dans le quotient commutatif de  $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_A)$  est linéairement indépendante des images des termes qui la précèdent, ce qui établit le résultat.

Q. E. D.

5.8. En tant qu'algèbre  $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_A)$  est engendrée par les termes correspondant aux intervalles du plan formés d'une seule colonne.

Preuve. A chaque intervalle principal  $H$  on associe la suite décroissante  $c(H) = c_1 c_2 \dots c_n$  des longueurs de ses colonnes et, pour chaque  $n \geq 0$  on ordonne les intervalles ayant ce nombre de points par ordre lexicographique opposé sur cette suite. Par conséquent, avec les notations déjà utilisées, on aura

$$\{n\} \langle \{n-1, 1\} \langle \dots \langle \{1, 1, \dots, 1\} ,$$

en employant le même ordre pour les termes  $\mathfrak{S}$  et les intervalles qui leur correspondent.

Procédant par induction sur  $n$  puis sur l'ordre  $\langle$ , on vérifie d'abord le résultat quand  $\text{Card } A$  est au moins égal à  $n$ .

Considérons un intervalle  $H$  tel que  $c(H) = c_1 c_2 \dots c_r$  ( $c_1 + c_2 + \dots + c_r = n$ ). D'après la formule (2) du théorème 5.5 il suffit de trouver deux intervalles  $F$  et  $G$  tel que d'une part  $g(F, G; H') \neq 0$  seulement si  $H' \langle H$  et que d'autre part  $g(F, G; H) = 1$ . Pour cela définissons  $F$  et  $G$  par la condition que  $c(F) = c_1 c_2 \dots c_{r-1}$  et que  $G$  soit constitué par une seule colonne de longueur  $c_r$ .

Soient  $\varphi: F \rightarrow B$  et  $\psi: G \rightarrow C$  deux morphismes bijectifs tels que  $\{B, C\}$  soit une partition de la chaîne  $[n]$ . Appliquant successivement à chacune des pièces de  $\psi$  la construction de Robinson décrite au début de la section 4, on vérifie facilement que  $(\varphi\psi)R$  est un morphisme dont le domaine  $H'$  est tel que si  $c(H') = c'_1 c'_2 \dots c'_r$  on a  $c'_i \geq c_i$  pour  $i \leq r-1$  et  $c'_r \leq c_r$ . En effet le domaine  $H'$  doit contenir  $G$  et le nombre de ses colonnes est au plus  $(r-1)+1 = r$  car, une fois introduite la première pièce de  $\psi$  (c'est-à-dire  $\text{Max } C$ ) toutes les autres pièces de  $C$  sont plus petites qu'au moins une pièce figurant dans la première ligne du morphisme considéré. Donc  $g(F, G; H')$  est non nul seulement si  $H' \langle H$ . De plus, d'après la même construction on a  $H' = H$  ssi  $C$  est l'ensemble des pièces figurant dans sa dernière colonne. D'après 3.7 ceci établit que  $g(F, G; H) = 1$  est par conséquent le résultat sous l'hypothèse que  $m = \text{Card } A \geq n$ .

Si celle-ci n'est pas satisfaite, les seuls termes non nuls de  $\mathfrak{S}_A$  sont ceux pour lesquels la longueur des colonnes n'excède pas  $m$ . Si  $H$  est un tel intervalle

l'expression de  $\tilde{m}_A(H)$  obtenue dans le cas général reste vraie et le résultat est donc établi dans tous les cas.

Q. E. D.

L'existence d'un automorphisme induit par la transposition implique que les "lignes" constituent aussi une base multiplicative de l'algèbre  $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_A)$ .

COROLLAIRE 5.9 . Le quotient commutatif de  $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_A)$  est une algèbre de fonctions symétriques des variables de  $A$ .

Preuve. Ceci résulte immédiatement de l'énoncé précédent puisque quand les éléments de  $A$  commutent entre eux, chaque terme de la forme  $\tilde{m}_A(G)$  où  $G$  n'a qu'une seule colonne est manifestement une fonction symétrique des éléments de  $A$ .

Q. E. D.

## RÉFÉRENCES

- [ 1 ] A. C. Aitken, The monomial expansion of determinantal Symmetric Functions, Proc. Royal Soc. Edinburgh A 61 (1943), 300-310. MMM
- [ 2 ] E. A. Bender and D. E. Knuth, Enumeration of plane partitions, J. Combinatorial Theory (A) 13 (1972), 40-54. MMM
- [ 3 ] W. H. Burge, Four correspondences between graphs and generalized Young tableaux, J. Combinatorial Theory (A) 17 (1974), 12-30 . MMM
- [ 4 ] H. O. Foulkes, A survey of some combinatorial aspects of symmetric functions, in Permutations, A. Lentin, éd., Paris, Gauthier-Villars, 1974.
- [ 5 ] C. Green, An extension of Schensted's theorem, Advances in Math. 14 MMM (1974), 254-265.

- [ 6 ] C. Green, Some partitions associated with a partially ordered set, J. Combinatorial Theory 20 (1976), 69-79.  
MMM
- [ 7 ] C. Green and D. J. Kleitman, The structure of Sperner k-families, J. Combinatorial Theory 20 (1976), 41-68.  
MMM
- [ 8 ] D.E. Knuth, Permutation matrices and generalised Young Tableaux, Pacific J. Math. 34 (1970), 709-727.  
MMM
- [ 9 ] D.E. Knuth, The art of computer programming, Vol. 3, Addison Wesley, 1973.
- [10] A. Lascoux, Calcul de Schur dans les extensions grassmanniennes des  $\lambda$ -anneaux, ce volume.
- [11] D.E. Littlewood, The theory of group characters, 2nd Edition, Oxford, 1950.
- [12] G. de B. Robinson, On the representations of the symmetric group, American J. Math 60 (1938), 746-760.  
MMM
- [13] G.C. Rota, P. Doubilet et J. Stein, On the foundations of combinatorial theory IX. Studies in Applied Math. 53 (1974), 185-218.  
MMM
- [14] C. Schensted, Longest increasing and decreasing subsequences, Canadian J. Math. 13 (1961), 179-191.  
MMM
- [15] M.-P. Schützenberger, Quelques remarques sur une construction de Schensted, Math. Scand. 12 (1963), 117-128.  
MMM
- [16] M.-P. Schützenberger, Sur un théorème de G. de B. Robinson, C.R. Acad. Sci. Paris 272 (1971), 420-421.  
MMMM
- [17] R.P. Stanley, Theory and application of plane partition, Studies in Applied Math. 1 (1971), 167-188 and 259-279.  
M
- [18] G.P. Thomas, Baxter algebras and Schur functions. Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1974.
- [19] G.P. Thomas, Frames, Young Tableaux, and Baxter Sequences, Advances in Math. (to appear).

[20] G. Viennot, Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted, ce volume.

M. -P. Schützenberger  
97, rue du Ranelagh  
75016 Paris, France