THÉORIE DES GROUPES. — *Sur une conjecture de* H. O. Foulkes. Note (*) de **Alain Lascoux** et **Marcel-Paul Schützenberger,** présentée par M. André Lichnerowicz.

On annonce la preuve d'une conjecture de H. O. Foulkes sur certains polynômes intervenant dans les fonctions symétriques associées aux représentations projectives du groupe symétrique et des groupes linéaires sur les corps finis.

One sketches a proof of Foulkes' conjecture on the polynomials defining Littlewood Q-functions in terms of Schur functions.

On note Z^N l'ensemble des applications I de N dans Z telles que $n\,I=0$ pour tout n assez grand ce qui permet de définir $I^\Sigma \in Z^N$ par $n\,I^\Sigma = \sum_{m \geqq n} m\,I$; le *poids* de I est donc $0\,I^\Sigma$. Les partitions d'un entier n sont les $I \in Z^N$ de poids n telles que $0\,I \geqq 1\,I \geqq 2\,I \geqq \ldots$

Littlewood [1] a défini une famille basique de fonctions symétriques (en les variables d'un ensemble arbitraire qu'il est inutile d'expliciter) indexées par les partitions, $\{Q(I)\}$ au moyen d'une identité

$$Q(I) = \sum s'(J)\,F(I;J), \tag{1}$$

dans laquelle les $s'(J)$ sont les fonctions de Schur (modifiées), la sommation est étendue à toutes les partitions J de même poids que I et les F(I; J) sont des polynômes à coefficients entiers en une nouvelle variable q. Nous proposons d'appeler ces derniers *polynômes de Foulkes* en mémoire du regretté H. O. Foulkes auquel sont dus tant de beaux résultats sur les fonctions symétriques et qui a émis [2] la conjecture que tous leurs coefficients sont dans N. Nous faisons remarquer que ces polynômes sont les caractéristiques (polynomiales) d'Euler-Poincaré des modules inversibles de variétés drapeaux.

Nous annonçons le :

THÉORÈME I. — F (I; J) *est un polynôme monique à coefficients non négatifs qui est nul si l'une des différences* $n\,I^\Sigma - n\,J^\Sigma$ $(n \in N)$ *est négative et dont le degré est égal à leur somme dans le cas contraire.*

La preuve utilise les tableaux de Young. Soient A^* le monoïde libre engendré par un alphabet totalement ordonné A et $\equiv$ la plus petite congruence satisfaisant $xzy \equiv zxy$ et $zty \equiv tzy$ pour toutes les lettres x, y, z, t de A telles que $x \leqq y < z \leqq t$.

Il existe une section $A^*/\equiv \;\to A^*$; on dit que son image T est l'ensemble des tableaux de Young. Le composé $A^* \to A^*/\equiv \;\to T$ est le *redressement*. T contient le sous-ensemble L des *lignes*, c'est-à-dire des mots $xyz\ldots$ tels que $x \leqq y \leqq z \leqq \ldots$ et chaque tableau $t \in T$ est un produit $u_k u_{k-1} \ldots u_0$ de lignes dont la suite des degrés $|u_0| \geqq |u_1| \geqq \ldots \geqq |u_k|$ constitue une partition $\|t\|$ (dite *forme* de t).

Soit aussi $A^*\uparrow\; = \bigcup A^{*I}$ le sous-monoïde des mots w de A dont le multidegré est une partition I (de leur degré $|w|$). Nous introduisons une application $\nu : A^*\uparrow \;\to N$ (la *charge*) satisfaisant les deux conditions :

1. $f, g \in A^*\uparrow, f \equiv g \Rightarrow f\nu = g\nu$;
2. $f, g \in A^*$, $fg \in A^*\uparrow$, le degré $|g|_a$ de g en a (première lettre de A) est nul $\Rightarrow (fg)\nu = (gf)\nu + |g|$.

Sa définition complète fait intervenir une autre condition d'extrémalité trop lourde pour être donnée ici. Si I, J sont deux partitions de même poids, on sait que l'ensemble $T^J \cap A^{*I}$ des tableaux de forme J et de multidegré I est vide sauf si les différences $n\,I^\Sigma - n\,J^\Sigma$ sont toutes non négatives, et on montre que la charge $t\,\nu$ est au plus égale à $O\,(I^\Sigma - J^\Sigma)^\Sigma$, l'égalité étant atteinte par un tableau unique.

Par conséquent, le théorème I résulte du :

THÉORÈME I'. — *Soient* I *et* J *deux partitions de même poids. Le polynôme de Foulkes* F (I; J) *est égal à* $\sum q^{t\nu}$, *somme sur tous les tableaux* $t \in T^J \cap A^{*I}$.

Cet énoncé contient les résultats antérieurs de Macdonald [*cf.* ([3])], et d'un élève de Foulkes, Thomas ([4]).

Grâce à un lemme d'induction dû à Morris ([5]), et à la formule dite de Pieri de multiplication d'un tableau par une ligne, on réduit l'expression (1) de Q (I) :

$$Q\,(I) = \sum \{ s'(\| tu \|)\, q^{|u| - 0I}\, q^{(ut)\nu} / u \in L,\ t \in T,\ |t|_a = 0,\ ut \in A^{*I} \}. \tag{2}$$

Dans cette équation $\| tu \|$ désigne l'élément J de Z^N tel que

$$0\,J = |u|; \qquad 1\,J = 0\,\| t \|, \qquad \ldots, \qquad n\,J = (n-1)\,\| t \|, \qquad \ldots$$

D'après les conventions classiques, $s'(J) = \text{sgn}\,(J).\, s'(J^\wedge)$ où $\text{sgn}\,J \in \{-1, 0, 1\}$ et où, quand $\text{sgn}\,J \neq 0$, $J^\wedge$ est une certaine partition de même poids que J.

La charge ayant la propriété que $(|u| - 0\,I) + (ut)\,\nu = (tu)\,\nu$, il suffit alors pour établir le théorème I' de vérifier la nullité de la restriction de la somme (2) à l'ensemble X des paires (t, u) telles que $tu \notin T$ et $\text{sgn}\,(\| tu \|) \neq 0$. Ceci est la partie substantielle de la preuve, et repose sur la suite exacte introduite dans ([6]) (p. O.64). On montre qu'il existe une partie X_- de X et une bijection ζ de X_- sur $X \setminus X_-$, telle que si $(t, u)\,\zeta = (t', u')$ on a $tu \equiv t'\,u'$, donc $(tu)\,\nu = (t'\,u')\,\nu$, et $s'(\| tu \|) + s'(\| t'\,u' \|) = 0$. Les détails seront publiés ultérieurement.

(*) Séance du 9 janvier 1978.

([1]) D. E. LITTLEWOOD, *Proc. London Math. Soc.*, (B), II, 1961, p. 485-498.

([2]) H. O. FOULKES, *A Survey of Some Combinatorial Aspects of Symmetric Functions*, in *Permutations*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

([3]) A. O. MORRIS, *A Survey of Hall-Littlewood Functions and Their Applications to Representation Theory*, in *Combinatoire et representation du groupe symétrique*, D. FOATA, éd. (*Springer Lecture Notes*, n° 579, 1977, p. 136-154).

([4]) G. THOMAS, *Further Results on Baxter Sequences and Generalised Schur Functions* (ibid., p. 155-167).

([5]) A. O. MORRIS, *Math. Zeit*, 81, 1963, p. 112-123.

([6]) A. LASCOUX, *Thèse*, Paris, 1977.

Laboratoire d'Informatique théorique et Programmation, L. A. 248,
Université Paris-VII, Tour 55-56, 2, *Place Jussieu*, 75005 *Paris*.