THÉORIE DES GROUPES. — *Croissance des polynômes de Foulkes-Green.* Note (*) de **Alain Lascoux** et **Marcel Paul Schützenberger,** Correspondant de l'Académie.

On énonce un théorème d'isomorphie entre les classes de conjugaison d'un certain monoïde et on en déduit des inégalités entre polynômes de Green des groupes linéaires finis.

An isomorphism theorem within the plactic monoïd is given. Applications are made relating Green polynomials for finite linear groups to the structure of the lattice of partitions.

Soit A^* le monoïde libre engendré par l'ensemble fini totalement ordonné $\{A, \leqq\}$. On note $\#$ l'antiautomorphisme naturel (défini par sa restriction à A : $c \# < b \#$ ssi $b < c$).

Tout intervalle B de A définit un morphisme de restriction de $A^* \to B^*$ envoyant chaque mot w sur son plus long sous-mot $w \cap B^*$ contenu dans B^*.

On prouve :

Il existe dans A^* une congruence minimale (unique) notée $\equiv$ telle que :

— d'une part dans l'algèbre $\mathbf{Z}(A^*/\equiv)$ les éléments $\sum \{x : x \in A\}$ et $\sum \{yx : x, y \in A, y > x\}$ commutent;

— d'autre part, pour tout intervalle B, $w \equiv w'$ implique

$$w \cap B^* \equiv w' \cap B^*.$$

Le monoïde quotient $A^*/\equiv$ est dit *monoïde plaxique;* nous en avons donné une *présentation* légèrement différente dans [1].

Rappelons quelques propriétés élémentaires :

(1) les classes dans $Z(A^*/\equiv)$ des éléments

$$S_k = \sum \{x_1 \ldots x_k : x_i \in A, x_1 \leqq \ldots \leqq x_k\}$$

engendrent une sous-algèbre commutative;

(2) $w \equiv w' \Rightarrow w \# \equiv w' \#$;

(3) Il existe une section remarquable $A^*/\equiv \to A^*$ dont l'image est l'ensemble T des *tableaux* (*cf.* [1]). La composition $A^* \to A^*/\equiv \to T$ est dit *redressement* et notée R.

(4) Il existe une application $t - \overline{t}|$ des tableaux sur l'ensemble des partitions ($\overline{t}|$ est le *diagramme* ou la *forme* de t), ainsi qu'une bijection

$$w \to (w\,R,\ w\mathscr{C})$$

de A^* sur l'ensemble des paires de tableaux

$$t = w\,R, \qquad t' = w\mathscr{C} : \ \overline{t}| = \overline{t'}|, \qquad t' \in A^!$$

(i. e. t' est une permutation des premières lettres de A).

De fait, si $w \in A^!$, $t' = w^{-1}\,R$, où w^{-1} est la permutation inverse de w.

Soit N^A le monoïde *commutatif* libre sur A. Son groupe Aut (N^A) se relève de façon unique en un groupe Bij(A^*) de bijections : $A^* \to A^*$ [ce n'est pas le relèvement élémentaire $x_1\, x_2 \ldots \to (x_1)\sigma(x_2)\sigma \ldots$] :

$$\sigma \in \text{Aut} \to \sigma \in \text{Bij}$$

en imposant les deux conditions :

pour tout $w \in A^*$, $\sigma \in \text{Aut}$, et tout intervalle B de A, on a :

(1) $$\{B\sigma\} = \{B\} \Rightarrow (w \cap B^*)\sigma = w\sigma \cap B^*,$$

(2) $$w\mathscr{C} = w\sigma\mathscr{C}.$$

On a alors :

PROPOSITION 1 :

(1) $w\sigma \# = w \# \sigma^{\#}$ [avec $\sigma^{\#}$: $\forall b \in A$, $b\sigma^{\#} = (b\sigma)\#$];

(2) $wR\sigma = w\sigma R$;

(3) si a est la première lettre de A et si $a\sigma = a$, alors

$$(aw)\sigma = a(w\sigma).$$

THÉORÈME 2 (théorème de conjugaison). — *Pour chaque factorisation* $w = w_1 w_2$ *d'un mot* w, *pour chaque* $\sigma \in \text{Bij}(A^*)$, *on a*

$$(w_1 w_2)\sigma = w'_1 w'_2, \qquad |w_1| = |w'_1| \quad \Rightarrow \quad (w_2 w_1)\sigma = w'_2 w'_1.$$

($|w|$ *est la longueur de* w).

On peut remarquer que les éléments de Bij (A^*) préservent les puissances

$$(w^n)\sigma = (w\sigma)^n.$$

Soit I une partition, $I \in \mathbf{N}^A$ (i. e. $\ldots \leqq cI \leqq bI \leqq aI$). Appelons *cyclage* d'un tableau t d'évaluation commutative I toute opération

$$t \to t' \in T : \quad \exists t'', \qquad x \in \{A \setminus a\}, \qquad t \equiv xt'', \qquad t' \equiv t''x$$

Il est aisé de voir que tout tableau peut être transformé en le tableau *ligne* de même évaluation $\underbrace{a \ldots a}_{aI}\ \underbrace{b \ldots b}_{bI} \ldots$ *par une suite de cyclages.*

Soit T(I) l'ensemble {tableaux d'évaluation I, cyclages}. Le théorème 2 permet de transporter la structure de cyclage aux tableaux d'évaluation quelconque H. Soit en effet I la partition

$$\exists \sigma \in \text{Aut}(\mathbf{N}^A), \qquad H\sigma = I.$$

Par définition, $t \to t'$ est un *cyclage* de tableaux d'évaluation H si et seulement si $t\sigma \to t'\sigma$ l'est, et l'on définit T(H) comme l'image de T(I) par σ.

LEMME 3. — *Il existe une fonction* $\upsilon : T \to \mathbf{N}$ *dite* cocharge *telle que :*

(1) $t\upsilon = 0$ *ssi* t *est un tableau ligne;*

(2) *si* $t \to t'$ *est un cyclage, alors*

$$t\upsilon = t'\upsilon + 1.$$

Remarque. — Nous avons défini dans [1] la charge ν d'un tableau d'évaluation une partition I; la cocharge est de fait égale à

$$bI + 2(cI) + 3(dI) + \ldots - \nu.$$

Soit H, $H' \in N^A$, $aH' = aH + 1$, $bH' = bH - 1$, $xH' = xH \, \forall x \neq a, b$. Il est clair que l'opération « changer a le plus à droite en b » est une injection de l'ensemble des tableaux d'évaluation H′ dans l'ensemble des tableaux d'évaluation H. On a plus :

PROPOSITION 4. — *L'opération ci-dessus une injection de* T(H′) *dans* T(H) *conservant la cocharge et la forme.*

COROLLAIRE 5. — *Soit* I *et* J *deux partitions de poids n, et soit* G (I, J) *le polynôme de Green du groupe linéaire fini* $\mathrm{Gl}(n, F_q)$ *associé à ces deux partitions. Alors pour toute partition* $I' \leqq I$:

$$G(I', J) \leqq G(I, J).$$

Démonstration. — Le polynôme de Green est, à une puissance de q près, et en échangeant q en $1/q$, égal au polynôme de Foulkes F (I, J) (*cf.* [2]); plus précisément, d'après [3] :

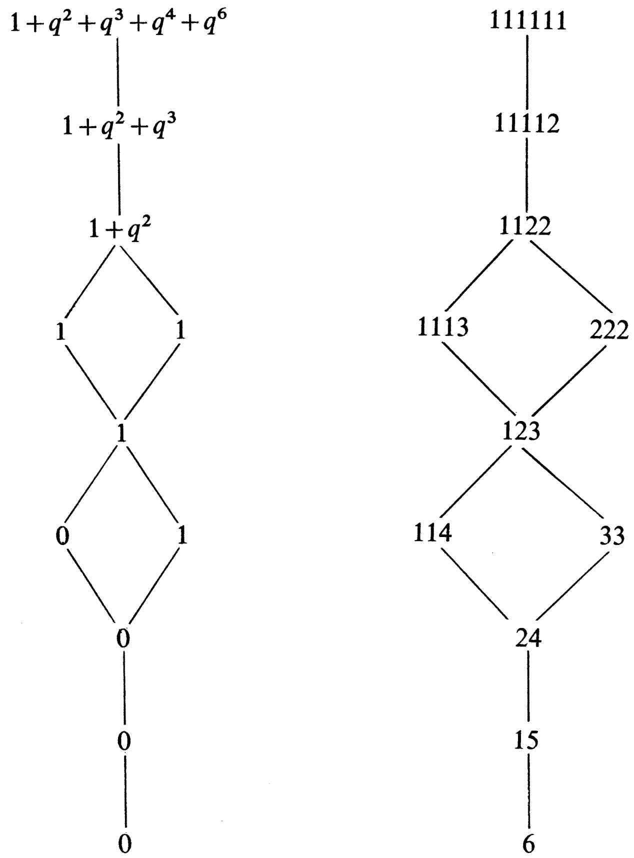
$$G(I, J) = \sum \{ q^{\upsilon(t)} : t \in T(I), \overline{t}| = J \}.$$

Il suffit de se placer dans le cas où les partitions I et I′ sont consécutives dans le treillis des partitions; il est clair (*cf.* [3]) qu'il existe σ tel que H = I σ, H′ = I′ σ vérifient les hypothèses de la proposition 4, et donc

$$T(I') \simeq T(I'\sigma) \subsetneq T(I\sigma) \simeq T(I)$$

entraîne le corollaire.

Exemple. — Pour le poids 6 et J = 000033, nous avons figuré côte à côte le treillis des partitions et les polynômes de Green correspondants :



La même technique permet d'obtenir un système d'inégalités plus complexes. Par exemple si I_1, I'_1, I_2, I'_2 sont quatre partitions de même poids telles que

$$c\,I_1 = c\,I'_1 = c\,I_2 - 1 = c\,I'_2 - 1 < b\,I_1 = b\,I'_1 + 1 = b\,I_2 - 1 = b\,I'_2 < a\,I_1 = a\,I'_1 - 1 = a\,I_2 = a\,I'_2 - 1,$$

avec égalité pour les autres lettres, on a pour toute partition J :

$$(F(I_1, J) - q\,F(I'_1, J)) - q\,(F(I_2, J) - q\,F(I'_2, J)) \geqq 0.$$

(*) Séance du 8 janvier 1979.

[1] A. Lascoux et M. P. Schützenberger, *Comptes rendus*, 286, série A, 1978, p. 323.
[2] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials* (à paraître).
[3] H. Kraft et C. Procesi, *Closures of Conjugacy Classes of Matrices Are Normal*, preprint 1978.

Laboratoire d'Informatique théorique et Programmation, L. A. 248,
Université Paris-VII, Tour 55-56, 2, *place Jussieu*, 75005 *Paris*.