GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux.* Note (*) de **Alain Lascoux** et **Marcel-Paul Schützenberger,** Correspondant de l'Académie.

On donne des formules de développement des polynômes de Schubert et de Grothendieck traduisant les structures d'algèbre de Hopf respectives des anneaux de cohomologie et de Grothendieck des variétés de drapeaux. On obtient comme corollaire des propriétés nouvelles des décompositions réduites des éléments du groupe symétrique.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — Hopf Algebra Structures of the Cohomology Ring and Grothendieck Ring of a Flag Manifold.

Hopf algebra structures of the cohomology ring and of the Grothendieck ring of flag manifolds provide new formulas for the associated polynomials; hence independent proofs of results on the reduced decompositions in the symmetric group that were obtained otherwise from consideration of the nilplactic monoid.

1. POLYNÔMES DE SCHUBERT. — On sait (*cf.* [2], [4], [10]) que l'algèbre des représentations du groupe symétrique est une algèbre de Hopf, la preuve reposant pour l'essentiel sur l'expression d'une fonction de Schur $S_I(A)$ en les variables de l'ensemble A comme une somme de produits $S_J(A-B)\,S_K(B)$, où B est une partie donnée de A, c'est-à-dire sur la structure de pré-λ-anneau de A. Nous étendons ici ces formules aux généralisations des fonctions de Schur que sont les polynômes de Schubert et de Grothendieck. Les notations sont celles de [5]. En particulier $A(=A_n)$ est l'ensemble totalement ordonné (alphabet) $\{a_1<\ldots<a_n\}$ et $W(=W_n)$ le groupe symétrique agissant sur A; ses éléments sont désignés par la permutation correspondante de 1, 2, ..., n ou, sans qu'il puisse y avoir ambiguïté, d'un alphabet quelconque, ce qui permet d'interpréter tout sous-mot de longueur m de $w=w_1\ldots w_n\in W_n$ comme un élément de W_m. Réciproquement, pour m positif, on désignera par $m\nearrow$ l'injection de W_n dans W_{n+m} envoyant chaque $w_1\ldots w_n$ sur $1\,2\ldots m\,w_1+m\ldots w_n+m$. On réservera la notation $\omega(=\omega(n))$ pour l'élément $n\,n-1\ldots 2\,1$ de longueur maximale de W_n.

Les *polynômes de Schubert* $X_w(A)$ (notés X_w s'il est inutile de spécifier l'ensemble de variables) sont définis par la formule :

1.1 $$X_w=X_\omega\,\partial_{\omega w}\qquad\text{avec}\quad X_\omega=a_1^{n-1}\ldots a_{n-2}^2\,a_{n-1},$$

où ∂ est l'opérateur de symétrisation décrit dans [5] à la suite de Demazure [3], Bernstein, J. M. Gelfand et S. Gelfand [1]. Les classes des polynômes de Schubert (les *cycles de Schubert*) dans l'anneau de cohomologie de la variété de drapeaux sont une $\mathbb{Z}$-base de cet anneau. Posant $\partial_i=\partial_{\sigma_i}$ pour chaque générateur σ_i de W (échangeant a_i et a_{i+1}), on a en particulier :

1.2 $$X_w\,\partial_i=X_{w\sigma_i}\text{ ou }0,\quad\text{selon que } l(w\sigma_i)<l(w)\text{ ou non.}$$

Nous définissons un autre endomorphisme δ_i du $\mathbb{Z}$-module de base $\{X_w\}$ par les relations :

1.3 $$X_w\,\delta_i=X_{\sigma_i w}\text{ ou }0,\quad\text{selon que } l(\sigma_i w)<l(w)\text{ ou non.}$$

On a identiquement :

1.4 $$\delta_i\,\partial_j=\partial_j\,\delta_i\qquad(1\leqq i,j\leqq n).$$

Soit maintenant $m\leqq n$ donné. On pose $B_m=A-A_m=\{a_{m+1}<\ldots<a_n\}$ et on se propose de trouver des entiers $d_w^m(u,v)$ (de fait non négatifs) tels que :

1.5 $$X_w(A)=\Sigma\{d_w^m(u,v)\,X_v(A_m)\,X_u(B_m):u\in W_m,\ v\in W_{n-m}\}.$$

Dans le cas particulier où $m=1$ et où $w=1\,n\,n-1\ldots 2=1\nearrow\omega'$ avec $\omega'=\omega(n-1)$, X_w est une *fonction de Schur drapeau* que l'on sait développer selon les puissances de $a=a_1$ (*cf.* Macdonald [8]); le résultat peut s'écrire :

1.6 $$X_{1\nearrow\omega'}(A)=X_{\omega'}(B)(1+a\delta_{n-2})\ldots(1+a\delta_1),$$

avec $B=A-\{a\}=\{a_2<\ldots<a_n\}$. Comme les opérateurs δ et ∂ commutent, on en déduit :

PROPOSITION 1.7. — *Soit* $w=i\,w_2\ldots w_n\in W_n$, $w'=w_2\ldots w_n\in W_{n-1}$. *Alors*

$$X_w(A)=X_{w'}(B)\,a^{i-1}(1+a\delta_{n-2})\ldots(1+a\delta_i).$$

Par exemple :

1.8 $$X_{263154}=X_{52143}\,a(1+a\delta_4)(1+a\delta_3)(1+a\delta_2)$$
$$=a\,X_{52143}+a^2(X_{42153}+X_{52134})+a^3\,X_{32154}+a^4\,X_{23154}.$$

Le développement de X_w selon les puissances de a est l'opération duale de la multiplication par $\Sigma_{0\leqq k}\,a^k=(1-a)^{-1}$ que la formule de Pieri permet de calculer explicitement en termes de soulèvements (*cf.* [5]). En effet, quand $u=1\nearrow\omega'$ avec $\omega=\omega(n-1)$, on a :

1.9 $$X_u(1-a)^{-1}=\Sigma\{X_v : v\in V\},$$

où V est l'intervalle entre $1\nearrow\omega'$ et ω selon l'ordre de Bruhat, ce qui s'écrit aussi :

1.10 $$X_u(1-a)^{-1}=X_\omega(A)(1+\delta_{n-1})\ldots(1+\delta_1).$$

Utilisant l'expression de X_u fournie par 1.6, on en déduit :

PROPOSITION 1.11. — $X_{1\nearrow w}(A)=\Sigma\,a^{l(w)-l(v)}X_v(B)$ *où la somme est étendue à tous les* $v\in W_{n-1}$ *tels que* nv *apparaisse dans le produit* $X_{1\nearrow w}(A)(1-a)^{-1}$.

Par application successive de la proposition 1.7, on déduit le cas de m quelconque; on traite d'abord le cas $w_1>w_2>\ldots>w_m$.

PROPOSITION 1.12. — *Soit* $m\leqq n$, $w\in W_n$ *tel que* $w_1>w_2>\ldots>w_m$, $w'=w_{m+1}\ldots w_n\in W_{n-m}$, $a^{w,m}$ *le monôme* $a_1^{w_1-1}a_2^{w_2-1}\ldots a_m^{w_m-1}$, B *l'alphabet* $\{a_{m+1}<\ldots<a_n\}$, $\Delta_{w,m}$ *l'opérateur*

$$(1+a_1\,\delta_{n-m-1})\ldots(1+a_1\,\delta_{w_1-m+1})\ldots(1+a_m\delta_{n-m-1})\ldots(1+a_m\delta_{w_m}).$$

Alors :

$$X_w(A)=a^{w,m}X_{w'}(B)\,\Delta_{w,m}.$$

On sait par ailleurs décomposer les monômes a^I dans la base des polynômes de Schubert (*cf.* [6]) : soit C un nouvel alphabet infini, A'_m l'alphabet $\{a_1<\ldots<a_m<c_1<c_2\ldots\}$, ∂'_i *et* ∂'_w les opérateurs correspondant à A'_m; soit ε l'augmentation $\mathbb{Z}[A'_m]\to\mathbb{Z}$ envoyant chaque polynôme P sur son terme constant $P\,\varepsilon$. Alors (*cf.* [6], *cf.* [3] pour les cycles de Schubert) on a :

1.13 $$\forall P\in\mathbb{Z}[A_m],\qquad P=\Sigma_w\,P\,\partial'_{w^{-1}}\varepsilon.X_w(A'_m).$$

En fait, l'alphabet C n'est qu'un intermédiaire de calcul qui ne figure pas dans le développement 1.13; par exemple :

$$a_1^2\,a_2^4=X_{361245}(A'_2)-X_{451236}(A'_2)-X_{531246}(A'_2),$$

puisque :

$$X_{361245}(A'_2)=a_1^4 a_2^2+a_1^3 a_2^3+a_1^2 a_2^4, \qquad X_{451236}(A'_2)=a_1^3 a_2^3,$$
$$X_{531246}(A'_2)=a_1^4 a_2^2.$$

Combinant 1.12, 1.13 et 1.4, on obtient :

THÉORÈME 1.14. — *Soit $m \leqq n$, soit w, $\zeta \in W_n$, $\zeta_{m+1}=m+1, \ldots, \zeta_n=n$ tels que $w\zeta$ soit l'élément de plus grande longueur de $w W_m$, soit $w'=w_{m+1}\ldots w_n$. Alors, reprenant les notations de* 1.12, *on a l'identité :*

$$X_w(A)=\Sigma_v a^{w\zeta,m} X_{w'}(B)\,\Delta_{w\zeta,m}\,\partial'^{-1}_{v^{-1}}\,\varepsilon\,.\,X_{v\zeta^{-1}}(A'_m)$$

somme sur tous les v tels que $l(v\zeta^{-1})=l(v)-l(\zeta)$.

Par exemple :

$$X_{316\,542}(A)=a_1^2 X_{4321}(B)(1+a_1\delta_3)(1+a_1\delta_2)(1+a_2\delta_3)(1+a_2\delta_2)(1+a_2\delta_1).$$

et le coefficient de $X_{351246}(A'_2)$, polynôme égal à $a_1^3 a_2^2+a_1^2 a_2^3$, est :

$$X_{316542}(A)\,\partial'_2\,\partial'_3\,\partial'_4\,\partial'_1\,\partial'_2\,\varepsilon=X_{4321}(B)\,\delta_3\,\delta_2\,\delta_1=X_{1432}(B)$$

puisque :

$$(1+a_2\delta_3)(1+a_2\delta_2)(1+a_2\delta_1)\,\partial'_2\,\partial'_3\,\partial'_4=\delta_3\,\delta_2\,\delta_1$$

et :

$$a_1^2(1+a_1\delta_3)(1+a_1\delta_2)\,\partial'_1\,\partial'_2\,\varepsilon=a_1^2\,\partial'_1\,\partial'_2=1.$$

Nous terminons le paragraphe sur un cas particulier du théorème lié aux propriétés des décompositions réduites dans le groupe symétrique.

Soit $w \in W_{n-m}$; $X_{m\nearrow w}(A)$ est un polynôme symétrique en $a_1, \ldots, a_m$ et cette propriété est respectée par la décomposition 1.14. En particulier, le terme obtenu en annulant B est une fonction symétrique en $a_1, \ldots, a_m$ qui est une somme à coefficients entiers non négatifs de fonctions de Schur $S_I(A_m)$ (les fonctions de Schur sont les polynômes de Schubert symétriques; on les indexe par les partitions, plutôt que par les permutations correspondantes). On a donc :

1.15 $$X_{m\nearrow w}(A)\,|_{B=0}=\Sigma_I\, d_w(I)\,S_I(A_m),$$

où les $d_w(I)$ sont des entiers non négatifs qui ne dépendent pas de m et où la somme s'étend aux partitions de poids $l(w)$; toutefois, comme $S_I(A_m)=0$ si la longueur de I est supérieure à m, les $d_w(I)$ qui apparaissent effectivement dans 1.15 ne dépendent pas de m quand ce paramètre excède $l(w)$.

L'application £ : $w \to \Sigma\, d_w(I)\,I$ du groupe symétrique dans l'ensemble des sommes de partitions généralise les tableaux de Young standards (qui peuvent être considérés comme les chaînes complètes dans le treillis des partitions). En particulier, le nombre des décompositions réduites de w est égal à $\Sigma\, d_w(I)\,n_I$, où n_I est la dimension de la représentation irréductible du groupe symétrique $W_{l(w)}$. L'existence d'une telle application avait été conjecturée par Stanley. On remarque que $\Sigma_I\, d_w(I)=1$ si et seulement si w est une permutation caractérisée au paragraphe 3 de [5] et dite *vexillaire* (dans les notations présentes, $w_1 \ldots w_n$ est vexillaire si et seulement si il ne contient pas de sous-mot $w_h w_i w_j w_k$ avec $w_i<w_h<w_k<w_j$).

Les $d_w(\mathrm{I})$ se calculent facilement par les relations de [5], § 2, dont les propriétés d'invariance impliquent que $d_{w^{-1}}(\mathrm{I})=d_w(\mathrm{I}^{\sim})$. Un résultat plus précis repose sur le *monoïde nilplaxique*, mentionné dans l'appendice. Par exemple :

$$\pounds\,(3251746)=(1,1,1,4)+(1,1,2,3)+(2,2,3)+2(1,2,4)+(1,3,3)+(3,4).$$

2. Polynômes de Grothendieck. — La variété de drapeaux est munie de fibrés inversibles $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n$ dont les classes de Chern respectives sont $1+a_1, \ldots, 1+a_n$. On pose $x_i=1-\mathrm{L}_i^{-1}$; l'anneau de Grothendieck $\mathscr{K}$ de la variété de drapeaux est le quotient de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ par l'idéal engendré par les fonctions symétriques en les x_i. Les X_w, en l'alphabet $\{x_1, \ldots, x_n\}$, sont une $\mathbb{Z}$-base de $\mathscr{K}$, tout comme les $\mathrm{X}_w(\mathrm{A})$ sont une base de l'anneau de cohomologie, mais il est plus intéressant de prendre comme base les classes des faisceaux structuraux des variétés de Schubert.

On pose $\pi_i=\mathrm{L}_i\,\partial_i$ (où ∂_i est l'opérateur correspondant à l'alphabet $\{\mathrm{L}_1<\ldots<\mathrm{L}_n\}$) et l'on définit les opérateurs π_w comme produits des π_i (*cf.* [6]), et les polynômes de Grothendieck par :

2.1 $$\mathrm{G}_w=\mathrm{G}_\omega\,\pi_{\omega w} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{G}_\omega=x_1^{n-1}\,x_2^{n-2}\ldots x_{n-1}.$$

La classe de G_w dans $\mathscr{K}$ est la classe du faisceau structural de la variété de Schubert d'indice w; G_w est un polynôme non homogène en l'alphabet $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dont la partie de plus bas degré est X_w, et donc les G_w sont linéairement indépendants.

La définition 2.1, jointe à $\pi_i^2=\pi_i$ pour tout i, implique :

2.2 $$\mathrm{G}_w\,\pi_i=\mathrm{G}_{w\sigma_i} \text{ ou } \mathrm{G}_w \text{ suivant que } l(w\,\sigma_i)<l(w) \text{ ou non,}$$

ou bien encore :

2.3 $$\mathrm{G}_w(\pi_i-1)=\mathrm{G}_{w\sigma_i}-\mathrm{G}_w \text{ ou } 0 \text{ suivant que } l(w\sigma_i)<l(w) \text{ ou non.}$$

On définit symétriquement les opérateurs φ_i sur le $\mathbb{Z}$-module de base $\{\mathrm{G}_w\}$ par

2.4 $$\mathrm{G}_w.\varphi_i=\mathrm{G}_{\sigma_i w}-\mathrm{G}_w \text{ ou } 0 \text{ suivant que } l(\sigma_i w)<l(w) \text{ ou non.}$$

Les opérateurs φ_i et π_j commutent et toutes les formules du premier paragraphe se transcrivent *mutatis mutandis*.

Par exemple, l'analogue de la proposition 1.7 se présente ainsi :

Théorème 2.5. — *Soit :*

$$w\in\mathrm{W}_n, \qquad w_1=i, \qquad w'=w_2\ldots w_n, \qquad x_1=x, \qquad \mathscr{Y}=\{x_2<\ldots<x_n\}.$$

Alors :

$$\mathrm{G}_w=\mathrm{X}_{w'}(\mathscr{Y})\,x^{i-1}(1+x\,\varphi_{n-2})\ldots(1+x\,\varphi_i).$$

Par exemple, la permutation considérée en 1.8 donne :

2.6 $$\mathrm{G}_{263154}=x(1-x)^2\,\mathrm{G}_{52143}(\mathscr{Y})+x^2(1-x)(\mathrm{G}_{42153}(\mathscr{Y})+\mathrm{G}_{52134}(\mathscr{Y}))$$
$$+x^3(1-x)\,\mathrm{G}_{32154}(\mathscr{Y})+x^4\,\mathrm{G}_{23154}(\mathscr{Y}).$$

La décomposition d'un polynôme de Grothendieck suivant les puissances de la première lettre x est l'opération duale de la multiplication par les polynômes *spéciaux*, c'est-à-dire de la *formule de Pieri* dans l'anneau de Grothendieck, que nous expliciterons ailleurs.

Appendice. — Soit $\mathrm{T}=\{\tau_1<\tau_2\ldots<\tau_{n-1}\}$ un alphabet; le *monoïde nilplaxique* NP est le quotient du monoïde libre T par la congruence définie par :

$$\forall j, \quad \forall\, i\leqq j\leqq k \qquad \text{tels que} \quad i+2\leqq k,$$

on a :

$$\tau_j \tau_i \tau_k \equiv \tau_j \tau_k \tau_i; \qquad \tau_i \tau_k \tau_j \equiv \tau_k \tau_i \tau_j,$$

$$\tau_j \tau_j \equiv 0; \qquad \tau_j \tau_{j+1} \tau_j \equiv \tau_{j+1} \tau_j \tau_{j+1}.$$

Il est clair que l'application $\tau_j \to \partial_j$ s'étend à un morphisme de NP sur le monoïde engendré par $\{ \partial_j : 1 \leqq j \leqq n-1 \}$, l'image inverse de 0 étant 0. Le calcul dans NP se ramène au calcul dans le monoïde plaxique moyennant les automorphismes de conjugaison introduits dans [7].

En particulier NP-$\{0\}$ a une section remarquable dans T* qui est formée des tableaux t non congrus à 0, et la classe nilplaxique de chacun d'eux (c'est-à-dire l'ensemble des $v \in$ T* tels que $v \equiv t$) est en bijection avec les tableaux standards ayant même forme que t.

Dans l'algèbre $\mathbb{Z}$(NP) la *fonction de Schur* S_I est, pour chaque partition I, la somme des tableaux de forme I; l'ensemble des S_I est la $\mathbb{Z}$-base d'une sous-algèbre commutative de $\mathbb{Z}$(NP) (comme dans l'algèbre plaxique) qui est d'ailleurs isomorphe au quotient de l'algèbre des fonctions de Schur obtenu en annulant toutes les S_J telles que J n'est pas contenue dans la partition $(1, 2, \ldots, n-1)$.

Soit maintenant t_ω le seul tableau $\not\equiv 0$ de forme $(1, 2, \ldots, n-1)$. Pour chaque permutation $w \in W_n$, on prend une décomposition réduite $s = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_k}$ de $w^{-1}\omega$ et on associe à w l'ensemble des tableaux t tels que $t \tau_{i_1} \tau_{i_2} \ldots \tau_{i_k} \equiv t_\omega$. L'union des classes nilplaxiques de ces tableaux est en bijection naturelle (par $\tau_i \to \sigma_i$) avec l'ensemble des décompositions réduites de w; elle est indépendante du choix de s; les formes de ces tableaux ont été calculées plus haut.

Par exemple, les $11 = 5 + 6$ décompositions réduites de $w = 25143$ correspondent aux éléments des classes nilplaxiques des deux tableaux :

$$\tau_4 \tau_3 \tau_1 \tau_4 \tau_2 \qquad \text{et} \qquad \tau_4 \tau_3 \tau_1 \tau_2 \tau_4.$$

D'autres propriétés des décompositions réduites se déduisent du remplissage standard d'un diagramme attaché à w (*cf.* [5], p. 449) auquel il ne nous est possible ici que de faire une allusion.

(*) Remise le 22 novembre 1982.

[1] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand et S. Gelfand, *Russian Math. Sur.*, 28, 1973, p. 1-26.

[2] P. Cartier, *Séminaire Bourbaki*, n° 597, 1982.

[3] M. Demazure, *Ann. Sc. E.N.S.*, 7, 1974, p. 53-88.

[4] L. Geissinger, in *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, D. Foata, éd., Springer L.N. n° 579, p. 168-181.

[5] A. Lascoux et M. P. Schutzenberger, *Comptes rendus*, 294, série I, 1982, p. 447.

[6] A. Lascoux et M. P. Schutzenberger, *Reports Math. Stockholm*, n° 32, 1982.

[7] A. Lascoux et M. P. Schutzenberger, *Colloque de Naples*, 1978, Quaderni de la Ricerca Scientifica n° 109.

[8] I. G. MacDonald, *Symmetric and Hall Polynomials* (*Oxford Math. Mono.*, 1979).

[9] R. Q. Stanley, Conjecture communiquée par A. Björner, 1982.

[10] A. Zelevinsky, *Representations of Finite Classical Groups*, Springer L.N. n° 869.

Laboratoire d'Informatique théorique et Programmation,
L.A. n° 248, Université Paris-VII, 2, place Jussieu, 75005 Paris.