Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

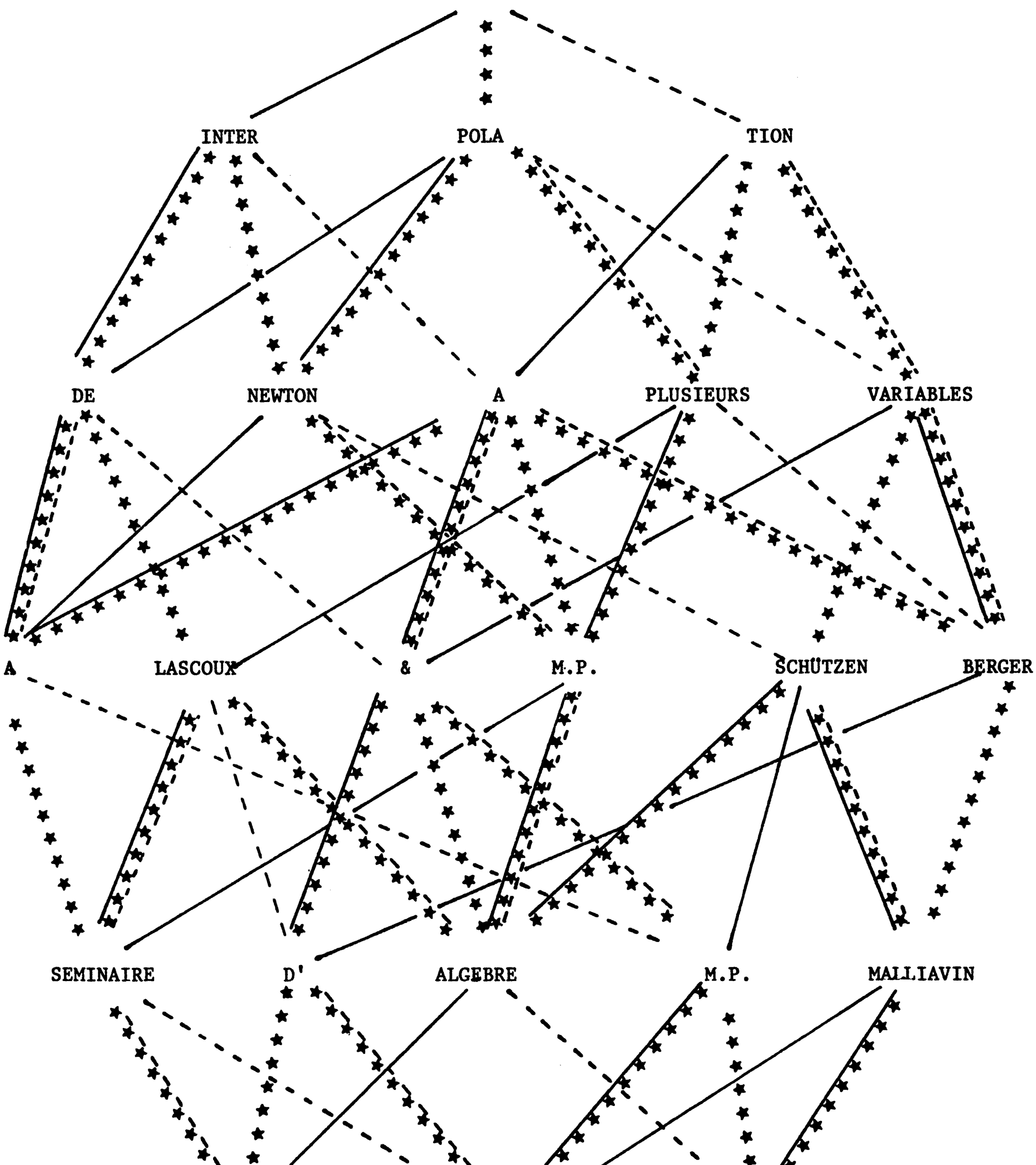
1146

Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin

Proceedings, Paris 1983–1984
(36ème Année)

Edité par M.-P. Malliavin

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo


INTER POLA TION
DE NEWTON A PLUSIEURS VARIABLES
A LASCOUX & M.P. SCHÜTZEN BERGER
SEMINAIRE D' ALGEBRE M.P. MALLIAVIN
Janvier
1 9 8 4

Pour décrire le polynôme de degré minimum passant par un nombre fini de points, Newton introduisit les "différences divisées" d'une fonction d'une variable. Les dites différences s'appliquent tout aussi bien aux fonctions de plusieurs variables et fournissent une formule d'interpolation (Proposition 4.1) dont les coefficients, au lieu d'être $(x-a)(x-b)\dots(x-d)$ comme dans le cas original, sont les polynômes de Schubert ; ces derniers,nés de la géométrie, sont intimement liés à une action du groupe symétrique sur l'anneau des polynômes due à Jacobi, action généralisant la construction des fonctions de Schur (ou celle des caractères irréductibles du groupe linéaire ou symétrique).

I. INTERPOLATION CLASSIQUE.

Nous décrivons dans [4] plusieurs actions du groupe symétrique sur l'anneau des polynômes. Nous ne nous servons ici que de la "symétrisation de Jacobi", que nous définissons tout d'abord pour un groupe symétrique sur deux éléments.

. Cas de deux variables. Soient a et b deux variables (au sens d'indéterminées pour Bourbaki [1]), $W(a,b)$ le groupe symétrique permutant a et b, de générateur $\sigma = \sigma_{ab}$; $W(a,b)$ agit sur $\mathbb{Z}[a,b]$ par $f(a,b) \to f(b,a) = f^{\sigma}$. La symétrisation de Jacobi, notée à droite (indifféremment $\partial_{(ab)}$ ou ∂_{σ}) est :

1.1 $\qquad f \to (f - f^{\sigma})/(a-b) = f\partial_{(ab)}$

On trouve dans loc. cit. [4] quelques propriétés de l'opérateur $\partial_{(ab)}$:

1.2 $\qquad f\,\partial_{(ab)}$ est un polynôme symétrique en a,b

1.3 $\qquad f\,\partial_{(ab)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = f^{\sigma}$

1.4 $\qquad fg\,\partial_{(ab)} = g\,\partial_{(ab)}\cdot f \quad$ si $f = f^{\sigma}$

. Cas d'un nombre quelconque de variables. Soit $A = \{a,b,c,\dots,d,e\}$ un alphabet (i.e. un ensemble totalement ordonné de variables), $W(A)$ le groupe symétrique correspondant ; les transpositions $\sigma_{ab}, \sigma_{bc}, \dots, \sigma_{de}$ sont dites générateurs de Coxeter de $W(a)$.

1.5 Lemme (cf. [4]). Soit $w \in W(a)$, $\sigma\,\sigma'\,\sigma'' \ldots$ une décomposition réduite de w (i.e. $w = \sigma\,\sigma'\,\sigma'' \ldots$, produit de longueur minimale notée $l(w)$. Alors le produit $\partial_\sigma\,\partial_{\sigma'}\,\partial_{\sigma''} \ldots$ ne dépend pas de la décomposition réduite choisie. On le note ∂_w.

On notera aussi $\partial_{(A)}$ pour le produit $\partial_{(ab)}\,\partial_{(bc)} \ldots \partial_{(de)}$.

$A = \{a,b,\ldots,d,e\}$ étant un alphabet, Ax désigne l'alphabet $\{a,b,\ldots,d,e,x\}$ obtenu en adjoignant à A une variable supplémentaire x.

1.6 Formule de Newton. Soit f un polynôme d'une variable. Alors

$$f(x) = f(a) + f\,\partial_{(ab)}.(a-x) + f\,\partial_{(abc)}.(x-a)(x-b) + \ldots$$

$$+ f\,\partial_{(A)}.(x-a)(x-b)\ldots(x-d) + f\,\partial_{(Ax)}.(x-a)(x-b)\ldots(x-d)(x-e).$$

La formule étant linéaire, il suffit de la démontrer pour une base de polynômes, par exemple $\{1,a,a^2,\ldots\}$, ce qui ne présente pas de difficulté (cf. [8]), mais n'est guère éclairant.

Cette formule est équivalente à l'identité

1.7 $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \ldots a^{n-1} & f(a) \\ . & . & . \;\ldots\; . & . \\ 1 & e & e^2 \ldots e^{n-1} & f(e) \end{vmatrix} \Big/ \ \Delta(A) = f\,\partial_{(A)}$$

où $n = \mathrm{card}(A) - 1$ et où $\Delta(A) = (a-b)(a-c)(b-c)\ldots$ est le Vandermonde.

Sur cette dernière expression, il est clair que $f\,\partial_{(A)}$ est une fonction symétrique en $a,b,\ldots$ de degré égal à (degré $(f) - n$).

L'usage nommé reste le terme $f\,\partial_{(Ax)}.(x-a)\ldots(x-e)$, et formule d'interpolation la formule de Newton privée de son reste.

Plusieurs mathématiciens ont attaché leur nom au choix d'un alphabet spécial.

Mercator, puis Gregory précédèrent Newton sur les voies de l'interpolation ; prenant l'alphabet $A = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots\}$, et notant par Δ l'opérateur $f(x) \to [f(x+\varepsilon) - f(x)] / \varepsilon$, ces auteurs obtiennent :

$$1.8 \quad f(x)=f(0) + x\,\Delta(f) + x(x-\varepsilon)/2!\ \Delta^2(f) + x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)/3!\ \Delta^3(f) + \ldots$$

Taylor fait tendre ε vers 0. Gauss interpole au voisinage de 0 avec $A = \{0,\varepsilon,-\varepsilon,2\varepsilon,-2\varepsilon,\ldots\}$. Nous renvoyons à [7] pour de plus amples détails.

Une autre possibilité est de poser, avec les q-analogistes (cf.[2]), $A = \{z,qz,q^2z,\ldots,q^nz\}$, auquel cas

$$1.9 \qquad f\,\partial_{(A)} = \frac{z^{-p}\, q^{-\binom{n}{2}}}{(1-q)\ldots(1-q^n)} \Big[f(z) - \frac{1-q^n}{1-q} f(qz) + \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)} f(q^2z) - \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} f(q^3z) + \ldots \Big]$$

Dans tout ce qui précède, l'alphabet A est totalement ordonné. C'est à Lagrange que l'on doit une interpolation plus symétrique :

$$1.10 \qquad f(a)/(a-b)(a-c)\ldots(a-e) + f(b)/(b-a)(b-c)\ldots(b-e) + \ldots + f(e)\,/\,(e-a)(e-b)\ldots(e-d) = f\,\partial_{(A)}\,, \text{ avec } A = \{a,b,c,\ldots,d,e\}\,.$$

On reconnait dans cette formule le développement, suivant sa dernière colonne, du déterminant (1.7), puisque

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & b^{n-1} \\ 1 & \ldots & c^{n-1} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & \ldots & e^{n-1} \end{vmatrix} \Big/ \Delta(A) = [\,(a-b)(a-c)\ldots(a-e)]^{-1}\,.$$

2. COMMENTAIRES

2.1 Si l'on développe $f(a), f(b), f(c) \ldots$ d'après la formule de Newton, on peut triangulariser le déterminant (1.7). En effet, plus généralement, soit $h, g, \ldots, f$ $n+1$ fonctions d'une variable. Alors

$$\begin{vmatrix} h(a) & g(a) & \ldots & f(a) \\ h(b) & g(b) & \ldots & f(b) \\ . & . & \ldots & . \\ h(e) & g(e) & \ldots & f(e) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h(a) & g(a) & \ldots & f(a) \\ h\,\partial_{(ab)} & g\partial_{(ab)} & \ldots & f\,\partial_{(ab)} \\ . & . & \ldots & . \\ h\,\partial_{(A)} & g\,\partial_{(A)} & \ldots & f\,\partial_{(A)} \end{vmatrix} \quad \Delta(A)$$

comme on le voit en prenant pour $h, g, \ldots, f$ des puissances d'une variable (on a alors une des définitions des fonctions de Schur).

Dans le cas où $h(a), g(a), \ldots, f(a)$ sont respectivement $1, a, \ldots, a^{n-1}, f(a)$, la matrice de droite est triangulaire, de diagonale
$1,\ 1 = a\,\partial_{(ab)},\ \ldots,\ 1 = a^{n-1}\,\partial_{(a\ldots d)}\ ,\ f\,\partial_{(A)}$.

2.2 $f\,\partial_{(A)}$ est le résidu en $z=0$ de $f(z)/(z-a)\ldots(z-e)$. Plus généralement, Jacobi montre que si $\Phi(z_1, \ldots, z_{n+1})$ est un polynôme en $n+1$ variables, alors

$$\Sigma\,[\,\Phi(a,b,\ldots,e)/\Delta(a,b,\ldots,e)]^{w}\ ,$$

somme sur toutes les permutations $w \in W(A)$, est le coefficient de $(z_1 \ldots z_{n+1})^{-1}$ dans $\Pi_{i<j}(z_i - z_j)\ \ \Phi(z_1, \ldots, z_{n+1})\ \Pi_i (z_i - a)^{-1} \ldots (z_i - e)^{-1}$.

2.3 On vérifie directement que

2.3.1. $\qquad (z-a)^{-1}\ \partial_{(ab)} = (z-a)^{-1}\ (z-b)^{-1}$

et donc, d'après la propriété de linéarité (1.4)

2.3.2 $\qquad (z-a)^{-1}\ \partial_{(A)} = (z-a)^{-1} \ldots (z-d)^{-1}\ (z-e)^{-1}$

Cette identité permet d'engendrer des fractions rationnelles à partir de la plus simple d'entre elles, $(z-a)^{-1}$.

Par exemple,

2.3.3 $$1 = (1+a)^{-1} + a(1+a)^{-1}\ (1+b)^{-1} + ab(1+a)^{-1}\ (1+b)^{-1}\ (1+c)^{-1} + \dots$$

C'est en effet le développement de Newton de $f(0)$, avec $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ et $A = \{-1, -a, -b, \dots\}$.

2.4 La formule de Newton ne s'applique pas uniquement aux anneaux de polynômes. Par exemple, si E est un module, et $a,b,c \dots$ des modules de rang 1, alors :

2.4.1 $$\Lambda^n(E) = \Lambda^n(E-a) \oplus a \otimes \Lambda^{n-1}\ (E-(a\oplus b)) \oplus a \otimes b \otimes \Lambda^{n-2}(E-(a \oplus b \oplus c)) \oplus \dots$$

Toutefois, si l'on ne suppose pas que a, $a \oplus b$, $a \oplus b \oplus c \dots$ soient des facteurs directs dans E, il est nécessaire de se placer dans l'anneau de Grothendieck des classes de modules pour donner un sens à l'expression $E - F$ pour tout couple de modules. Nous conservons la notation Λ^n pour l'opérateur induit par Λ^n dans l'anneau de Grothendieck (il est usuellement écrit λ^n).

On peut dans cet anneau démontrer une formule plus générale que 2.4.1.et 2.3.3 : Soit E la classe d'un module, $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ les classes de modules de rang 1, $A_n = a_1 + \dots + a_n$. Notons Λ^Σ la somme formelle $\Sigma\, z^n\, \Lambda^n$, et soit p un entier positif. Alors :

2.4.2 $$\Lambda^\Sigma(E) = \Lambda^\Sigma(E-A_p) + z\, A_p\, \Lambda^\Sigma(E-A_{p+1}) + z^2\, \Lambda^2(A_{p+1})\, \Lambda^\Sigma(E-A_{p+2}) + $$
$$+ z^3\, \Lambda^3(A_{p+2})\, \Lambda^\Sigma(E-A_{p+3}) + \dots$$

Cette expression peut s'interpréter comme le développement de $\Lambda^\Sigma(E-x)$, au "point" $x = 0$, connaissant les valeurs de cette fonction aux points $A_p, A_{p+1}, \dots$. Montrons comment la dériver de la formule de Newton. On applique cette dernière à la fonction $f(x) = (1 - x)^{-1}$, pour l'alphabet d'interpolation $A = \{-b_1, -b_2, \dots\}$:

2.4.3 $$(1-x)^{-1} = (1+b_1)^{-1} + (x+b_1)(1+b_1)^{-1}(1+b_2)^{-1} +$$
$$(x+b_1)(x+b_2)(1+b_1)^{-1}(1+b_2)^{-1}(1+b_3)^{-1} + \dots$$

Or, multipliant 2.4.2. par x^p et sommant par rapport à p, on obtient :

2.4.4 $\Lambda^{\Sigma}(E) \ / \ 1-x = \Sigma\, x^p z^n \Lambda^n(A_{p+n-1})\, \Lambda^{\Sigma}(E-A_{p+n})$.

Comme $\Lambda^{\Sigma}(E-A_n) = \Lambda^{\Sigma}(E) \ / \ (1+za_1)\ldots(1+za_n)$ et que $(x+za_1)\ldots(x+za_n) = \Sigma_i\, x^{n-1} z^i \Lambda^i(A_n)$, (2.2.4) est bien équivalente à (2.4.3), au facteur $\Lambda^{\Sigma}(E)$ près, et au changement $b_i = za_i$ près.

2.5 Un autre domaine d'application est la théorie des nombres, en choisissant pour alphabet un ensemble "arithmétique" (ce dernier terme pris dans un sens très flou).

Par exemple, Ramanujan énonce :

2.5.1 $\Sigma_{k \geqslant 0}\, x^k/k!\,(z+k) = \exp(x)\, \Sigma_{k \geqslant 0}\, (-x)^k/z(z+1)\ldots(z+k)$.

Comme d'après 2.3.1,

$(-1)^k\, [(z+0)(z+1)\ldots(z+k)]^{-1} = (z+0)^{-1}\, \partial_{(A)}$, pour $A = \{0,1,\ldots,k\}$

la formule de Ramanujan est un cas particulier de

2.5.2 $\Sigma_{k \geqslant 0}\, x^k f(k)/k! = \exp(x)\, [\, f(0)+f\, \partial_{(01)}.x+f\, \partial_{(012)}.x^2 + \ldots]$

où f est une fonction de $\mathbb{N}$ dans un groupe abélien quelconque.

On peut vérifier directement 2.5.2 à partir de l'expression (1.7) de $f\, \partial_{(A)}$.

Notons que comme précédemment, on peut prendre f à valeurs dans l'anneau de Grothendieck des classes de modules (cohérents) ; par exemple, si A est un élément quelconque de cet anneau, on peut poser $f(k) = \Lambda^k(A+k)$ (rappelons que k est la classe du module trivial de rang k), d'où la forme équivalente suivante de 2.5.2 :

2.5.3 $\Sigma\, x^k \Lambda^k(A+k)/k! = \exp(x)\ .\ \Sigma\, x^k \Lambda^k(A)/k!$

qui découle de l'identité :

2.5.4 $$\Lambda^k(A+k) = \Sigma \binom{k}{n} \Lambda^n(A).$$

3. POLYNOMES DE SCHUBERT

Revenons aux opérateurs ∂_w, où $w \in W(A)$. L'algèbre de ces opérateurs est l'algèbre des décompositions réduites, i.e. on a

3.1 $$\partial_v\, \partial_w = \partial_{vw} \text{ ou } 0 \text{ selon que } l(vw) = l(v) + l(w) \text{ ou non.}$$

Plutôt que d'étudier abstraitement cette algèbre, on considère les images par les ∂_w de certains polynômes.

Soient $A = \{a_1,\ldots,a_{n+1}\}$, $Z = \{z_1,\ldots,z_{n+1}\}$ deux alphabets, $W = W(A)$ le groupe symétrique sur A, dont l'élément de plus grande longueur est noté ω.

Définition. Le polynôme de Schubert d'indice w, où $w \in W$, est

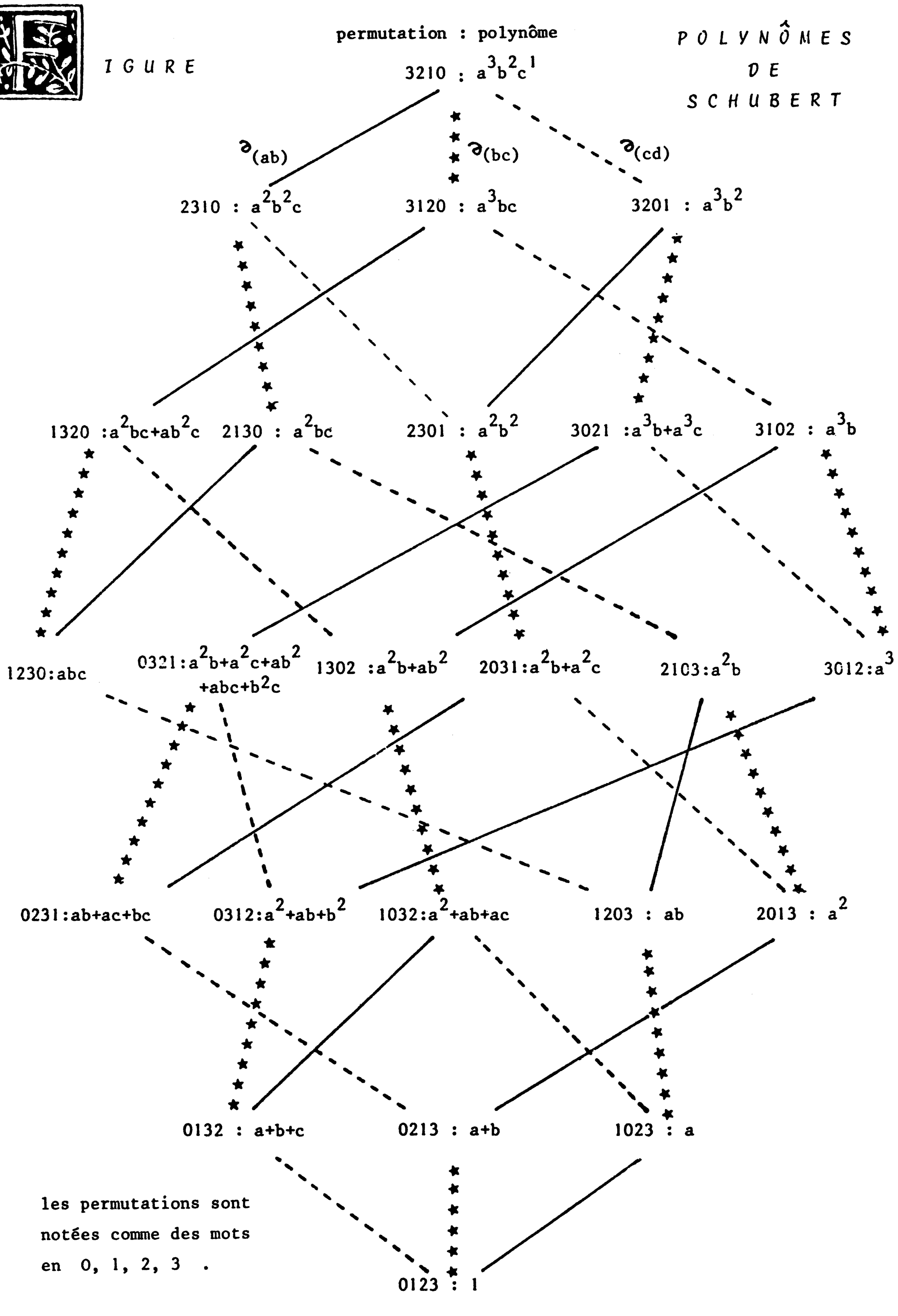
3.2 $$X_w(A) = a_1^n\, a_2^{n-1} \ldots a_{n+1}\, \partial_{\omega w}\,.$$

Le polynôme de Schubert double est

3.3 $$\mathbb{X}_w(A,Z) = \Pi_{i+j \leq n+1}\, (a_i+z_j)\, \partial_{\omega w}$$

FIGURE

POLYNÔMES DE SCHUBERT



les permutations sont notées comme des mots en 0, 1, 2, 3 .

On a donc que $X_w(A)$ est la spécialisation de $\mathbb{X}_w(A,Z)$ pour $Z = \{0,\dots,0\}$. Par ailleurs,

3.4 $$\mathbb{X}_\omega(A,Z) = \Pi_{i+j \leq n+1} (a_i+z_j)$$

3.5 $$\mathbb{X}_w \partial_v = \mathbb{X}_{wv} \text{ ou } 0 \text{ selon que } l(wv) = l(w) - l(v) \text{ ou non ;}$$

$\mathbb{X}_w(A,Z)$ est un polynôme homogène de degré $l(w)$.

Les figures 1 et 2 donnent ces polynômes pour $n+1 = 4$.

Les polynômes de Schubert $X_w(A)$ sont des polynômes à coefficients positifs ; il sont une base du $\mathbf{Z}$-module engendré par les monômes

$$a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{n+1}^{i_{n+1}} \, , \; 0 \leq i_1 \leq n \, , \; 0 \leq i_2 \leq n-1, \dots, 0 \leq i_{n+1} \leq 0 \text{ (cf. 4).}$$

En outre, les fonctions de Schur sont un cas particulier de polynômes de Schubert ; on peut étendre à ces derniers les principales propriétés des fonctions de Schur.

Par exemple, d'après une célèbre identité de Cauchy dont on a fait un axiome des λ-anneaux, $\Pi \, (z_i+a_j)$, $1 \leq i,j \leq n+1$, est une somme de produits de fonctions de Schur d'indices complémentaires.

Cette propriété revient à munir l'espace des polynômes symétriques d'un produit scalaire pour lequel la base des fonctions de Schur est orthonormée.

L'extension aux polynômes de Schubert de l'identité de Cauchy s'énonce (cf. [5]) :

3.6 $$\mathbb{X}_\omega(A,Z) = \Sigma_v \, X_{v\omega}(A) \, . \, X_v(Z).$$

Appliquant l'opérateur $\partial_{\omega w}$, on en tire

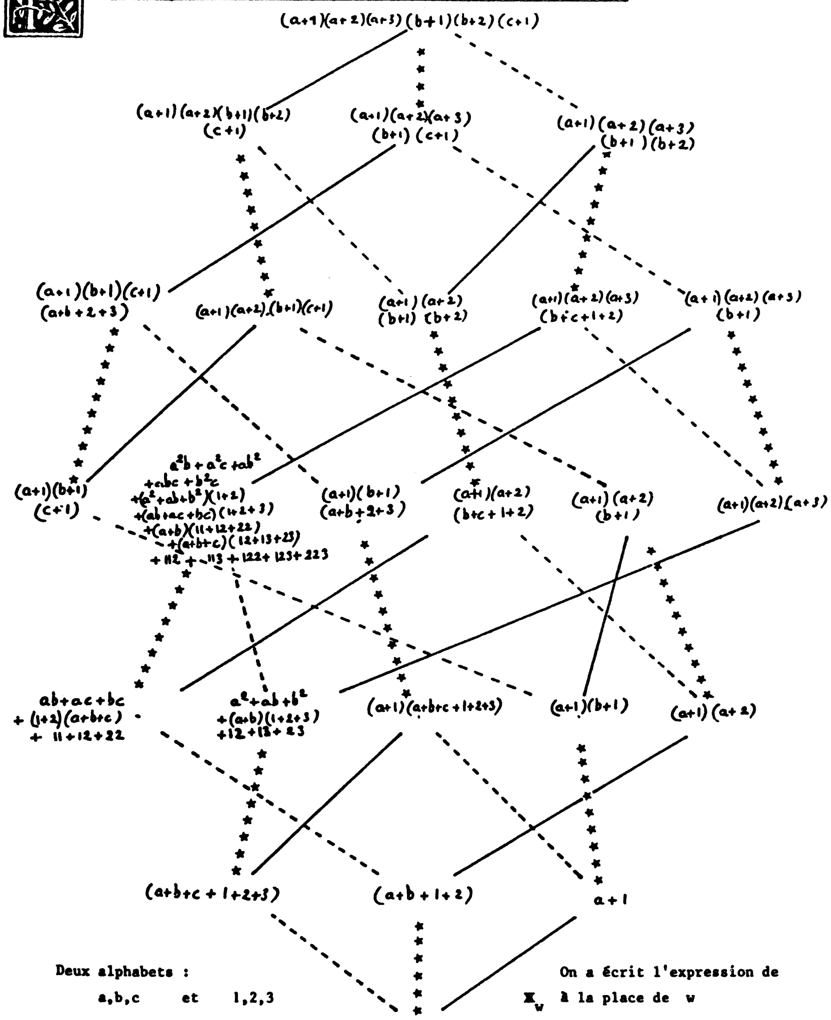
3.7 $\mathbb{X}_w(A,Z) = \Sigma X_{v\dot{w}}(A) \,.\, X_v(Z)$, somme sur $v \in W$, $l(vw) = l(w) - l(v)$.

On peut remarquer que $\mathbb{X}_w(A,Z)$ "interpole" entre X_w et $X_{w^{-1}}$:

3.8 $\mathbb{X}_w(A,Z) = X_w(A) + \ldots + X_{w^{-1}}(Z)$

les termes non écrits étant ceux de degré non nul à la fois en A et en Z.

POLYNOMES DE SCHUBERT DOUBLES



3.9 Exemple. $A = \{a,b,c\}$, $Z = \{1,2,3\}$

$\mathbb{X}_{3142}(A,Z) = (a+1)(a+2)(b+c+1+2) =$

$$
\begin{tikzcd}
 & X_{1234}(Z)\ X_{2142}(A) \arrow[d, dash] & \\
 & X_{1324}(Z)\ X_{2143}(A) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
X_{2314}(Z)\ X_{1243}(A) \arrow[dr, dash] & & X_{1423}(Z)\ X_{2134}(A) \arrow[dl, dash] \\
 & X_{2413}(Z)\ X_{1243}(A) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aab + aac \arrow[d, dash] & \\
 & (1+2)(aa+ab+ac) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
12(a+b+c) \arrow[dr, dash] & & (11+12+22)a \arrow[dl, dash] \\
 & 112 + 122 &
\end{tikzcd}
$$

4. INTERPOLATION A PLUSIEURS VARIABLES

Pour considérer les séries formelles en une infinité de variables $\{a_1,a_2,\ldots\} = A$, il est nécessaire de se donner une filtration. Nous choisissons $\mathcal{H}_0(A) \subset \mathcal{H}_1(A) \subset \ldots \subset \mathcal{H}_n(A) \ldots \subset \mathcal{H}_\infty(A)$ où $\mathcal{H}_n(A)$ est le $\mathbb{Z}$-module de base $a_1^{i_1}\, a_2^{i_2} \ldots$, $i_1 \leq n$, $i_2 \leq n-1$, $i_3 \leq n-2$, ...

Soit $Z = \{z_1,z_2,\ldots\}$ un deuxième alphabet infini, et $f(Z) = f(z_1,z_2,\ldots)$ une série formelle dans $\mathcal{H}_\infty(Z)$. Alors

4.1 Proposition

$$f(Z) = \lim_{n \to \infty} \Sigma_w\, f(A)\, \partial_w \cdot \mathbb{X}_w(\bar{A},Z)$$

w parcourant le groupe $W(a_1,\ldots,a_{n+1})$ et A^- dénotant l'alphabet $\{-a_1,-a_2,-a_3,\ldots\}$.

La notation $\lim_{n\to\infty}$ doit se comprendre en plongeant $W(a_1,\dots,a_n)$ dans $W(a_1,\dots a_{n+1})$ par $w \to w'$: $w'(a_1)= w(a_1),\dots,w'(a_n) = w(a_n)$, $w'(a_{n+1}) = a_{n+1}$. On a alors $\partial_w = \partial_{w'}$, $\mathbb{X}_w = \mathbb{X}_{w'}$.

Il suffit de démontrer la proposition pour les éléments de $\mathcal{H}_n(Z)$, n arbitraire ; la formule étant linéaire en f, on se limite à une base de $\mathcal{H}_n(Z)$, par exemple $\{X_v(Z)\}$. Il faut donc montrer

4.2 $$X_v(Z) = \Sigma_w\, X_v(A)\ \partial_w \ .\ \mathbb{X}_v(A^-,Z) \ ,$$

c'est-à-dire

4.3 $$X_v(Z) = \Sigma_v\, X_{vw}(A) \ .\ \mathbb{X}_v(A^-,Z) \ ,$$

somme sur tous les $w \in W(a_1,\dots,a_{n+1})$, $\ell(vw) = \ell(v) - \ell(w)$.

Or cette dernière formule n'est ni plus ni moins que l'inverse de (3.7), car la fonction de Moebius de tout intervalle $[u,v]$ du groupe symétrique est $(-1)^{\ell(u)-\ell(w)}$.

Q.E.D.

4.4 <u>Exemple</u>.

$$X_{2314}(Z) = X_{2314}(A) + X_{2314}(A)\,.\,\mathbb{X}_{1324}(A^-,Z)+\mathbb{X}_{3124}(A^-,Z)$$

$$= X_{2314}(A) + X_{2134}(A)(-X_{1324}(A) + X_{1324}(Z)) +$$

$$+ (X_{3124}(A) - X_{2134}(A)\,.\,X_{1324}(Z) + X_{2314}(Z)).$$

Dans le cas où $f(z)$ ne dépend en fait que de z_1, on retrouve la formule de Newton. En effet, les seuls $f\,\partial_w$ non nuls sont les $f\,\partial_{(a_1a_2)}$,

$f\,\partial_{(a_1a_2a_3)}$,..., et les polynômes de Schubert doubles correspondants sont les (z_1-a_1) , $(z_1-a_1)(z_1-a_2)$, ...

Dans le cas où $f(Z)$ dépend uniquement de z_1 et z_2 , les polynômes de Schubert doubles à considérer sont les $\mathbb{X}_w(A^-,Z)$, où w , écrit comme un mot en $1,2,\dots,n+1$ a pour sous-mot $34 \dots n+1$ (i.e. $w^{-1}(3)\, w^{-1}(4) \dots w^{-1}(n+1)$).

4.5 Exemple. $X_{4213}(y,z) = y^3z =$

$$a^3b = X_{4213}(a,b,c)\ .\ \mathbb{X}_{1234}(A^-,Z)$$

$$(a^2b+ab^2)(y-a) = X_{2413}\,\mathbb{X}_{2134}$$

$$a^3(y+z-a-b) = X_{4123}\,\mathbb{X}_{1324}$$

$$a(a+b+c)(y-a)(y-b) = X_{2143}\,\mathbb{X}_{2314}$$

$$(a^2+ab+b^2)(y-a)(z-a) = X_{1423}\,\mathbb{X}_{3124}$$

$$a(y-a)(y-b)(y-c) = X_{2134}\,\mathbb{X}_{2341}$$

$$(a+b+c)(y-a)(z-a)(y-b) = X_{1243}\,\mathbb{X}_{3214}$$

$$(y-a)(y-b)(y-c)(z-a) = X_{1234}\,\mathbb{X}_{3241}$$

La famille des polynômes de Schubert contient celle des fonctions de Schur ; la plupart des développements auxquels ont donné naissance ces dernières s'étendent aux polynômes de Schubert : nous nous sommes servis en 3.6 de la formule de Cauchy ; on trouvera dans [5] une formule de Hopf, ainsi que la mention de polynômes de Schubert en variables non commutatives (dans le monoïde plaxique, i.e. le monoïde des tableaux de Young, et le monoïde nilplaxique, i.e. le monoïde relevant le monoïde des décompositions réduites dans le groupe symétrique). Il existe aussi des "foncteurs de Schubert", tout comme les foncteurs de Schur généralisent à la catégorie des modules les fonctions de Schur.

La formule d'interpolation 4.1 hérite des différentes propriétés évoquées ci-dessus. Par exemple, si l'on spécialise l'alphabet d'interpolation en prenant $A = \{0,1,2,\ldots\}$ ou $A = \{1,q,q^2,\ldots\}$, on obtient des polynômes de Schubert qui généralisent des nombres ou polynômes classiques (nombres d'Euler, Genocchi, nombres tangents, q-tangents, q-secants,...) et dont certains sont des déterminants en coefficients binomiaux ou en polynômes de Gauss.

Ainsi la q-tangente $\Sigma\, T_{2n+1}\, x^{2n+1}/(1-q)\ldots(1-q^{2n+1})$ étant définie par

$$\frac{\Sigma(-1)^n x^{2n+1}/(1-q)\ldots(1-q^{2n+1})}{\Sigma(-1)^n\, x^{2n}/(1-q)\ldots(1-q^{2n})}\ , \text{ alors } \quad T_{2n+1} = X_{w(n)}(A)\ ,$$

avec $A = \{1,q,q^2,\ldots\}$ et $w(n) = \sigma_1.(\sigma_3\sigma_2).(\sigma_5\sigma_4)\ldots(\sigma_{2n-1}\sigma_{2n-2})$, où σ_1 , σ_2 ... sont les générateurs du groupe symétrique.

Par exemple

$$T_1 = X_{213456}(A) = 1$$
$$T_3 = X_{241356}(A) = q + q^2$$
$$T_5 = X_{241635}(A) = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 3q^6 + 2q^7 + q^8.$$

REFERENCES.

[1] BOURBAKI, Algèbre, Chap. 1.

[2] CIGLER J., Elementare q-Identitä ten, 5ème Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Editions de Strasbourg, 1981.

[3] JACOBI, Über die Darstellung einer Reihe gegebener Werte...,Crelle J. 30 (1846) 127-156.

[4] LASCOUX A. & SCHÜTZENBERGER M.P., Symmetry and Flag Manifolds, Springer L.N. 996.

[5] LASCOUX A., Classes de Chern des variétés de drapeaux, Comptes rendus 295 (1982) p.393 et 629.

[6] MEINGUET, Cauchy interpolation problem, Approximation Theory, Talbot ed. Acad. Press 1970.

[7] MILNE-THOMSON, The Calculus of Finite Differences, Mac Millan 1933.

[8] ROTA G.C., Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics Umbral Calculus Conference, Oklahoma 1978.