Lecture Notes in Computer Science

Edited by G. Goos and J. Hartmanis

210

STACS 86

3rd Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science
Orsay, France, January 16–18, 1986

Edited by B. Monien and G. Vidal-Naquet

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

DECOMPOSITION DE FONCTIONS RATIONNELLES

C. CHOFFRUT

UNIVERSITE DE HAUTE NORMANDIE
Faculté des Sciences
BP 67

76130 MONT-SAINT-AIGNAN

M.P SCHUTZENBERGER

UNIVERSITE PARIS 7
UER de Mathématiques et Informatique

2 place Jussieu,

75221 PARIS CEDEX 05

Résumé : On considère une nouvelle classe de fonctions rationnelles d'un monoïde libre dans un autre : les fonctions plurisousséquentielles pour lesquelles il existe une décomposition du domaine de définition en un nombre fini de parties reconnaissables sur chacune desquelles la fonction est sous-séquentielle (c'est à dire grossièrement séquentielle). Nous en donnons une caractérisation qui nous permet de décider si une fonction rationnelle arbitraire est plurisous-séquentielle.

Abstract : We introduce a new family of rational fonctions of a free monoid into another which we call multisubsequential. The domain of these functions can be decomposed into finitely many recognizable subsets in such a way that their restriction to each subset is subsequential (a notion which is close to sequential). We give a characterization of such functions and show that given an arbitrary rational function it is decidable whether it is multisubsequential.

I. Introduction

La théorie des fonctions rationnelles d'un monoïde libre dans un autre est intimement liée à celle des automates finis. A l'origine il était en fait difficile de les distinguer puisque les fonctions rationnelles étaient réalisées par des automates déterministes munis d'une sortie 0 ou 1 suivant que l'état courant est ou non un état final.

C'est Elgot et Mezei qui ont généralisé cette notion initiale de fonctions rationnelles et qui ont défini des objets jouissant de propriétés algébriques remarquables. Ce faisant, ils ont unifié les deux théories au moyen de la notion de partie rationnelle d'un monoïde quelconque. En ce qui concerne les fonctions rationnelles ceci revient à munir un automate non nécessairement déterministe de sorties, obtenant ainsi un transducteur.

Les domaines d'application des fonctions rationnelles sont nombreux. Limitons-nous à une énumération non exhaustive : étude des sous-familles classiques de langages algébriques [Be1], analyseurs lexicaux (bien qu'une étude théorique fasse défaut un bon langage de programmation doit pouvoir être analysé lexicalement par une fonction rationnelle "simple"), additionneurs dans différents systèmes de numération [Be2], combinatoire des mots [Cr], théorie des codes puisqu'en fait le décodage d'un code est une fonction rationnelle [Ch1] etc...

Il existe cependant une ombre au tableau : les fonctions rationnelles y ont perdu leur simplicité originelle. En effet un transducteur quelconque n'est pas nécessairement équivalent à un transducteur séquentiel (on dirait "déterministe" pour les automates où l'on sait qu'il y a équivalence entre déterministes et non déterministes). En d'autres termes, bien qu'il soit toujours préférable de calculer séquentiellement l'image d'un mot, rien ne garantit, pour une fonction rationnelle donnée, qu'elle puisse être réalisée par un transducteur séquentiel. Il est d'ailleurs symptomatique d'observer que la plupart des fonctions rationnelles non séquentielles qui apparaissent dans la littérature sont "presque" séquentielles (en fait <u>plurisousséquentielles)</u> dans la mesure où l'on peut décomposer leur domaine de définition en un nombre fini de parties reconnaissables sur chacune desquelles la fonction est sous-séquentielle comme par exemple, avec $A=\{a,b\}$, l'application partielle $f:A^* \to A^*$ définie par

$$f(a^n) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ b^n & \text{sinon} \end{cases}$$

Il semblerait donc que les auteurs soient en général réticents à considérer de "vraies" fonctions rationnelles non plurisous-séquentielles. Ceci nous parait justifié par la raison suivante. Au cours du calcul de l'image d'un mot par une fonction rationnelle on est amené à retenir jusqu'à n (n étant le nombre d'états de l'automate sousjacent) préfixes possibles de l'image, alors que pour une fonction séquentielle il existe exactement un préfixe possible : la situation est analogue à celle qui différentie le décodage d'un code quelconque et celui d'un code préfixe. On peut donc se représenter le calcul comme une coopération entre différents processeurs contenant chacun un préfixe dans un registre et échangeant des informations à chaque top d'horloge. En revanche, pour les fonctions plurisousséquentielles, on peut associer à chaque fonction sousséquentielle un processeur mais, et c'est là le point crucial, ils n'ont pas besoin de travailler de manière synchrone puisque chacun fonctionne à son rythme, indépendemment des autres.

Le but de cette communication est de montrer que l'on peut décider si une fonction rationnelle est plurisous-séquentielle, en en donnant par ailleurs une caractérisation explicite.

II. Fonctions rationnelles

Par relation r d'un ensemble X dans un autre Y, notée $r:X\to Y$, nous entendons une application de X dans l'ensemble des parties de Y. Une telle relation est une fonction si l'image de chaque élément $x\in X$ est un singolet ou l'ensemble vide, c'est-à-dire ssi c'est une application partielle de X dans Y. Nous faisons opérer les relations à droite (x r et non pas r(x)) et nous notons $\mathrm{dom}\ r=\{x\in X \mid \exists y\in Y \quad y\in xr\}$ le domaine de r.

Soit A un ensemble ou alphabet. On note A^* et A^+ respectivement les monoïdes et semigroupe libres qu'il engendre. Tout élément w de A^* est un mot dont la longueur est notée $|w|$ et l'élément neutre, noté 1, est le mot vide : $A^+=A^*\setminus\{1\}$.

Une relation r d'un monoïde libre A^* dans un autre B^* est rationnelle si son graphe

$$r \# \{(u,v)\in A^*xB^* \setminus \ v\in ur\}$$

est une partie rationnelle du monoïde produit A^*xB^*(cf[Ei], p.236).

Le théorème suivant, où pour tout monoïde M, Rat M désigne le semianneau des parties rationnelles de M, caractérise les relations rationnelles, (cf.par ex. [Bel] Thm, 7.1. ou [Ni]).

Théorème 1 :

Soit $r : A^* \to B^*$ une relation. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) r est rationnelle

2) il existe un entier $n > 0$ et un morphisme μ de A^* dans le monoïde multiplicatif des $n \times n$-matrices à entrées dans Rat B^*, un n-vecteur ligne λ et un n-vecteur colonne γ à entrées dans Rat B^* tels que l'on ait pour tout $u \in A^*$:

$$u\,r = \lambda \quad u\,\mu\gamma$$

3) $1r \in$ Rat B^* et il existe un entier $n > 0$ et un morphisme μ de A^+ dans le monoïde multiplicatif des $n \times n$-matrices à entrées dans Rat B^* de telle sorte que pour tout $u \in A^+$ on ait :

$$u\,r = u\,\mu_{1n} \quad \text{(élément en ligne 1 et colonne } n\text{)}$$

Le triplet (λ, μ, γ) ou simplement le morphisme μ dans le cas 3) est appelé transducteur et n est sa dimension. On dit qu'il réalise la relation r.

Les résultats suivants seront utilisés à plusieurs reprises dans la suite de ce travail. Ils découlent de la caractérisation des relations rationnelles par des "bimorphismes" par l'application de propriétés générales sur les parties rationnelles d'un monoïde quelconque (cf. [Be1], Théorème III,3.2).

PROPOSITION 2.

Soit $r : A^* \to B^*$ une relation rationnelle et R Rat B^*. Alors :

$$Rr^{-1} = \{ u \in A^* \mid ur \cap R \neq \emptyset \} \in \text{Rat } A^*$$

PROPOSITION 3.

Soit $r : A^* \to B^*$ une relation rationnelle et $R \in$ Rat A^*. Alors la restriction $r_R : A^* \to B^*$ définie par :

$$ur_R = \begin{cases} ur & \text{si } u \in R \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

est une relation rationnelle.

Particulièrement importante est la famille des fonctions rationnelles c'est à dire des relations rationnelles qui sont des fonctions. On a la propriété de décision suivante, [Sch1,p.245] :

Théorème 4 :

Soit $r : A^* \to B^*$ une relation rationnelle réalisée par un transducteur de dimension n. Alors c'est une fonction ssi pour tout mot $u \in A^*$ de longueur inférieure ou égale à $2n(n-1)+1$, ur contient au plus un mot.

Un cas remarquable est celui des fonctions <u>séquentielles</u> étudiées par Ginsburg et Rose [GiRo], où λ a toutes ses composantes nulles sauf une égale à 1, où les matrices $a\mu$ pour $a \in A$ sont monomiales en ligne (i.e. contiennent au plus un mot par ligne) et où γ à toutes ses entrées égales à 1.

Les fonctions <u>sousséquentielles</u> ont été introduites en [Sch2]. Elles généralisent les fonctions séquentielles en ce sens que γ est alors un vecteur arbitraire à entrées dans $B^* \cup \{\emptyset\}$. L'intérêt de ces fonctions est qu'elles constituent la famille la plus générale de fonctions associées naturellement à des automates déterministes, c'est à dire pour lesquelles le calcul de l'image d'un mot se fait séquentiellement, en temps réel.

Comme nous l'avons discuté dans l'introduction, une fonction <u>plurisousséquentielle</u> est une fonction $f : A^* \to B^*$ dont le graphe est union finie de graphes de fonctions sousséquentielles.

Remarquons qu'il existe des fonctions rationnelles qui ne sont pas plurisousséquentielles, par exemple les fonctions de décodage de codes à délai de déchiffrage non borné [Ch1].

Dans la suite toute fonction rationnelle considérée sera définie, comme en 3 du Théorème 1, par un transducteur μ la réalisant. Bien qu'on ne sache pas associer canoniquement un transducteur à une fonction rationnelle on sait cependant construire un transducteur "normalisé" réalisant la même fonction et jouissant de propriétés qui facilitent les énoncés et les preuves des résultats. C'est ce que nous précisons maintenant.

Il est d'abord clair qu'une fonction rationnelle peut toujours être réalisée par un transducteur pour lequel les entrées de $a\mu$ pour chaque $a \in A$ sont dans $B^* \cup \{\emptyset\}$, c'est à dire des singolets ou l'ensemble vide, ce que nous supposerons toujours dorénavant.

D'autre part une fonction est rationnelle (resp. sousséquentielle, plurisousséquentielle) ssi sa restriction à A^+ est elle-même rationnelle (resp. sousséquentielle, plurisousséquentielle). Ceci nous autorise à supposer que le transducteur μ satisfait $n \neq 1$.

On suppose sans perte de généralité que μ est <u>accessible</u> :
pour tout $1 \leq i \leq n$ il existe $u \in A^*$ tel que $u\mu_{1i} \neq \emptyset$
et <u>coaccessible</u> :
pour tout $1 \leq i \leq n$ il existe $u \in A^*$ tel que $u\mu_{in} \neq \emptyset$.
On dit alors qu'il est <u>normalisé</u> (cf.[Be1], Proposition 4,1.1.)

Enfin on suppose que le transducteur est <u>inambigu</u> dans le sens que pour tout couple $1 \leq i,j \leq n$ et tout couple $u,v \in A^*$ il existe un unique $1 \leq k \leq n$ tel que l'on ait :

$$u\mu_{ik} \cdot v\mu_{kj} \neq \emptyset$$

(cf.[Be1], Théorème IV,4.2).

III. Rappel sur les fonctions sousséquentielles

Dans la suite on supposera toute fonction rationnelle donnée par un transducteur μ normalisé et inambigu. Pour nous conformer à la coutume, nous noterons Q et non pas $\{1,\dots,n\}$ l'ensemble des indices (ou des états) du transducteur, remplaçant ainsi 1 par q_- (état initial) et n par q_+ (état terminal) dans l'énoncé de la condition 3). Enfin $||\mu||$ désignera la longueur maximale des entrées non nulles des matrices $a\mu$ pour $a \in A$.

En ne considérant que les supports on peut définir une action de A^* sur l'ensemble des parties de Q en posant pour tout $u \in A^*$ et $P,P' \subseteq Q$:

$$\text{si } P' = \{q' \in Q \mid \exists q \in P \quad u\mu_{qq'} \neq \emptyset\}.$$

$$P.u=P'$$

Il est clair que la notion de préfixité joue un rôle fondamentale dans l'étude des fonctions séquentielles (qui conservent la préfixité) et sousséquentielles (qui conservent une propriété affaiblie). Etant donné deux mots u,v A^* on note $u < v$ si u est préfixe de v (i.e. $v=ux$ pour un certain $x \in A^*$) et l'on dit que u et v sont incomparables si aucun n'est préfixe de l'autre.

Utilisant la notion de préfixe on peut définir une distance (la distance préfixe) entre deux mots $u,v \in A^*$ en posant :

$$d(u,v) = |u| + |v| - 2|u \wedge v|$$

où $u \wedge v$ désigne le plus long préfixe commun à u et v. Deux mots sont alors d'autant plus proches qu'ils ont un plus long préfixe commun.

On peut alors obtenir une caractérisation des fonctions sousséquentielles en termes de cette distance (cf.[Ch3]) :

Théorème 1 :

Une fonction $f : A^* \to B^*$ est sousséquentielle ssi elle vérifie les deux conditions suivantes :

1) pour toute partie rationnelle $R \in \mathrm{Rat}\, B^*$ on a :

$$Rf^{-1} = \{u \in A^* \mid uf \in R\} \in \mathrm{Rat}\, A^*$$

2) il existe un entier $L > 0$ tel que pour tous $u,v \in \mathrm{dom}\, f$ on ait :

$$d(uf,vf) < Ld(u,v).$$

Par définition, une fonction sous séquentielle peut être réalisée par un transducteur séquentiel c'est à dire mononial au sens du paragraphe antérieur. Ceci n'exclut pas que cette même fonction puisse être réalisée par un transducteur non séquentiel, mais il est alors facile de prévoir que cette "non séquentialité", liée à la notion de branchement définie ci-dessous, sera "bénigne". Ainsi sommes nous amenés à considérer la classification suivante.

Un triplet $(q_1,q,q_2) \in Q'$ est un <u>branchement</u> s'il existe $u \in A^*$ et $x_1,x_2 \in B^*$ tels que l'on ait :

(1) $\quad u\mu_{qq_1}=x_1$ et $u\mu_{qq_2}=x_2$

Ce branchement est <u>faible</u> s'il existe un entier $k > 0$ tel que les égalités (1) entraînent :

(2) $\quad d(x_1,x_2) < k$

Il est <u>fort</u> dans le cas contraire. Enfin il est <u>absolu</u> s'il est fort et si $q=q_1$ ou $q=q_2$.

On peut définir un préordre sur l'ensemble des branchements en disant que (q_1,q,q_2) <u>précède</u> le branchement (q'_1,q,q'_2) s'il existe $v \in A^*$ tel que l'on ait :

$$q'_1 \in q_1.u \quad \text{et} \quad q'_2 \in q_2.u$$

Par conséquent si (q'_1,q,q'_2) est faible alors (q_1,q,q_2) sera lui-même faible.

On montre alors le résultat suivant (cf.[Ch2]) :

<u>Théorème 2.</u>

<u>Soit</u> μ <u>un transducteur réalisant une fonction rationnelle</u> $f : A^* \to B^*$. <u>Alors</u> f <u>est sous-séquentielle ssi tous les branchements de</u> μ <u>sont faibles.</u>

Que cette caractérisation des transducteurs réalisant des fonctions sousséquentielles soit décidable résulte des deux Propositions suivantes.

<u>PROPOSITION 3.</u>

<u>Si</u> (q_1,p,q_2) <u>est un branchement faible, alors on a</u> :

<u>pour tous</u> u,v A^* x_1,x_2,y_1,y_2 B^* <u>les égalités :</u>

$$u\mu_{pq_1}=x_1 \qquad v\mu_{q_1q_1}=y_1$$

$$u\mu_{pq_2}=x_2 \qquad v\mu_{q_2q_2}=y_2$$

(1) <u>entraînent</u> :

$y_1=y_2=1$ <u>si</u> x_1 <u>et</u> x_2 <u>sont incomparables</u>

$y_1t=ty_2$ <u>si</u> $x_2=x_1t$

$ty_1=y_2t$ <u>si</u> $x_1=x_2t$

<u>Preuve :</u>

Puisque le branchement (q_1,p,q_2) est faible, il existe un entier $k > 0$ tel que l'on ait pour tout $i > 0$:

$$d(x_1y_1^i,x_2y_2^i) < k$$

ce qui entraîne en particulier : $|y_1|=|y_2|$. Sans perte de généralité nous pouvons supposer $y_1\neq 1$ et donc $y_2\neq 1$.

Supposons par exemple $|x_1| \leq |x_2|$. Pour m suffisamment grand les mots $x_1y_1^m$ et $x_2y_2^m$ ont un préfixe commun de longueur $|x_2y_2|$ ce qui entraîne :

$$x_2y_2=x_1y_1^py'_1.$$

où $p > 0$ et $y_1=y'_1y''_1$.

En posant $x_2=x_1t$ et en remarquant que $|y_1|=|y_2|$ entraîne $y_2=y''_1y'_1$ il vient :

$$ty_2=y_1t \text{ où } t=(y'_1y''_1)^{p-1}y'_1$$

ce qui achève la preuve.

■

Nous dirons que le branchement (q_1,p,q_2) satisfait la condition (1) à l'ordre $m > 0$ si celle-ci est vérifie pour tout u,v satisfaisant la condition supplémentaire :

$$|uv| \leq m.$$

On a alors un résultat qui établit la décidabilité du théorème 2.

<u>Proposition 4.</u>

<u>Un branchement</u> (q_1,p,q_2) <u>est faible ssi tous les branchements qui le précédent satisfont la condition</u> (1) <u>à l'ordre</u> n^2+1.

Preuve :

La condition est trivialement nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante il nous faut introduire la notion suivante :

On dit que u passe par un branchement (r_1,p,r_2) s'il existe une factorisation : u=vw telle que :

$$v\mu_{pr_1} \neq \emptyset \quad w\mu_{r_1q_1} \neq \emptyset$$

$$v\mu_{pr_2} \neq \emptyset \quad w\mu_{r_2q_2} \neq \emptyset.$$

La Proposition découle alors du Lemme :

Lemme 5.

Soit (q_1,p,q_2) un branchement et $u \in A^*$ un mot tel que :

$$u\mu_{pq_1} = x'_1 \in B^* \quad u\mu_{pq_2} = x'_2 \in B^*$$

Si u passe uniquement par des branchements satisfaisant la condition (1) à l'ordre n^2+1 alors on a :

$$d(x'_1,x'_2) \leq n^2 \, ||\mu||$$

Preuve :

Supposons par l'absurde qu'il existe un mot $u \in B^*$ tel que l'on ait :

(2) $\quad d(x'_1,x'_2) > n^2||\mu||.$

Par définition de $||\mu||$ on a donc $|u| > n^2$. Par hypothèse d'inambiguité, les n^2+1 premiers préfixes de u définissent de façon unique autant de paires d'états, donc deux de ces facteurs sont associés à la même paire (r_1,r_2) ce qui revient à dire que l'on peut factoriser u en :

$$u=vhw \qquad h\neq 1 \quad \text{et} \quad |vh| \leq n^2$$

et que l'on a :

$$v\mu_{pr_1}=x_1 \qquad h\mu_{r_1r_1}=y_1 \qquad w\mu_{r_1q_1}=z_1$$

$$v\mu_{pr_2}=x_2 \qquad h\mu_{r_2r_2}=y_2 \qquad w\mu_{r_2q_2}=z_2$$

Puisque le branchement (r_1,p,r_2) satisfait la condition (1) à l'ordre n^2, en raison de la minimalité de $|u|$ on peut sans perte de généralité supposer que l'on a :

$$x_2=x_1t \quad \text{et} \quad y_1t=ty_2.$$

Il vient alors :

$$x_2y_2z_2=x_1ty_2z_2=x_1y_1tz_2$$

donc :

$$d(x_1y_1z_1,x_2y_2z_2)=d(z_1,tz_2)=d(z_1,tz_2)=d(x_1z_1,x_2z_2)$$

ce qui contredit la minimalité de u.

■

IV Fonctions pluri-sousséquentielles.

Le but de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant qui est de plus décidable en raison de la Proposition III.4.

Théorème 1.

Soit μ un transducteur réalisant une fonction rationnelle $f: A^* \to B^*$. Alors f est plurisousséquentielle ssi μ ne possède aucun branchement absolu.

Preuve :

Condition nécessaire : on utilise une construction inspirée de [Ch2].

Supposons que μ possède un branchement absolu (q_1,q_1,q_2) et posons :

$$u\mu_{q_-q_1}=x \in B^* \qquad w\mu_{q_2q_+}=z \in B^*.$$

Si f était union de N fonctions sousséquentielles il existerait d'après le théorème III.1 un coefficient $L > o$ tel que dans tout ensemble de N+1 mots distincts $t_1,t_2,\ldots,t_{N+1} \in \mathrm{dom}\, f$ il en existe deux t_i,t_j $(i < j)$ vérifiant :

$$d(t_if,t_jf) < L\, d(t_i,t_j).$$

C'est cette condition que nous allons nier. Pour cela on considére une suite quelconque $v_1,\ldots,v_{N+1}$ de mots de A^* vérifiant $\{q_1,q_2\}\in q_1.v_i$ $i=1,\ldots,N+1$ et l'on pose :

$$t_i=uv_{N+1}\ldots v_iw \qquad i=1,\ldots,N+1.$$

On peut alors minorer :

(1) $d(t_if,t_jf) - L\, d(t_i,t_j)$

par

(2) $d(v_j\mu_{q_1q_1},v_j\mu_{q_1q_2}) - \Gamma(v_{j-1},\ldots,v_1,z,w)$

où Γ est une fonction ne dépendant pas de v_j. Il suffit alors de déterminer v_j de façon à ce que l'expression (2) soit strictement positive et (1) devient alors :

$$d(t_i f, t_j f) > L\ d(t_i, t_j)$$

obtenant ainsi une contradiction.

Condition suffisante :

Commençons par établir un résultat intéressant en lui-même puisqu'il exprime une propriété de fermeture des fonctions sousséquentielles.

Lemme 2.

Soit $g,h : A^* \to B^*$ des fonctions sousséquentielles et supposons que dom g soit un ensemble préfixe :

$$u, uv \in \text{dom } g \text{ implique } v=1.$$

Alors le produit $gh : A^* \to B^*$ défini par :

$$(uv)gh = ug\ vh$$

est une fonction sousséquentielle.

Preuve :

Le fait que gh soit une fonction résulte du fait que le produit dom g dom h est inambigu (i.e. $u_1, u_2 \in$ dom g, $v_1, v_2 \in$ dom h et $u_1v_1 = u_2v_2$ implique $u_1 = u_2$ et $v_1 = v_2$). De plus cette fonction est rationnelle puisque son graphe est égal au produit des graphes de g et de h. Donc la condition 1) du Théorème III.2 est vérifiée d'après la Proposition II,2.

Soient donc $u,v \in$ dom gh = dom g dom h et $w = u \wedge v$. On considère les factorisations uniques :

$$u = u_1u_2 \qquad v = v_1v_2$$

où $u_1, v_1 \in$ dom g, $u_2, v_2 \in$ dom h.

On peut sans perte de généralité supposer $|u_1| \leq |v_1|$. De plus on a nécessairment $|w| < |u_1|$ car $|u_1| \leq |w|$ implique que u_1 est préfixe propre de v_1. Il vient alors $w = u_1 \wedge v_1$ et par conséquent :

$$d(u_1v_1, u_2v_2) = d(u_1, v_1) + |u_2| + |v_2|.$$

Puisque g est sousséquentielle il existe d'après le théorème III,2 un entier L satisfaisant :

$$d(u_1g, v_1g) \leq L\ d(u_1, v_1).$$

Comme on a d'autre part :

$$d(ugh, vgh) \leq d(u_1g, v_1g) + |u_2h| + |v_2h|$$

il vient :

$$d(ugh, vgh) \leq L\ d(u_1, v_1) + ||h||(|u_2| + |v_2|) \leq \max\{||h||, L\}\ d(u,v).$$

Ce qui montre que la condition 2) du Théorème III.2 est vérifiée et achève la preuve.

■

Revenons à la preuve du Théorème et notons Q_1 le sousensemble des états $q_1 \in Q$ pour lesquels il existe $q_2 \in Q$ tel que (q_1, q_-, q_2) soit un branchement fort. Nous nous proposons de décomposer le domaine Y=dom f suivant l'existence d'un état de Q_1 dans les chemins définis par les mots de Y.

Pour cela on pose pour tout $q \in Q_1$:

$$Y_q = \{w \in Y \mid w\mu_{q_-q} \neq \emptyset\}$$

et $$X_q = Y_q - (\bigcup_{q' \in Q_1} Y_{q'})\, A^+.$$

Il est clair que Y_q est reconnaissable ainsi que X_q (X_q est l'ensemble des mots qui définissent un chemin de q_- à q dont aucun état intermédiaire n'appartient à Q_1).

On considère l'ensemble préfixe $X = \bigcup_{q \in Q_1} X_q$ et l'on définit la décomposition (rationnelle) de dom f :

$$Y = \bigcup_{q \in Q_1} X_q Z_q \cup (Y - XA^*)$$

où $Z_q = \{w \in A^* \mid w\mu_{qq_+} \neq \emptyset\}$.

Soit $\alpha : A^* \to B^*$ la restriction de f à Y-XA* et pour tout $q_1 \in Q_1$ soient β_{q_1} et γ_{q_1} les fonctions définies par :

$$w\beta_{q_1} = w\mu_{q_-q_1} \quad \text{pour tout } w \in X_{q_1}$$

$$w\gamma_{q_1} = w\mu_{q_1q_+} \quad \text{pour tout } w \in A^*.$$

Chacune des fonctions α, β_{q_1} et γ_{q_1} est rationnelle. Pour α et β_{q_1} ceci résulte de la Proposition II,3. Pour γ_{q_1} on remarque plus précisément qu'elle peut être réalisée par le transducteur (q_1, ν, q_+) où ν est obtenu en supprimant dans chaque matrice $a\mu$ ($a \in A$) la ligne et la colonne indicée par q_-. Montrons en effet que q_- n'est pas accessible de q_1. Pour cela soit $q_2 \in Q$ tel que (q_1, q_-, q_2) soit un branchement fort. Si q_- était accessible de q_1 on aurait :

$$w\mu_{q_1q_-} = y \in B^*$$

pour un certain $w \in A^*$. Par hypothèse, le branchement (q_1, q_1, q_2) est faible donc il existe un entier $k > 0$ tel que pour tout $u \in A^*$ vérifiant :

$$u\mu_{q_-q_1} = x_1 \in B^* \quad u\mu_{q_-q_2} = x_2 \in B^*,$$

on ait :

$$d(wu\,\mu_{q_1q_1}, wu\mu_{q_1q_2}) = d(yx_1, yx_2) \leq k$$

d'où $d(x_1,x_2) \leq k$, contrairement à l'hypothèse que (q_1,q_-,q_2) est fort. Par hypothèse de récurrence sur la dimension de ν, la fonction γ_q est donc plurisous- séquentielle. En raison du Lemme précédent il ne reste donc plus qu'à vérifier que α et β_{q_1} sont plurisousséquentielles.

Considérons la fonction α, le cas de la fonction β_{q_1} se traitant par des arguements analogues. D'après la Proposition II,2, la condition 1) du Théorème III, 1 est satisfaite. En ce qui concerne la condition 2), considérons des mots $w,u,v \in A^*$ avec $u \neq v$, tels que

$$wu, wv \in \text{dom } \alpha$$

On a alors :

$$wu\alpha = w\mu_{q_-q_1}\, u\mu_{q_1q_+}$$

$$wv\alpha = w\mu_{q_-q_2}\, u\mu_{q_2q_+}$$

pour certains $q_1, q_2 \in Q$.

Par définition de α, le branchement (q_1,q_-,q_2) est faible ainsi que tous les branchements qui le précèdent. D'après le lemme III,5 on a :

$$d(w\mu_{q_-q_1}, w\mu_{q_-q_2}) \leq n^2 ||\mu||.$$

Mais alors :

$$d(wu\,\alpha, wv\,\alpha) \leq n^2\, ||\mu|| + (|u|+|v|)||\mu||$$

$$(|u|+|v|)\,(n^2+1)\,||\mu|| \leq n^2 ||\mu|| d(wu,wv)$$

montrant ainsi que la condition 2) est satisfaite, ce qui achève la preuve.

■

V Bibliographie

[Be1] BERSTEL J., "Transductions and Context-Free Languages", Teubner, 1979.

[Be2] BERSTEL J., Fonctions rationnelles et addition, Actes de l'Ecole de Printemps sur la Théorie des Langages, Murol, 1981, p. 177-183.

[Ch1] CHOFFRUT C., Une caractérisation des codes à délai borné par leur fonction de décodage, in Actes de l'Ecole de Printemps sur la Théorie des codes, Jougne, 1979, p. 47-56.

[Ch2] CHOFFRUT C., Une caractérisation des fonctions séquentielles et sous séquentielles, Theoret. Comput. Sci., 5, 1977, p. 325-337.

[Ch3] CHOFFRUT C., A generalisation of Ginsburg and Rose's characterization of g-s-m mappings, Proceedings of the 6 th ICALP Conférence, 1979, p. 88-103.

[Cr] CROCHEMORE M., Optimal factor transducers, Rapport LITP 84-86.

[GiRo] GINSBURG S. & G.F. ROSE, A Characterization of machine mappings, Can. J. of Math., 18, 1966, p. 381-388.

[Ni] NIVAT M., Transductions des Langages de Chamsky, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1968, p. 339-455.

[Sch1] SCHUTZENBERGER M.P., Sur les relations rationnelles entre monoïdes libres, Thoret. Comput. Sci., 3, 1976, p. 243-259.

[Sch2] SCHUTZENBERGER M.P., Sur une variante des fonctions séquentielles, Theoret. Comput. Sci., 4, 1977, p. 47-57.