Contemporary Mathematics
Volume **88**, 1989

FONCTORIALITE DES POLYNOMES DE SCHUBERT

A. Lascoux and M.P. Schützenberger

Abstract : The simultaneous lifting of the classical (i.e. commutative) Schubert polynomials into two non commutative algebras related by the "Dualité de Cauchy" gives a non commutative, as well as functorial, definition of these polynomials.[1]

INTRODUCTION

Les polynômes de Schubert constituent la généralisation naturelle des fonctions de Schur quand on remplace la condition de symétrie globale par celle associée à un sous-groupe de Frobenius du groupe symétrique. L'interprétation en terme de polynômes des opérations usuelles de la géométrie des variétés de drapeaux en est éclairée et bénéfécie du même coup de la possibilité d'effectuer les calculs de façon explicite.

La définition originellement proposée pour ces polynômes n'en faisait pas apparaître directement le caractère fonctoriel. Celui-ci est développé par Kraskiewicz & Pragacz [3] qui généralisent la construction des *Foncteurs de Schur* . Nous établissons ici la fonctorialité des polynômes de Schubert comme conséquence d'un résultat plus général qui fournit une version non commutative de ces polynômes.

Cette définition plus stricte des polynômes de Schubert laisse percevoir leur lien avec divers objets combinatoires dont les plus remarquables sont les bases standards de Lakshmibai/Musili/Seshadri [9], les caractères partiels de Demazure, etc...

---

[1] *This paper is in final form, and no version of it will be submitted for publication elsewhere.*

Pour faciliter l'accès aux résultats principaux, on consacre les sections 1 et 2 aux rappels de quelques résultats fondamentaux. La section 3 établit une dualité entre deux algèbres non commutatives dans lesquelles les bases de Schubert sont distinguées par diagonalisation. La section 4 détaille l'algorithmique livrant les polynômes de Schubert dans la cas non commutatif et constitue l'aboutissement principal de notre étude.

1. MONOIDES PLAXIQUE ET NILPLAXIQUE

On considère l'*algèbre libre* (non commutative) engendrée par un ensemble ordonné de variables $\mathbb{A} = \{ a_1 < a_2 < \ldots \}$, c'est-à-dire l'algèbre $\mathbb{Z}\langle\mathbb{A}^*\rangle$ du monoide libre $\mathbb{A}^*$.Les éléments de $\mathbb{A}^*$ sont les *mots* sur l'alphabet $\mathbb{A}$. Nous rappelons la terminologie usuelle concernant les mots qui est motivée par la théorie de Young.

Le degré d'un mot w est noté $|w|$. Une *ligne* (resp. *colonne*) est un mot croissant au sens large : $w = x_1x_2x_3\ldots,\ x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \in \mathbb{A}$ (resp. un mot strictement décroissant :$w = x_1x_2x_3\ldots,\ x_1 > x_2 > x_3 > \ldots \in \mathbb{A}$).

La *factorisation en lignes* d'un mot w est la factorisation $w = (x_1\ldots x_m)(x_{m+1}\ldots x_n)(x_{n+1}\ldots x_p)\ldots$ obtenue en coupant w à chaque décroissance $x_n > x_{n+1}$ La suite des longueurs des lignes de w est la *forme* de w .

Définition 1.1. Un mot est *tableau* si et seulement si sa factorisation en lignes $w = w_1.w_2.w_3 \ldots$ est telle que

1) $|w_1| \le |w_2| \le |w_3| \le \ldots$

2) Pour tout i , le sous-mot formé des i-èmes lettres de ses lignes successives est une colonne.

Cette définition mène à la représentation *planaire* des tableaux qui matérialise lignes et colonnes : ainsi le tableau $w = a_5a_6a_3a_4a_6a_1a_2a_4a_4$ a pour factorisation en lignes $(a_5a_6)(a_3a_4a_6)(a_1a_2a_4a_4)$, pour colonnes successives $a_5a_3a_1$, $a_6a_4a_2$, a_6a_4 , a_4 et se représente par

$$\begin{matrix} a_5 & a_6 & & \\ a_3 & a_4 & a_6 & \\ a_1 & a_2 & a_4 & a_4 \end{matrix}$$

Une *transformation plaxique élémentaire (ou de Knuth)* est une transformation d'un mot de degré 3 d'un des quatre types suivants, pour $x < y < z \in \mathbb{A}$:

$$(1.2) \qquad zxy \equiv xzy \quad ; \quad yxz \equiv yzx$$

$$(1.3) \qquad yxx \equiv xyx \quad ; \quad yxy \equiv yyx$$

Deux mots w, w' sont *plaxiquement congrus* , $w \equiv w'$, si l'un peut être obtenu à partir de l'autre par une suite de transformations élémentaires sur des facteurs de longueur 3. Par exemple, $a_1a_2a_3a_1 \equiv a_1a_2a_1a_3 \equiv a_2a_1a_1a_3$. On a le fait remarquable qu'un tableau est congru au produit de ses colonnes successives. Ainsi

$$(a_5a_6)(a_3a_4a_6)(a_1a_2a_4a_4) \equiv (a_5a_3a_1)(a_6a_4a_2)(a_6a_4)(a_4)$$

Le *monoide plaxique* $\mathbb{A}^*/\equiv$ est le quotient de $\mathbb{A}^*$ par la congruence plaxique ; l'anneau associé est l'*anneau plaxique* $\mathbb{Z}\langle\mathbb{A}^*/\equiv\rangle$ (cf [5]).

Le monoide nilplaxique est une variante du précédent. Pour le distinguer, nous prenons un alphabet différent $\mathbb{D} = \{\delta_1 < \delta_2 < \dots\}$.

Les *transformations nilplaxiques élémentaires* sont, pour tous $i<j<k$:

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \delta_k\delta_i\delta_j \cong \delta_i\delta_k\delta_j & \text{et} \quad \delta_j\delta_i\delta_k \cong \delta_j\delta_k\delta_i \\ \delta_k\delta_i\delta_k \cong \delta_k\delta_k\delta_i & \text{et} \quad \delta_k\delta_i\delta_i \cong \delta_i\delta_k\delta_i \end{cases}$$

$$(1.5) \qquad \delta_i\delta_{i+1}\delta_i \cong \delta_{i+1}\delta_i\delta_{i+1}$$

$$(1.6) \qquad \delta_i\delta_i \cong 0$$

où le zéro, 0 , est celui de l'algèbre $\mathbb{Z}\langle\mathbb{D}^*\rangle$.

Ces relations élémentaires ne diffèrent des relations plaxiques que dans le cas de mots en deux lettres consécutives. On définit le *monoide nilplaxique* et l'*algèbre nilplaxique* $\mathbb{Z}\langle\mathbb{D}^*/\cong\rangle$ comme précédemment.

Le théorème fondamental de la théorie de ces deux monoides est le suivant, pour lequel nous renvoyons à [5, 7] :

Théorème 1.7. *1) Chaque classe plaxique (resp. nilplaxique autre que la classe de 0), contient un et un seul tableau* t .

2) Les éléments de la classe de t *sont en bijection avec les tableaux standards de même forme que* t .

La bijection est donnée dans le cas plaxique par l'algorithme de Schensted, ou plus visuellement, par le *jeu de taquin* dont une légère modification (pour les configurations du type (1.5)) permet de traiter le cas nilplaxique. Il semble impliqué par P.Edelman et C.Greene [2] que la théorie du nilplaxique a été obtenue indépendamment de [7] par ces deux auteurs.

L'anneau des polynômes (commutatifs !) $\mathbb{Z}[\mathbb{A}]$ est un quotient de l'algèbre plaxique $\mathbb{Z}\langle\mathbb{A}^*/\equiv\rangle$, puisque les règles (1.2) et (1.3) sont des règles de commutation.

Les générateurs du groupe symétrique (i.e. les transpositions d'éléments consécutifs) vérifient les relations (1.4) et (1.5). Le quotient naturel de $\mathbb{Z}\langle\mathbb{D}^*/\cong\rangle$ est l'algèbre des décompositions réduites dans le groupe symétrique, isomorphe elle même à l' *algèbre des différences divisées*.

Nous choisirons plutôt ce dernier point de vue. A chaque permutation μ du groupe symétrique $\mathfrak{S}(\mathbb{A})$, on associera, comme le faisaient déjà Bernstein/Gelfand/Gelfand ainsi que Demazure une *différence divisée* notée ∂_μ agissant sur l'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[\mathbb{A}]$, cf.[6].

Le produit dans l'algèbre des ∂_μ est donné par

(1.8) $\partial_\mu \partial_\zeta = \partial_{\mu\zeta}$ ou 0 , selon que $l(\mu\zeta) = l(\mu)+l(\zeta)$ ou non .

la *longueur* $l(\mu)$ d'une permutation étant selon la terminologie classique le nombre total de ses inversions (cf.[1]).

On note ∂_i , à droite, la différence divisée correspondant à la transposition σ_i de a_i et a_{i+1} : pour tout polynôme f ,

$$f\,\partial_i = (f - f^{\sigma_i})/(a_i - a_{i+1}) \tag{1.9}$$

La règle (1.8) implique que si $\sigma_i\sigma_j\sigma_k\dots$ est une décomposition réduite de μ, alors $\partial_i\partial_j\partial_k\dots = \partial_\mu$.

Les différences divisées sont le quotient de l'algèbre libre par les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i \quad \text{si} \quad |j-i|\geq 1 \\ \partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1} \\ \partial_i\partial_i = 0 \end{array}\right. \tag{1.10}$$

L'algèbre qu'elles engendrent est dite *algèbre des différences divisées* et notée $\mathfrak{Div}(\mathbb{A})$. Cette algèbre est un quotient de l'algèbre nilplaxique, puisque les commutations (1.10) impliquent les commutations (1.4), (1.5).

Les fonctions de Schur sont la base fondamentale de fonctions symétriques (en variables commutatives). Elles se relèvent dans l'algèbre libre, la *fonction de Schur non commutative* d'indice la partition I étant définie comme la somme des tableaux de forme I . On peut relever à l'algèbre libre l'action naturelle du groupe symétrique, de telle sorte que les fonctions de Schur sont des invariants du groupe symétrique. Le fait notable que l'image de ces fonctions dans l'algèbre plaxique engendre une sous-algèbre commutative, isomorphe à l'anneau des polynômes symétriques est la motivation des congruences plaxiques (cf.[5]).

Soient dans le cas commutatif $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ et $\mathbb{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ deux alphabets.

Définition 2.1. La *résultante* de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ (ou des polynômes $\prod(x-a_i)$ et $\prod(x-b_i)$) est

$$\mathfrak{R}(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \prod_{1\leq i,j\leq m} (a_i - b_j)$$

Proposition 2.2.

$$\mathfrak{R}(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \sum (-1)^{|I|} S_{CI}(\mathbb{A}).S_I(\mathbb{B})$$

somme sur toutes les partitions I : $0 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m \leq m$, CI *désignant la partition complémentaire* $(m-i_m , \ldots, m-i_1)$

C'est par cette propriété de diagonalisation que Cauchy a défini les fonctions de Schur.

Les différences divisées permettent une extension de la famille des fonctions de Schur en des polynôms gardant leurs propriétés les plus intéressantes. Soit $\mathbb{A}$ un alphabet de cardinal n+1. Les *polynômes de Schubert*, pour le groupe symétrique $\mathfrak{S}(\mathbb{A})$, sont définis comme les images du monôme $a_1^{\,n}\, a_2^{\,n-1} \ldots a_{n+1}^{\,0}$ par les différences divisées ∂_μ , $\mu \in \mathfrak{S}(\mathbb{A})$. Plus précisément, soit ω l'élément maximum (dit aussi "de plus grande longueur") de $\mathfrak{S}(\mathbb{A})$. On définit les polynômes de Schubert par

(2.3) $$X_\mu = a_1^{\,n}\, a_2^{\,n-1} \ldots a_{n+1}^{\,0}\, \partial_{\omega\,\mu}$$

En particulier, $X_\omega = a_1^{\,n}\, a_2^{\,n-1} \ldots a_{n+1}^{\,0}$ et

(2.4) $X_\mu \partial_i = X_{\mu\sigma_i}$ ou 0 , selon que $l(\mu\sigma_i) < l(\mu)$ ou non

en notant $l(\mu)$ la *longueur* de la permutation μ .

Proposition 2.5. *Soit* $\mathfrak{R}_{1/2}(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \prod_{1\le i+j\le n+1} (a_i - b_j)$ *la mi-résultante de* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *. Alors*

$$\mathfrak{R}_{1/2}(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \sum (-1)^{l(\mu)} X_{\omega\mu}(\mathbb{A}) \,.\, X_\mu(\mathbb{B})$$

Cette proposition étend la formule de Cauchy aux polynômes de Schubert. Ces derniers sont une base de $\mathbb{Z}[\mathbb{A}]$ en tant que $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$-module libre, i.e. tout polynôme en $\mathbb{A}$ s'écrit de manière unique $P = \sum_\mu P_\mu . X_\mu$, où les P_μ sont des éléments de $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$.

Deux autres bases de $\mathbb{Z}[\mathbb{A}]$ sont

(2.6) l'ensemble des monômes $a^I : a_1^{i_1} \dots a_{n+1}^{i_{n+1}}$, $0\le i_1\le n$, $0\le i_2 \le n-1$, ..., $0\le i_{n+1} \le 0$
$\left[\text{on écrira } 0 \le I \le E \text{ , avec } E = (n, n-1, \dots, 0)\right]$

et l'ensemble des produits

(2.7) $P_I = \Lambda_{i_1}(\mathbb{A}_n) \dots \Lambda_{i_{n-1}}(\mathbb{A}_2).\Lambda_{i_n}(\mathbb{A}_1).\Lambda_{i_{n+1}}(\mathbb{A}_0)$, $0\le I \le E$

où $\mathbb{A}_j = \{a_1, \dots, a_j\}$, et où, pour tout alphabet $\mathbb{B}$, les $\Lambda_i(\mathbb{B})$ sont les *fonctions symétriques élémentaires* de l'alphabet $\mathbb{B}$ (i.e. $\sum z^i \Lambda_i(\mathbb{B}) = \prod_{b\in\mathbb{B}} (1+zb)$, cf [10, p.12]).

On munit $\mathbb{Z}[\mathbb{A}]$ du $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$-produit scalaire pour lequel $\{X_\mu\}$ est une base orthonormée :

(2.8) $(X_\mu, X_\zeta) = 1$ ou 0 selon que $\mu = \zeta$ ou non .

Pour ce produit scalaire, $\{a^I, 0\le I\le E\}$ est la base adjointe de $\{P_I , 0\le I\le E\}$, cf.[6] .

Les $\Lambda_i(\mathbb{A}_j)$ sont des fonctions de Schur particulières. L'interprétation en terme de tableaux donnée au début du paragraphe montre que $\Lambda_i(\mathbb{A}_j)$ se relève dans l'algèbre libre en la somme (notée par la même lettre) de toutes les colonnes de degré i : explicitement, $\Lambda_i(\mathbb{A}_j) = \sum x_1 \dots x_i$, somme sur tous les i-uples d'éléments $x_1 > \dots > x_i$ d'éléments de $\mathbb{A}_j$.

Pour j fixe, comme on l'a mentionné plus haut, le produit des

$\Lambda_i(\mathbb{A}_j)$ est commutatif dans l'algèbre plaxique. Ceci n'est pas le cas pour j variable : par exemple, $a_1(a_1+a_2) = \Lambda_1(\mathbb{A}_1).\Lambda_1(\mathbb{A}_2) \neq \Lambda_1(\mathbb{A}_2).\Lambda_1(\mathbb{A}_1) = (a_1+a_2)a_1$. On convient de relever P_I dans l'algèbre libre en respectant l'ordre des facteurs :

(2.9) $$P_I = \Lambda_{i_1}(\mathbb{A}_n) \ldots \Lambda_{i_{n+1}}(\mathbb{A}_0) \quad , \quad 0 \le I \le E$$

De même, on relève dans $\mathbb{Z}\langle\mathbb{A}^*\rangle$ les polynômes de Schubert en les *polynômes de Schubert libres* :

(2.10) $$X_\mu = \sum_I (a^I, X_\mu)\, P_I \quad , \quad \mu \in \mathfrak{S}(\mathbb{A})$$

L'image du $\mathbb{Z}$-module engendré par les P_I ou X_μ dans l'algèbre plaxique est dit *module de Schubert* (ce n'est pas une sous-algèbre). On a plusieurs involutions sur le module de Schubert. Par exemple, l'involution $P \longrightarrow P^¶$ définie par :

$$\forall\ I : 0 \le I \le E \ , \qquad P_I{}^¶ = P_{E-I} \quad ,$$

où E-I désigne $(n-i_1, n-1-i_2, \ldots, 0-i_{n+1})$. On a donc

(2.11) $$X_\mu{}^¶ = \sum_I (a^I, X_\mu)\, P_{E-I} \quad , \quad \mu \in \mathfrak{S}(\mathbb{A}) \ .$$

Soit $\mathbb{A}^\vee = \{a_1^\vee, a_2^\vee, \ldots\}$ l'*alphabet des inverses* (on écrit, pour tout $x \in \mathbb{A}$, $x^\vee$ plutôt que x^{-1}). Le module de Schubert associé à $\mathbb{A}^\vee$ est isomorphe à celui associé à $\mathbb{A}$. On remarque que, pour ce qui est des fonctions commutatives,

$\forall i : 0 \le i \le n+1,$ $$\Lambda_i(\mathbb{A}) = \Lambda_{n+1}(\mathbb{A}).\Lambda_{n+1-i}(\mathbb{A}^\vee)$$

et donc, dans $\mathbb{Z}[\mathbb{A}, \mathbb{A}^\vee]$,

(2.12) $$P_I(\mathbb{A}) = P_E(\mathbb{A}).P_{E-I}(\mathbb{A}^\vee)$$

Pour tout entier i , on note S_i la fonction de Schur libre d'indice la partition (0, ..., 0, i) , i.e. la somme de toutes les lignes de degré i , appelée *aleph* par Wronski mais *fonction élémentaire complète* par Macdonald [10, p.14] .

Enfin, dans l'algèbre libre $\mathbb{Z}\langle\mathbb{D}^*\rangle$, on pose

(2.14) $$Q_I = S_{i_1}(\mathbb{D}_n) \ldots S_{i_{n+1}}(\mathbb{D}_0) \quad , \quad 0 \le I \le E$$

et l'on définit les *polynômes companions* Z_μ , $\mu \in \mathfrak{S}(\mathbb{A})$, par

(2.15) $$Z_\mu = \sum_I (a^I, X_\mu)\, Q_I$$

Par exemple, pour le groupe symétrique $\mathfrak{S}(\{a, b, c, d\})$, on a

$X_{3142} = a^2b + a^2c = P_{2010} - P_{3000}$; $Q_{2010} - Q_{3000} =$
$(\delta_1\delta_1 + \delta_2\delta_2 + \delta_3\delta_3 + \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \delta_2\delta_3)\ \delta_1 - (\delta_1\delta_1\delta_1 + \delta_2\delta_2\delta_2 +$
$\delta_3\delta_3\delta_3 + \delta_1\delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_1\delta_3 + \delta_1\delta_2\delta_2 + \delta_1\delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3\delta_3 + \delta_2\delta_2\delta_3 +$
$\delta_3\delta_3\delta_3\,)$.

3 DUALITE

Le relèvement direct des opérateurs ∂_μ à l'algèbre libre est délicat et de fait, il serait alors plus expédient d'utiliser les opérateurs voisins π_μ (cf.[6]). Pour le but poursuivi ici, il suffit de relever l'action des ∂_μ au module de Schubert.

Plus précisément, nous définissons une action, notée à droite $\circ$, de l'algèbre libre $\mathbb{Z}\langle\mathbb{D}^*\rangle$ sur le module de Schubert par les règles suivantes.

Soient m, n deux entiers $1 \le m \le n$, $I = i_1 \ldots i_{n+1} \le E = n\ldots 10$, $I' = i_1 \ldots i_{n-m}$, $i = i_{n-m+1}$, $j = i_{n-m+2}$, $I'' = i_{n-m+3} \ldots i_{n+1}$. On convient que pour $h<0$, Λ_h et S_h sont nulles.

Définition 3.1.

$$P_I \circ \delta_m = \sum_{k=0}^{i-1} P_{I'(i-1-k)(j+k)I''} - \sum_{k=0}^{i-2} P_{I'(j+1+k)(i-2-k)I''}$$

Cette définition, apparemment complexe, relève en fait le calcul commutatif, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3.2.

L'image de $P_I \circ \delta_m$ *dans l'anneau des polynomes est* $P_I\, \partial_m$.

Preuve. Les polynômes $\Lambda_i(\mathbb{A}_j)$, $j\neq m$, étant symétriques en a_m et a_{m+1} sont des scalaires pour ∂_m . En outre, $\Lambda_i(\mathbb{A}_m) = \Lambda_i(\mathbb{A}_{m-1}) + a_m\Lambda_{i-1}(\mathbb{A}_{m-1})$, et donc, pour tout $i\ge 0$, $\Lambda_i(\mathbb{A}_m)\ \partial_m = \Lambda_{i-1}(\mathbb{A}_{m-1})$ puisque $a_m\ \partial_m = 0$. Il ne reste donc plus qu'à vérifier l'égalité $\Lambda_{i-1}(\mathbb{A}_{m-1}).\Lambda_j(\mathbb{A}_{m-1}) =$

$$\sum \Lambda_{i-1-k}(\mathbb{A}_m).\Lambda_{j+k}(\mathbb{A}_{m-1}) - \sum \Lambda_{j+1+k}(\mathbb{A}_m).\Lambda_{i-2-k}(\mathbb{A}_{m-1}) ,$$

qui résulte par éliminations successives de la relation

$\forall$ h, m ≥ 1, $\Lambda_h(\mathbb{A}_m) = \Lambda_h(\mathbb{A}_{m-1}) + a_{m-1}\ \Lambda_{h-1}(\mathbb{A}_{m-1})$ ■

Le lemme précédent montre que l'action de $\mathbb{Z}\langle\mathbb{D}^*\rangle$ factorise par l'algèbre des différences divisées. En d'autres termes, on a :

Lemme 3.3. *Pour tout* I : $0 \le I \le E$, *tous* i, j : $1 \le i,j \le n$ *non consécutifs*

$$\begin{cases} P_I \circ \delta_i \circ \delta_j = P_I \circ \delta_j \circ \delta_i \\ P_I \circ \delta_i \circ \delta_i = 0 \\ P_I \circ \delta_i \circ \delta_{i+1} \circ \delta_i = P_I \circ \delta_{i+1} \circ \delta_i \circ \delta_{i+1} \end{cases}$$

Proposition 3.4. *Soient* k, m, n *des entiers* $1 \le k \le m \le n$, $E = n\ldots 10$ *et* I : $0 \le I \le E$, *tels que* $I = I'iI''$, $I' = i_1 \ldots i_{n-m}$, $i = i_{n-m+1}$, $I'' = m-1 \ldots 1\ 0$. *Alors*

$$P_I \circ S_k(\mathbb{D}_m) = P_{I'(i-k)I''}$$

Preuve. $S_k(\mathbb{D}_m) = S_k(\mathbb{D}_{m-1}) + S_{k-1}(\mathbb{D}_{m-1})\ \delta_m + S_{k-2}(\mathbb{D}_{m-1})\ \delta_m^{\ 2} + \ldots$ $+ S_0(\mathbb{D}_{m-1})\ \delta_m^{\ k}$ et donc $P_I \circ S_k(\mathbb{D}_m) = P_I \circ S_k(\mathbb{D}_{m-1}) + P_I \circ S_{k-1}(\mathbb{D}_{m-1})\delta_m$.
Supposons par récurrence la proposition vraie pour $\mathbb{D}_{m-1}$ et tout k.

$$P_I \circ S_k(\mathbb{D}_m) = P_{I'0\ldots 0} \cdot \Lambda_m(\mathbb{A}_m) \cdot \Lambda_{m-1-k}(\mathbb{A}_{m-1}) \cdot P_{0\ldots 0I''} +$$

$$P_{I'0\ldots 0} \cdot \Lambda_m(\mathbb{A}_m) \cdot \Lambda_{m-k}(\mathbb{A}_{m-1}) \cdot P_{0\ldots 0I''} \circ \delta_m \ .$$

Comme $\Lambda_m(\mathbb{A}_m) = a_m\ \Lambda_{m-1}(\mathbb{A}_{m-1})$, que $\Lambda_{m-1}(\mathbb{A}_{m-1})$ commute avec tout $\Lambda_h(\mathbb{A}_{m-1})$, que δ_m commute avec $P_{0\ldots 0I''}$ et $\Lambda_h(\mathbb{A}_{m-1})$, et qu'enfin $a_m\ \partial_m = 1$, on a finalement $P_I \circ S_k(\mathbb{D}_m) =$

$$P_{I'0\ldots 0} \cdot \left[a_m\ \Lambda_{m-1-k}(\mathbb{A}_{m-1}) +.\ \Lambda_{m-k}(\mathbb{A}_{m-1}) \right] \cdot \Lambda_{m-1}(\mathbb{A}_{m-1}) \cdot P_{0..0I''}$$

ce qui est bien ce que veut la proposition ∎

Théorème 3.5. *Pour tout* μ *dans* $\mathfrak{S}(\mathbb{A})$, *on a*

$$P_E \circ Z_\mu = X_\mu^{\ ¶}$$

Preuve. Comme $Z_\mu = \sum (X_\mu, a^I)\ Q_I$ et $X_\mu^{\ ¶} = \sum (X_\mu, a^I)\ P_{E-I}$, on est réduit par linéarité à montrer que $P_E \circ Q_I = P_{E-I}$.
Soit p le plus petit entier tel que $i_p \neq 0$; notons $i_p = i$, $m = n-p+1$, $I' = i_1 \ldots i_{p-1}\ 0\ldots 0$. On a $Q_I = Q_{I'} \cdot S_i(\mathbb{D}_m)$. Par récurrence sur le nombre de parts non nulles de I , on suppose l'égalité $P_E \circ Q_{I'} = P_{E-I'}$. Comme $E-I' =$ $(n-i_1\ , \ldots, m+1-i_{p-1}\ , m-i_p\ , m-1\ , \ldots, 1, 0)$, l'image de P_{E-I} par $S_i(\mathbb{D}_p)$ est d'après la proposition 3.4 égale à

$$\Lambda_{n-i_1}(\mathbb{A}_n) \ \ldots\ \Lambda_{m+1-i_{p-1}}(\mathbb{A}_{m+1}) \cdot \Lambda_{m-i_p}(\mathbb{A}_m) \cdot \Lambda_{m-1}(\mathbb{A}_{m-1}) \ \ldots\ \Lambda_0(\mathbb{A}_0)$$

c'est-à-dire P_{E-I} .

Exemple 3.6. Pour la même permutation qu'en (2.15),
$a^3b^2c^1 \circ Z_{3142} = a^3b^2c^1\ (\partial_1\partial_2\partial_1 + \partial_2\partial_3\partial_1 - \partial_1\partial_2\partial_3) = abc + (a^2b + ab^2) - a^2b = abc + ab^2 = P_{1200} - P_{0210} = (P_{2010} - P_{3000})^{¶} = X_{3142}{}^{¶}$.

4 ALGORITHMIQUE SCHUBERTIENNE

Nous allons montrer que le théorème de dualité précédent donne un algorithme pour l'expression des polynômes de Schubert dans la base P_I : $X_\mu = \sum (X_\mu, a^I)\ P_I$. Une autre méthode, présentée en [6] consiste à interpréter le produit scalaire à l'aide de l'opérateur ∂_ω , qui est le produit maximal de différences divisées.

Posons dans l'algèbre libre, pour tout couple d'entiers $1 \le k \le m$

$$(4.1) \quad \begin{cases} \mathbb{F}_k(m) = Z_{1\ldots m\text{-}k\ m+1\ m\text{-}k+1\ \ldots\ m} \\ \mathbb{F}_k(k) = 1 \end{cases}$$

où les polynômes Z_μ ont été définies en (2.15) .

Les polynômes de Schubert correspondants $X_{1\ldots(m-k)(m+1)(m-k+1)\ldots m}$ sont les fonctions élémentaires complètes $S_k(\mathbb{A}_{m-k+1})$ d'après [6].

L'anneau $\mathbb{Z}[\mathbb{A}_{n+1}]$ est un $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$-module libre de base les polynômes de Schubert, et le théorème 3.5 permet d'exprimer certains monômes dans cette base.

Proposition 4.2. *Soient* m, n *un couple d'entiers* $1 \le m \le n+1$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{n+1}$ *un alphabet,* $E = n\ \ldots\ 1\ 0$. *Alors, dans l'algèbre plaxique*

$$a_m \ldots a_1\ P_E = \sum_{k=0}^{n-m+1} (-1)^k\ \Lambda_{k+m}(\mathbb{A})\ .\ P_E \circ \mathbb{F}_k((k+m-1)$$

Preuve. Soit $\xi^{(m)}$ la permutation $n+2\ n+1\ \ldots\ n+3\text{-}m\ n+1\text{-}m\ \ldots\ 1\ n+2\text{-}m \in \mathfrak{S}_{n+2}$. Le membre de gauche est le polynôme de Schubert $X_{\xi^{(m)}}$, celui de droite est une somme $\sum \pm \Lambda_j(\mathbb{A}_{n+1}).P_I$, $I = (i_n, \ldots, i_1)$, i.e. une somme $\sum \pm P_{jI}$. La proposition exprime donc la décomposition d'un polynôme de Schubert plaxique dans la base P_J ; le module de Schubert étant isomorphe à son image dans $\mathbb{Z}[\mathbb{A}]$, il suffit de montrer l'égalité (4.2) dans le cas commutatif. On divise gauche et droite par $a_{n+1}\ldots a_1\ P_E$; utilisant l'involution $\mathbb{A} \to \mathbb{A}^\vee$, l'égalité à montrer s'écrit

$$(a_{n+1}\ldots a_1)^{-1} = \sum (-1)^k \left[X_\omega \circ \mathbb{F}_k(k+m-1) \right] \Lambda_{n-k-m}(\mathbb{A}^\vee) \,/\, X_\omega$$

D'après (3.5) et (2.12), le membre de droite est $\sum (-1)^k S_k(\mathbb{A}_m^\vee) \,.\, \Lambda_{n-m-k}(\mathbb{A}^\vee)$, i.e. par linéarité, en désignant par $\mathbb{A}\backslash\mathbb{A}_m$ l'alphabet complémentaire de $\mathbb{A}_m$ dans $\mathbb{A}$,

$$\Lambda_{n-m}(\mathbb{A}^\vee \setminus \mathbb{A}_m^\vee) = a_{n+1}\ \ldots\ a_{m+1} \qquad \blacksquare$$

Les monômes $a_m\ldots a_1\ P_E$, $1\le m\le n+1$, sont des polynômes de Schubert pour $\mathfrak{S}_{n+2}$. De fait toute permutation $\mu \in \mathfrak{S}_{n+2}$ s'écrit de manière unique $\mu = \xi^{(m)}.\zeta$, $\zeta \in \mathfrak{S}_{n+1}$, avec $\xi^{(m)}$ définie plus haut et $m = n+2-\mu_{n+2}$. D'après (2.3), $X_\mu = X_{\xi^{(m)}}\ \partial_\zeta$; ∂_ζ appartient à l'algèbre engendrée par ∂_1 , ..., ∂_n . En particulier, les polynômes $\Lambda_k(\mathbb{A}_{n+1})$ sont des scalaires pour ∂_ζ . Cela permet d'étendre à $\mathfrak{S}_{n+2}$ la proposition 4.2 :

Théorème 4.3. *Soient* $\mu \in \mathfrak{S}_{n+2}$, $m = n+2-\mu_{n+2}$, $\zeta = \mu.(\xi^{(m)})^{-1}$, $\omega = \xi^{(0)}$ *l'élément maximum de* $\mathfrak{S}_{n+1}$. *Alors, dans l'algèbre plaxique*

$$X_\mu = \sum (-1)^k\ \Lambda_{k+m}(\mathbb{A}_{n+1}) \,.\, X_\omega \circ \mathbb{F}_k(k+m-1)\ \delta_\zeta$$

Les $X_\omega \circ \mathbb{F}_k(k+m-1)\ \delta_\zeta$ sont des sommes d'éléments du type $X_\omega\ \partial\ldots\partial'\ \partial_\zeta$, i.e. des sommes de polynômes de Schubert X_ν , $\nu \in \mathfrak{S}_{n+1}$. Le théorème donne donc par induction sur n l'expression de X_μ comme une somme

$$\sum \pm \Lambda_i(\mathbb{A}_{n+1})\ \ldots\ \Lambda_j(\mathbb{A}_1).\Lambda_h(\mathbb{A}_0)$$

c'est-à-dire l'expression de X_μ dans la base P_I .

Notre problème initial a donc été réduit au calcul des polynômes $\mathbb{F}_k(m)$; c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.4. *On a dans l'algèbre libre* $\mathbb{Z}\langle\mathbb{D}^*\rangle$, *pour* $0\le k\le m$

$$\mathbb{F}_k(m) = \begin{vmatrix} S_1(\mathbb{D}_m) & \ldots & S_k(\mathbb{D}_m) \\ S_0(\mathbb{D}_{m-1}) & \ldots & S_{k-1}(\mathbb{D}_{m-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ S_{2-k}(\mathbb{D}_{m-k+1}) & \ldots & S_1(\mathbb{D}_{m-k+1}) \end{vmatrix}$$

le développement du déterminant se faisant de haut en bas, i.e.

s'écrivant $\sum S_i(\mathbb{D}_m).S_j(\mathbb{D}_{m-1}) \dots S_h(\mathbb{D}_{m-k+1})$.

Preuve: La définition 2.15 des Z_μ fait appel à l'expression de $S_k(\mathbb{A}_{m-k+1})$ dans la base P_I . Or les fonctions élémentaires S_k s'expriment comme un déterminant en les fonctions non moins élémentaires Λ_j (cf.[10, p.15]) :

$$S_k(\mathbb{A}_{m-k+1}) = \begin{vmatrix} \Lambda_1(\mathbb{A}_{m-k+1}) & \dots & \Lambda_k(\mathbb{A}_{m-k+1}) \\ \Lambda_0(\mathbb{A}_{m-k+1}) & \dots & \Lambda_{k-1}(\mathbb{A}_{m-k+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{2-k}(\mathbb{A}_{m-k+1}) & \dots & \Lambda_1(\mathbb{A}_{m-k+1}) \end{vmatrix}$$

Grâce à la linéarité $\Lambda_j(\mathbb{A}_p) = \Lambda_j(\mathbb{A}_{p-1}) + a_p\ \Lambda_{j-1}(\mathbb{A}_{p-1})$ pour tous $p,j \geq 1$, on peut transformer ce déterminant sans changer sa valeur en le déterminant

$$S_k(\mathbb{A}_{m-k+1}) = \begin{vmatrix} \Lambda_1(\mathbb{A}_m) & \dots & \Lambda_k(\mathbb{A}_m) \\ \Lambda_0(\mathbb{A}_{m-1}) & \dots & \Lambda_{k-1}(\mathbb{A}_{m-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{2-k}(\mathbb{A}_{m-k+1}) & \dots & \Lambda_1(\mathbb{A}_{m-k+1}) \end{vmatrix}$$

L'expression de $\mathbb{F}_k(m)$ s'obtient par l'échange $\Lambda_i(\mathbb{A}_m) \dots \Lambda_h(\mathbb{A}_0)$ $\longrightarrow S_i(\mathbb{D}_m) \dots S_h(\mathbb{D}_0)$; c'est bien le déterminant voulu ■

Par exemple,

$$(4.5) \qquad \mathbb{F}_2(m) = \begin{vmatrix} S_1(\mathbb{D}_m) & S_2(\mathbb{D}_m) \\ S_0(\mathbb{D}_{m-1}) & S_1(\mathbb{D}_{m-1}) \end{vmatrix} =$$

$$\textstyle\sum_{m-1\geq j>i\geq 1} \delta_j\, \delta_i \;+\; \delta_m\, (\delta_1+\dots+\delta_{m-1}) \;-\; (\delta_1+\dots+\delta_{m-1})\, \delta_m$$

Nous n'avons à dire vrai besoin que de l'image de $\mathbb{F}_k(m)$ dans $\mathfrak{Div}(\mathbb{A})$, notée $F_k(m)$, puisque nous faisons opérer les $\mathbb{F}_k(m)$ sur le module de Schubert. Plutôt que de développer le déterminant (4.4), on utilise le fait que tout élément de $\mathfrak{Div}(\mathbb{A})$ est déterminé par son action sur X_ω , puisque les polynômes de Schubert $X_\omega\, \partial_\mu$ sont linéairement indépendants. Ainsi donc la propriété (3.7)

$$X_\omega\, F_k(m) = X_\omega \,.\, S_k(\mathbb{A}^\vee_{m+1-k}) \ ,$$

détermine les $F_k(m) \in \mathfrak{Div}(\mathbb{A}_{n+1})$, $1 \leq k \leq m \leq n$.

Notons $F_k^+(m)$ la transformée de $F_k(m)$ par la translation $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\} \longrightarrow \{\partial_2, \ldots, \partial_{m+1}\}$.

Proposition 4.6. *Pour tout* $m \geq k+1$, *tout* $k \geq 1$, *on a*

$$F_k(m) = F_{k-1}^+(m-2).\partial_1 + F_k^+(m-1)$$

Preuve: Posons $a_1 = a$, $a_2 = b$, ω = élément maximum de $\mathfrak{S}(\mathbb{A}_{n+1})$, ω' = élément maximum de $\mathfrak{S}(\{a_2, \ldots, a_{n+1}\})$. On a $X_{\omega'} = a^{-n} X_\omega$, et d'après la dualité (3.7),

$$\begin{cases} X_{\omega'} F_{k-1}^+(m-2) = S_{k-1}(\mathbb{A}^\vee_{m-k+1} \setminus a^\vee).X_{\omega'} \\ X_{\omega'} F_k^+(m-1) = S_k(\mathbb{A}^\vee_{m-k+1} \setminus a^\vee).X_{\omega'} \end{cases}$$

Réintroduisant a qui commute avec les différences divisées ∂_2 , ∂_3 , ..., on tire

$$X_\omega F_{k-1}^+(m-2) = \left[S_{k-1}(\mathbb{A}^\vee_{m-k+1}) - a^\vee S_{k-2}(\mathbb{A}^\vee_{m-k+1}) \right].(a^\vee X_\omega).a$$

Comme les $S_h(\mathbb{A}^\vee_{m-k+1})$ et $(a^\vee X_\omega)$ sont symétriques en a et b , donc scalaires pour ∂_1 , on a finalement

$$\begin{cases} X_\omega F_{k-1}^+(m-2)\, \partial_1 = a^\vee S_{k-1}(\mathbb{A}^\vee_{m-k+1})\, X_\omega \\ X_\omega F_k^{+\cdot}(m-1) = S_k(\mathbb{A}^\vee_{m-k+1} \setminus a^\vee).X_\omega \end{cases}$$

L'identité, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $S_k(\mathbb{A}^\vee \backslash a^\vee) + a^\vee\, S_{k-1}(\mathbb{A}^\vee) = S_k(\mathbb{A}^\vee)$ entraine que les images de X_ω par les deux membres de (4.6) sont identiques, donc que les opérateurs sont égaux ∎

Il nous reste à calculer les $F_k(k)$, qui sont les termes initiaux de la récurrence (4.6).

Proposition 4.7. *Pour tout* $k \geq 2$, *on a*

$$F_k(k) = F_{k-1}^+(k-1)\, \partial_1 - \partial_1\, F_{k-1}^+(k-1) - \partial_1\, F_{k-2}^+(k-2)\, \partial_1 .$$

Nous omettons la preuve qui est identique à celle de (4.6) et se borne à faire agir les deux membres sur le polynôme X_ω .

Les propositions 4.6 et 4.7 , auxquelles on ajoute les conditions intiales $F_0(k) = 1$, $F_1(1) = \partial_1$ fournissent la définition récursive promise des $F_k(m)$. On en tire directement l'expression explicite des $F_k(m)$, aucune annulation ne se produisant dans l'algorithme. Ecrivons seulement le cas de $F_k(k)$, sans donner la démonstration qui résulte du jeu de taquin nilplaxique, en distinguant les trois cas : $\{\epsilon_2=1=\eta_2\}$, $\{\epsilon_2=0,\ \eta_2=1\}$, $\{\epsilon_2=1,\ \eta_2=0\}$.

Corollaire 4.8. *Ecrivant* 1, 2, ... *à la place de* ∂_1 , ∂_2 , .. *on a*

$$F_k(k) = \sum (-1)^q \; p^{\epsilon_p} \ldots 2^{\epsilon_2}\, 1\, 2^{\eta_2} \ldots p^{\eta_p}$$

somme sur tous les entiers p , q , *tous les* ϵ_i , $\eta_j \in \{0,1\}$ *tels que* $\forall$ i, $\epsilon_i + \eta_i \geq 1$, $q = \Sigma\, \eta_i$, $k\text{-}q\text{-}1 = \Sigma\, \epsilon_j$.

En d'autres termes, $F_k(k)$ est la somme alternée de tous les tableaux "équerre" dont l'évaluation commutative est un alphabet initial. Par exemple, en écrivant planairemęnt les tableaux

$$F_4(4) = \begin{matrix}4\\3\\2\\1\end{matrix} - \left\{ \begin{matrix}3\\2\\1\;4\end{matrix} + \begin{matrix}4\\2\\1\;3\end{matrix} + \begin{matrix}4\\3\\1\;2\end{matrix} + \begin{matrix}3\\2\\1\;3\end{matrix} + \begin{matrix}3\\2\\1\;2\end{matrix} \right\} +$$

$$\left\{ \begin{matrix}4\\1\;2\;3\end{matrix} + \begin{matrix}3\\1\;2\;4\end{matrix} + \begin{matrix}2\\1\;3\;2\end{matrix} + \begin{matrix}3\\1\;2\;3\end{matrix} + \begin{matrix}2\\1\;2\;3\end{matrix} \right\} - 1\;2\;3\;4$$

REFERENCES

1 N.BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie, Ch.4*, Masson 1981.

2 P.EDELMAN & C.GREENE, Balanced Tableaux, *Adv.in Math.* 63 (1987) 42-99.

3 W.KRASKIEWICZ & P.PRAGACZ, Foncteurs de Schubert, *à paraître aux C.R.Acad.Sc. Paris* (1987) .

4 A.LASCOUX, Classes de Chern des variétés de drapeaux, *C.R.Acad.Sc.Paris* **295** (1982) 393 .

5 A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER, Le monoide plaxique, *Quaderni de la Ricerca "scientifica"* **109** (1981) 129-156 .

6 A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER, Symmetry and Flag manifolds, *Springer L.N.* **996** (1982) 118-144 .

7 A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER, Structure de Hopf ..., *C.R.Acad.Sc. Paris* **295** (1982) 629 .

8 A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER, Caractères libres, *prépublication Université Paris 7* (1987) .

9 V.LAKSHMIBAI, C.MUSILI & C.S.SESHADRI, Geometry of G/P IV, *Proc.Indian Acad.Sc.* **88A** (1979) 280-362 .

10 I.G.MACDONALD, *Symmetric Functions and Hall polynomials*, Oxford Math. Monographs (1979) .

L.I.T.P., U.E.R.Maths Paris 7, 2 Place Jussieu, 75251 PARIS Ced 05

ABCDEFGHIJ 89