Функциональный анализ и его приложения,
1989, т. 23, вып. 3, 00—00

УДК 517.5

НЕКОММУТАТИВНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ШУБЕРТА

А. Ласку, М.-П. Шютценберже

Функции Шура образуют естественный базис в пространстве симметрических многочленов. Они задают неприводимые характеры симметрических и полных линейных групп. Геометрически они задают естественный базис в кольце когомологий грассманианов.

Многочлены Шуберта $\mathfrak{X}_\mu$ [1; 2] образуют базис в полном кольце многочленов. На них обобщаются обе указанные интепретации функций Шура: они являются характерами некоторых циклических представлений группы треугольных матриц [3], и их классы образуют естественный базис в когомологиях флаговых многообразий.

Функции обоих типов могут быть подняты в алгебру свободного моноида как суммы (с коэффициентами 0 или 1) некоторых слов, называемых таблицами. Сопоставляя различные интерпретации таблиц, мы установим в теореме 5 явные связи между многочленами Шуберта, характерами Демазюра, стандартными базисами и приведенными разложениями перестановок.

Пусть $A = \{a_1 < a_2 < \ldots\}$ — некоторый алфавит, а $\mathbf{Z}\langle A\rangle$ — соответствующая свободная алгебра. Слово $w = x_1 \ldots x_r$ $(x_i \in A)$ называется столбцом длины r, если $x_1 > \ldots > x_r$ (обозначение $|w| = r$). Скажем, что столбец w мажорирует столбец v (обозначение $w \gg v$), если существует невозрастающая инъекция множества букв v в множество букв w. Таблицей называется произведение столбцов $t = w_1w_2\ldots$, таких, что $w_1 \gg w_2 \gg w_3 \ldots$; формой таблицы называется разбиение $(|w_1|, |w_2|, \ldots)$.

Таблица t называется стандартной, если она является перестановкой чисел $1, 2, \ldots$ $\ldots, |t|$. Ключом называется такая таблица, что для всех k столбец w_{k+1} является подсловом в w_k.

Нам понадобятся два отношения эквивалентности в свободных алгебрах: плактическое отношение $\equiv$, порожденное элементарными соотношениями

$$\left.\begin{array}{lll} (PL1) & a_ka_ia_j \equiv a_ia_ka_j, & a_ja_ia_k \equiv a_ja_ka_i \\ (PL2) & a_ja_ia_j \equiv a_ja_ja_i, & a_ja_ia_i \equiv a_ia_ja_i \end{array}\right\} (i<j<k,)$$

и нильплактическое отношение $\cong$, также задаваемое с помощью $(PL1)$ и $(PL2)$ за исключением случая, когда i и j — соседние числа, в котором $(PL2)$ заменяется на $(NilPL)$:

$$(NilPL) \qquad a_ia_{i+1}a_i \cong a_{i+1}a_ia_{i+1}, \quad a_ia_i \cong 0.$$

Известная конструкция Шенстеда, связанная с плактическим отношением, обобщается на нилплактический случай [4]:

Теорема 1. 1) *В каждом плактическом классе (соответственно нильплактическом, не содержащем 0) содержится ровно одна таблица t.* T

2) *Элменты плактического (соответственно нильплактического, не содержащего 0) класса таблицы t находятся в биективном соответствии со стандартными таблицами (называемыми таблицами вставок) той же формы, что и t.*

В действительности таблица вставок слова $w = x_1x_2\ldots$ описывает последовательность форм таблиц, сравнимых со словами $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \ldots$ Она обозначается $w\text{Я}$.

Поскольку плактические соотношения являются соотношениями коммутации, любые два сравнимых слова $v \equiv w$ имеют один и тот же образ $\underline{v} = \underline{w}$ в $\mathbf{Z}[A]$.

Нильплактические соотношения включают в себя соотношения Коксетера для простых транспозиций, поэтому множество приведенных разложений любой перестановки μ есть дизъюнктное объединение нилплактических классов [5]. T

Из теоремы 1 вытекает, что для каждой таблицы t формы I и каждого целого k имеется ровно одно слово u_kt_k (соответственно t'_kv_k), сравнимое с t, такое, что u_k (соответственно v_k) есть столбец длины I_k, а t_k (соответственно t'_k) — таблица формы $I_1 \ldots I_{k-1}I_{k+1} \ldots$ Более того, при $k \geqslant h$ u_k есть подслово в u_h, а v_k — подслово в v_h. Таким образом, слово $u_1u_2\ldots$ является ключом (называемым левым ключом таблицы t), так же, как и $v_1v_2\ldots$ (правый ключ таблицы t).

Эресманн [6] связал с каждой перестановкой μ и формой I ключ $K(\mu, I)$, состоящий из переупорядоченных левых множителей перестановки μ (рассматриваемой как слово) длин $I_1, I_2, \ldots$ Например, $\mu = 316452$ и $I = 532$ дают ключ $65431.631.31$. Порядок Эресманна — Брюа на симметрической группе $\mathfrak{S}(n)$ определяется так: $\mu \leqslant \zeta$, если $K(\mu, n\ldots 21) \leqslant K(\zeta, n\ldots 21)$ покомпонентно.

Для каждого ключа $K = K(\mu, I)$ обозначим через $\mathfrak{U}(K)$ сумму таблиц, имеющих K своим правым (плактическим) ключом. Можно проверить, что таблицы, входящие в $\mathfrak{U}(K)$, это в точности таблицы формы I, «стандартные по отношению к μ» в смысле [7]. В силу [7, теорема 9.6], $\mathfrak{U}(K)$ есть класс в $\mathbf{Z}\langle A\rangle$ суммы элементов «стандартного базиса» в пространстве сечений линейного расслоения, связанного с I, над многообразием Шуберта, отвечающим μ.

[1]) Перевод с английского А. В. Зелевинского.

С каждой перестановкой μ связаны два оператора $\bar{\pi}_\mu$ и π_μ в $\mathbf{Z}[A]$ [8]. Для простой транспозиции σ_i, переставляющей a_i и a_{i+1}, оператор $\bar{\pi}_{\sigma_i}$ (сокращенно записываемый $\bar{\pi}_i$ и действующий справа) есть $f \to (f^{\sigma_i} - f)/(1 - a_i/a_{i+1})$, а $\pi_i = \bar{\pi}_i + \mathrm{id}$.

Оператор $\bar{\pi}_i$ следующим образом поднимается до оператора θ_i в $\mathbf{Z}\langle A\rangle$. Если слово w состоит из букв a_i, a_{i+1}, то $w\theta_i = \varepsilon\Sigma v$, где $\underline{w}\bar{\pi}_i = \varepsilon\Sigma\underline{v}$ и $v\text{Я} = w\text{Я}$, а $\varepsilon = 1$ или -1 в зависимости от того, превышает ли количество букв a_i в составе слова w количество букв a_{i+1} (если $\underline{w} = (a_i a_{i+1})^k$, то $w\theta_i = 0$). Это определение корректно, поскольку слово из двух букв однозначно определяется своим коммутативным образом и таблицей вставок. Для произвольного слова w оператор θ_i действует указанным образом на подслово в w, состоящее из букв a_i и a_{i+1}, а остальные буквы в w оставляет инвариантными.

Операторы π_i и $\bar{\pi}_i$ удовлетворяют соотношениям Коксетера; это позволяет определить операторы π_μ и $\bar{\pi}_\mu$ как произведения операторов π_i или $\bar{\pi}_i$, соответствующие любому приведеннсму разложению перестановки μ. С другой стороны, $\theta_1\theta_2\theta_1 \neq \theta_2\theta_1\theta_2$, поэтому операторы θ_μ определить нельзя; однако для доминантных мономов $a^I = (a_{I_1} \ldots \ldots a_2 a_1)(a_{I_2} \ldots a_2 a_1) \ldots$, где I — разбиение, т. е. $I_1 \geqslant I_2 \geqslant \ldots$, справедливо

Предложение 2. *Пусть $\sigma_i\sigma_j \ldots \sigma_k$ — произвольное приведенное разложение перестановки μ, а I — разбиение. Тогда* $a^I\theta_i\theta_j \ldots \theta_k = \mathfrak{U}(K(\mu, I))$.

Для каждого ключа K обозначим через $D(K)$ сумму $\sum_{H\leqslant K} \mathfrak{U}(H)$ по всем ключам H той же формы, что и K (сравнение покомпонентное), и пусть $\underline{D}(K)$ — ее коммутативный образ. Используя, что $\pi_\mu = \sum_{\nu\leqslant\mu}\bar{\pi}_\nu$, получаем

Следствие 3. Пусть H и K — два ключа одинаковой формы, $H \leqslant K$. Тогда $\underline{D}(K) - \underline{D}(H)$ — многочлен с положительными коэффициентами.

Это следствие является переформулировкой в терминах многочленов предложений 3 и 4 из [9], дающих самую сильную версию «формулы характеров Демазюра» для GL_n.

Пусть n — мощность (возможно, бесконечная) алфавита A; тогда $\mathbf{Z}[A]$ есть свободный $\mathbf{Z}[A]^{\mathfrak{S}}$ -модуль, обладающий тремя естественными базисами: из мономов a_n ($I \leqslant \leqslant n-1 \ldots 10$, т. е. $I_1 \leqslant n-1, \ldots, I_{n+1} \leqslant 1, I_n = 0$), из образов доминантных мономов a_I ($I \leqslant n-1 \ldots 0$) под действием операторов π_μ, $\mu \in \mathfrak{S}(A)$, и из многочленов Шуберта $\underline{X}_\mu$ [1]. Поэтому

$$X_\mu = \sum m(\mu, K)\, \underline{D}(K) \tag{4}$$

с целыми кратностями $m(\mu, K)$, где сумма берется по некоторому множеству ключей.

Определим некоммутативные многочлены Шуберта X_μ, заменяя в (4) все $\underline{D}(K)$ на $D(K)$. Их основным характеристическим свойством является следующая теорема, в которой через $K(t)$ обозначен левый нильплактический ключ таблицы t.

Теорема 5. *Пусть μ — некоторая перестановка, $a\mathcal{T}(\mu)$ — множество таблиц, являющихся приведенными разложениями для μ. Тогда*

$$X_\mu = \sum_{t\in\mathcal{T}(\mu)} D(K(t)). \tag{6}$$

Доказательство проводится по индукции с использованием действия операторов θ_i на обе части (6). Соотношение (6) связывает данное выже определение многочленов X_μ с определением, предложенным в [4]. T

Пример. Пусть $\mu = 21534$; множество $\mathcal{T}(\mu)$ состоит из двух таблиц 314 и 134. Поскольку $314 \simeq 341$, выделяемые множители равны 31 и 3, так что $K(134) = 313$; таблица 134 одна в своем классе, и $K(134) = 111$. Таким образом, $X_{21534} = D(111) + D(313) = (a_1a_1a_1) + (a_2a_1a_1 + a_3a_1a_1 + a_2a_1a_2 + a_2a_1a_3 + a_3a_1a_3)$, где выделенные множества состоят из таблиц, правый плактический ключ которых соответственно $\leqslant a_1a_1a_1$ или $\leqslant a_3a_1a_3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lascoux A., Schützenberger M.-P.* // Lect. Notes in Math.— 1983. V. 996. 2. *Бернштейн И. И., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И.* // УМН.— 1973. Т. 28, вып. 3.— С. 1—26. 3. *Kraskiewicz W., Pragacz P.* // C. R. Acad. Sc. Paris.— 1987. Т. 304.— P. 209—213. 4. *Lascoux A., Schützenberger M.- P.* // Contemp. Math.— 1989. V. 00.— P. 000. 5. *Edelman P., Greene C.* // Adv. in Math.— 1987. V. 63.— P. 42—99. 6. *Ehresmann C.* // Ann. of Math.— 1934. V. 35.— P. 396—443. 7. *Lakshmibai V., Seshadri C. S.* // J. of Algebra.— 1988. V. 100.— P. 462—557. 8. *Ласку А., Шютценберже М.-П.* // Функцион. анализ и его прил.— 1987. Т. 21, вып. 4.— С. 77—78. 9. *Demazure M.* // Bull. Sc. M.— 1974. Т. 98.— P. 163—172.

Университет
Париж — 7

Поступило в редакцию
10 января 1989 г.