Vérité poétique
et
vérité scientifique

SOUS LA DIRECTION DE
YVES BONNEFOY, ANDRÉ LICHNÉROWICZ
ET M.-P. SCHÜTZENBERGER

OFFERT A
GILBERT GADOFFRE

à l'occasion du quarantième anniversaire
de l'Institut collégial européen
par ses collègues
du séminaire interdisciplinaire du Collège de France
et par ses amis européens, américains
et asiatiques

Presses Universitaires de France

Le duel mathématique

PAR M.-P. SCHÜTZENBERGER
de l'Académie des Sciences

En mai 1942 se déroule la bataille de la mer de Corail entre les flottes des amiraux Fletcher et Inohuye. Incertaines des buts, des forces et des positions de leurs adversaires les escadrilles embarquées cherchent leurs objectifs à l'aveuglette. En quelques jours les porte-avions *Shoho* et *Lexington* sont coulés et quelques milliers d'hommes ont péri. L'avance des Japonais vers le sud a été bloquée. Au même moment c'est le printemps à Paris. *Frühling, Frühling* chante une belle voix de contralto. Certains d'une légalité douteuse gagnent au poker une existence précaire et parfois superbe dans les arrière-salles des cafés près des gares. Pour cette raison, ou pour d'autres, il leur arrive parfois de se croire suivis dans le métro et ils tentent d'échapper à cette situation agaçante. A ce jeu, comme ailleurs, peu importe ce que l'on fait car seul compte que la décision prise soit autre que celle prévue par l'adversaire : rester dans le wagon si le poursuivant a cru que l'on en descendait ou bien filer vers une sortie pendant que la rame l'emporte avant qu'il ait eu le temps d'en sauter s'il a parié le contraire. Entre les arrêts on ressasse la nouvelle de Conan Doyle où la même aventure est narrée du point de vue du chasseur tentant d'arrêter Moriarty avant qu'il ait atteint Douvres. Réfléchissons, ce qui ne sert à rien d'autre qu'à distraire l'attente comme nous ne l'apprendrons que plus tard. La station du Châtelet avec ses multiples couloirs invite à quitter le train. Le poursuivant (réel ou supposé) le sait certainement très bien; il est plus sage de rester... Saint-Germain-des-Prés n'a qu'une seule issue. C'est si sot d'y descendre qu'il est peut-être bon d'en prendre le risque...

Partout, d'un hémisphère à l'autre, des masses d'hommes qui se tuent aux individus auxquels le hasard a donné de survivre, c'est le duel. C'est l'*alea* et l'*agon* que R. Caillois a décrit et étiqueté avec la lucidité dégagée des entomologistes.

Mais il vaut mieux proposer des exemples plus souriants pour essayer de vous faire partager l'enthousiasme qu'a inspiré à ma génération la théorie des jeux de von Neuman, exemple rare sinon unique d'une modélisation mathématique non triviale de conduites humaines, hormis, bien sûr, cette modélisation absolue de notre pensée logique qu'est la mathématique elle-même.

Dans les rues du vieux Naples on voyait encore il y a vingt ans des enfants jouer à la morra. Sans nul souci d'exactitude ethnographique j'en emprunte la description à Edgar Poe qui dans *La lettre volée* déploie toute la subtilité de sa logique à une longue analyse du même thème qui nous occupe ici :

> « Ce jeu est simple, on y joue avec des billes. L'un des joueurs tient dans sa main un certain nombre de ses billes et demande à l'autre : pair ou non ? Si celui-ci devine juste il gagne une bille; s'il se trompe il en perd une. L'enfant dont je parlais gagnait toutes les billes de l'école. Naturellement il avait un mode de divination lequel consistait dans la simple observation et dans l'appréciation de la finesse de son adversaire. »

Un autre passe-temps analogue, que pratiquent encore me dit-on les petites filles, est celui où les deux joueurs choisissent indépendamment « pierre », « ciseaux » ou « papier » et où le gagnant est déterminé par les règles bien connues que décrit le diagramme suivant. D'après l'usage introduit par Th. Guilbaud qui connaît ses Pandectes, les deux joueurs sont conventionnellement nommés *Primus* et *Secundus*.

Choix de Secondus

		Pierre	Ciseaux	Papier
Choix	Pierre	0	1	- 1
de	Ciseaux	- 1	0	1
Primus	Papier	1	- 1	0

La valeur indiquée (0, + 1, ou — 1) dans chaque case est le gain de Primus qui est par définition la perte de Secundus : par exemple, supposant que Primus a choisi « Ciseaux », Secundus, s'il a lui-même choisi « Papier », lui versera un franc; s'il avait aussi « Ciseaux » la partie serait nulle; et Secundus quand il a choisi la « Pierre » qui brise les « Ciseaux » recevra un franc de Primus.

Avec ces conventions, le jeu de la morra se trouve résumé par la table à quatre cases suivante :

	pair	impair
pair	1	- 1
impair	- 1	1

Voici un autre jeu qui est une variante du jeu « Pierre-Ciseaux-Papier », compliquée par le fait que les paiements diffèrent selon les choix. J'en ai relevé le diagramme sur un vieux mur rue Archirafi à Palerme :

	Pierre	Ciseaux	Papier
Pierre	0	2	- 4
Ciseaux	- 3	0	1
Papier	6	- 1	0

et je vous propose de réfléchir à ce que vous feriez si, voyageur en Sicile, vous jouiez le rôle de Primus dans une longue série de parties contre Secundus.

C'est la situation même qu'analyse Poe : le pur conflit des volontés dépouillé de tout ce qui d'ordinaire en masque le déploiement. Au contraire des jeux de hasard, vous n'avez pas à redouter qu'un mauvais sort s'acharne contre vous : tout est déterminé par votre choix et celui de l'ennemi; à l'opposé des dames ou des échecs, nulle supériorité de sa puissance de calcul combinatoire ou de ses connaissances techniques ne peut l'aider à vous vaincre. Aucun esprit de géométrie n'est requis pour gagner. Ce qu'il faut c'est cette finesse psychologique grâce à laquelle on réussit à dissimuler son mouvement et à anticiper celui de l'ennemi. Allez-vous être animé d'un esprit d'offensive et choisir « Papier » qui peut vous rapporter beaucoup (6 L) et ne risque guère de vous coûter (1 L ou rien) ? Ou bien, analysant plus profondément la situation, allez-vous juger que Secundus, dans sa simplicité, va choisir « Papier » (qui peut lui rapporter 4 L et au pire lui faire perdre 1 L) et le contrer en optant pour « Ciseaux » ? Ou bien encore, pensant que Secundus vous croit assez naïf pour jouer « Papier » et qu'il va donc parer la menace en prenant « Ciseaux », allez-vous redoubler de ruse et annoncer « Pierre » pour empocher 2 L ? C'est ce qui serait bien joué sauf si Secundus a deviné le stratagème... Suivant le conseil d'Edgar Poe, il faut donc prévoir sa réaction et l'analyse psychologique de l'Autre comme volonté adverse qui me connaît comme telle entre inexorablement dans une régression à l'infini...

Et pourtant le petit démon de la rue Archirafi l'emporte régulièrement; non pas à tous les coups, certes, mais de façon si efficace qu'au total ses gains font largement plus que compenser ses pertes. Bien sûr, pensez-vous, ce jeu-ci n'est pas équitable et le diagramme doit sournoisement favoriser Secundus. Vous défiez donc votre opposant d'échanger les rôles. En vain car vous continuez à perdre aussi régulièrement dans celui de Secundus que dans celui de Primus. Inutile de vous consoler en pensant que trente siècles d'occupations diverses expliquent la supériorité si manifeste des Sicules...

Arrêtons ici la fable : l'adversaire n'était qu'un ordinateur appliquant de façon automatique les règles prescrites par la théorie mathématique du duel.

Celle-ci comporte deux étapes. La première est un exercice d'abstraction par lequel von Neuman construit un modèle canonique couvrant toute la gamme des jeux de société depuis l'*agon* absolu — comme les échecs où seul intervient le raisonnement — jusqu'à l'*alea* pur telle la roulette qui n'est régie que par la chance. Pour ce faire, la succession de mouvements et de décisions qui constituent le déroulement concret du jeu est résumée par un choix unique dans un espace approprié. Le résultat de cette analyse est de schématiser le protocole par la donnée que nous avons déjà rencontrée : une table à double entrée indiquant la somme (positive ou négative) que Primus reçoit de Secundus pour chacune des paires de choix que les deux joueurs ont effectuées indépendamment l'un de l'autre. C'est ce que l'on appelle la matrice des paiements du jeu.

Cette réduction est algorithmique, c'est-à-dire qu'on pourrait en principe la confier à un ordinateur si les règles du jeu étaient exprimées dans un langage suffisamment standardisé. Ce modèle est assez puissant pour représenter des situations aussi différentes de la morra que celle du bridge qui se ramène à un duel entre deux joueurs virtuels (qui sont les équipes N.S. et E.W.) affligés d'une forte dissociation de leur personnalité.

Cette normalisation n'est qu'un préalable à la deuxième étape où apparaît l'idée fondamentale de von Neuman d'abolir dès l'abord tout psychologisme par un traitement mathématique que l'on pourrait interpréter comme l'hypothèse que chaque joueur est infiniment perspicace. Le seul moyen qu'il ait donc de ne pas être deviné par son adversaire est de choisir ses propres coups au hasard. Non pas n'importe comment, bien sûr, mais selon une loi de probabilité qui est elle-même calculée *a priori* pour donner un résultat optimal par rapport à un opposant agissant selon les mêmes principes. C'est ce que l'on appelle la ***stratégie minimax***. Un théorème — difficile — montre que cette stratégie a une surprenante perfection : il existe une valeur numérique V (positive ou négative), *la valeur caractéristique du jeu* considéré, qui a la propriété suivante : quelle que soit la façon de jouer de Secundus, Primus peut s'assurer un gain moyen d'au moins V en appliquant la stratégie minimax, ce qui est le mieux qu'il puisse faire car il ne peut pas obtenir plus si Secondus de son côté adopte sa propre stratégie minimax. Réciproquement, par l'adoption de cette stratégie, Secondus peut se garantir de ne pas perdre en moyenne plus de V.

Ceci est très évident dans le jeu de la morra : si l'un des joueurs choisissait pair ou impair en tirant chaque coup à pile ou face, son adversaire ne pourrait jamais deviner son coup et sa perte moyenne serait donc nulle. Par symétrie, il en est de même pour l'autre joueur, ce qui signifie que la valeur caractéristique de la morra est zéro, c'est-à-dire qu'aucun des deux joueurs n'est favorisé par les règles ou encore que le jeu est équitable. Il entraîne un curieux paradoxe qu'aucun des exégètes d'Edgar Poe ne semble avoir vu : le seul enfant sur lequel son jeune héros ne parviendrait pas à l'emporter serait le parfait crétin de la classe incapable d'autre chose que de répondre à tort et à travers... Dans l'autre exemple le calcul montre que Secundus assure qu'au pire sa perte moyenne sera nulle s'il choisit Pierre, Ciseaux ou Papier avec les probabilités 1/10, 6/10 et 3/10. Les probabilités de la stratégie minimax de Primus sont 1/7, 4/7 et 2/7. Elles lui garantissent un gain moyen d'au moins zéro (c'est-à-dire de ne rien perdre en moyenne) car la valeur de ce jeu se trouve aussi être zéro.

Un deuxième théorème, extrêmement profond, dû à Nash, complète la théorie de von Neuman en fournissant une technique de jeu dynamique grâce à laquelle le joueur réussit à exploiter au mieux au cours de la partie tout écart à la stratégie minimax que commettrait son adversaire. C'est la méthode de Nash dont mes amis de l'Institut mathématique de Palerme avaient doté leur ordinateur et qui à elle seule et sans autre donnée que les règles du jeu permettrait en principe à une simple machine de l'emporter contre toute ruse humaine. En principe seulement car dans la plupart des jeux usuels les calculs sont si lourds qu'il n'y a pas assez de matière dans le cosmos pour construire un ordinateur capable d'en venir à bout. Aporie apparente, l'esprit peut prendre sa revanche dans les jeux compliqués de pure déduction parce que le calcul mécanique complet y est physiquement impossible !

R. Caillois marque une certaine condescendance à l'égard de la théorie de von Neuman et pourtant je tiens contre lui que cette théorie exprime la vérité essentielle de l'*agon*, du conflit de deux volontés intelligentes qui se connaissent comme telles et que lie la certitude que chaque gain de l'une est la mesure de la perte de l'autre. Grâce au génie de von Neuman cette énonciation devient axiome; par une technique mathématique, l'axiome produit une méthode de calcul et enfin, si l'on veut, un programme d'ordinateur. Sans autre hypothèse, elle fait agir celui-ci de telle sorte qu'il gagne contre toute défense le maximum qu'on peut gagner dans sa situation; bien plus, la description phénoménologique du comportement de cet automate obligerait un observateur à lui attribuer des conduites typiquement humaines telles que la ruse ou l'intimidation. Bien plus encore, confronté à un adversaire inconnu cet observateur serait incapable de deviner si celui-ci est homme ou machine par un autre critère que par la médiocre efficacité de son jeu.

Aurai-je l'outrecuidance de prétendre que l'analyse mathématique révèle que dans l'*agon* la psychologie n'a qu'un rôle épiphénoménal ? Je le ferai peut-être mais en marquant combien étroitement limité est le domaine de ce triomphe de la raison abstraite, et ce en me bornant à deux points importants.

Le premier est le nombre des joueurs : peut-on étendre la théorie du duel aux jeux et aux conflits dans lesquels s'opposent plus de deux participants ? C'est le problème de l'oligopole que les économistes contrastent souvent avec celui du duopole. Comme je l'ai déjà mentionné, il ne s'agit pas du nombre apparent des joueurs (quatre au bridge, vingt et quelques au rugby, des dizaines de millions au loto de la démocratie) mais du nombre des volontés indépendantes ou, si l'on préfère, de celui des équipes dont chacune n'est mue que par son égoïsme.

Une axiomatisation a été proposée par von Neuman et les problèmes mathématiques difficiles qu'elle pose ont occupé longtemps les chercheurs. Aujourd'hui nous savons que la réponse est négative : aucune règle indiscutable ne permet de prescrire des conduites raisonnables dans les situations où luttent plus de deux joueurs sans qu'il ne se rencontre inéluctablement des cas où son application conduise à des paradoxes inacceptables. Ainsi dans tout conflit, hormis le duel, où n'interviendrait aucun autre principe que la volonté de gagner, le déroulement des parties serait une suite chaotique de luttes entre des coalitions fugitives se nouant et se dénouant incessamment sans loi intelligible.

Ici encore la théorie retrouve l'expérience : quand trois joueurs sont assis à une table de poker, il se trouve toujours des coups où l'un d'eux se sent, à juste titre, pris en fourchette par les deux autres quelle que soit la bonne foi de ceux-ci. Dans les situations beaucoup plus structurées qui se rencontrent en économie ou en politique, le poids des traditions (les « pesanteurs sociologiques ») ou les exigences de la morale relèguent le plus souvent à l'arrière-plan les considérations tactiques que dicterait le seul intérêt immédiat. Bref, pour trois joueurs ou plus et au contraire du duel, ce sont l'histoire ou la psychologie qui évincent la mathématique — de l'aveu même de cette dernière. Donc *exit* la théorie des jeux à $n \geqslant 3$ joueurs et du même coup toute théorie du partage, du don ou de l'échange qui se voudrait fondée sur la seule raison.

Mais l'édifice que von Neuman a laissé à ses continuateurs recèle bien d'autres richesses qui en ont fait maintenant l'une des disciplines les plus assidûment cultivées aux frontières de l'économie mathématique. L'un de ces thèmes de recherches est l'étude des conséquences de l'un des postulats que nous avons tacitement introduits, à savoir que chaque gain de Primus a exactement la même valeur que la perte correspondante de Secundus. C'est ce que les mathématiciens expriment en disant qu'il s'agit d'un jeu à somme nulle et que les économistes qui détestent tout jargon traduisent en parlant d' « utilités transférables ». Bien sûr, ce postulat est très raisonnable : les billets de banque qui se trouvent en plus (ou en moins) dans ma poche vers cinq heures du matin sont ceux-ci mêmes qui sont sortis (rentrés) de la poche d'autrui. Mais dans une autre optique c'est un postulat absurde et nul ne va prétendre que mille francs soient la même chose pour le riche et pour le pauvre ou que le dilemme « la bourse ou la vie ? » annonce un transfert d'utilité. Un expédient pour appréhender les jeux à somme non nulle est d'introduire deux matrices de paiement décrivant les pertes et les gains l'une du point de vue de Primus et l'autre selon celui de Secundus. Hélas, sauf cas particuliers, le théorème fondamental ne s'applique plus à cette situation générale !

Mille problèmes spéciaux tous plus ingénieux les uns que les autres ont été imaginés par les théoriciens pour éprouver les limites à l'intérieur desquelles les modifications des postulats permettent encore d'obtenir les résultats du cas initialement traité par von Neuman, c'est-à-dire le théorème minimax. Certaines ont des applications pratiques, à une meilleure intelligence de l'analyse statistique par exemple, mais la plupart n'ont peut-être d'autre fonction que de permettre aux étudiants et à ceux qui les enseignent de mieux comprendre les ressorts et les implications de la théorie du jeu à somme nulle. Et ceci non pas seulement dans la partie du monde où règne encore la loi du profit, mais aussi bien dans les pays socialistes car grâce à un hasard fortuné de l'histoire il a été possible aux savants russes de rattacher le théorème minimax aux travaux antérieurs de leur respecté compatriote, l'académicien Kontorovitch. Et ainsi les concepts de la théorie mathématique du duel sont enseignés à l'Académie Frounzé aussi bien que dans les Ecoles militaires.

Le calcul minutieusement absurde de la balance des comptes entre la perte d'un essaim de fusées et l'anéantissement de telle ou telle mégalopole industrielle, auquel on s'adonne de la Californie aux Ourals pour remplir les cases d'une matrice de paiement, peut paraître dérisoire à ceux qui ont choisi de ne pas avoir à décider de la mort des autres. Mais il contribue à prévenir que l'histoire se répète en enseignant la sagesse minimax et en particulier que l'on ne peut espérer battre à tous coups un adversaire intelligent et informé en jouant au plus fin avec lui. Une maxime qu'eût acceptée Koutouzoff, si je lis bien Tolstoï, mais qui aurait sans nul doute indigné Alexandre autant que Napoléon ou Yamamoto.