L'acte créateur

ÉTUDES RÉUNIES PAR

GILBERT GADOFFRE
ROBERT ELLRODT
JEAN-MICHEL MAULPOIX

puf écriture

Une sotie au sujet de la théorie des nombres parfaits

par Marcel Paul Schützenberger

Certes les mœurs sont devenues plus douces. Mais s'il ose parler au milieu des poètes, un informaticien n'en redoute pas moins de se voir pelé, et sa défroque suspendue aux branches. Sa seule ambition ne peut donc être que de divertir au risque de détourner le débat sur la création. Je m'avance à l'abri d'un texte classique.

« Deux tours énormes s'apercevaient dans la vallée. En les multipliant par deux le produit était quatre. Mais je ne saisissais pas très bien la nécessité de cette opération d'arithmétique, et je continuais ma route avec la fièvre au visage et je m'écriais sans cesse : "Non, non, je ne distingue pas très bien la nécessité de cette opération d'arithmétique". » Je confesse que moi non plus ou du moins pas encore, pas ici.

C'était, bien sûr, un extrait d'un chant de Maldoror, et les méthodes de la critique moderne prouveront qu'indubitablement il s'agit du quatrième (où $4 = 2 \times 2 = 2^2$).

Veuillez avoir l'indulgence d'admettre que le calculateur, c'est-à-dire celui qui aligne des calculs comme d'autres des pensées ou des vers, n'est ni un faune, ni un satyre, ni un sciapode, ni Fafner, tapi au fond de ses ateliers. Qu'il est doué d'une espèce de parole, bien qu'elle diffère de celle des poètes par le mode et le temps et surtout par la contrainte de pouvoir supporter à l'infini paraphrases et retraductions.

Ce qui implique que son mode ne soit pas l'optatif, ni le subjonctif, ni le jussif. Ce n'est même pas l'indicatif des naturalistes, mais seulement l'interrogatif et encore de façon fort restreinte. Lautréamont demande « Pourquoi » ce qui serait trop ambitieux pour les calculateurs dont la réponse n'a le droit d'être que OUI, NON, ou le plus souvent « ?? ». C'est bien peu, trop *unidimensionnel*, décident les communicateurs, mais c'est la loi de notre cité telle que nous la tenons d'Euclide.

L'histoire que je vous soumets remonte d'ailleurs à lui.

Six est un nombre parfait parce que $6 = 3 + 2 + 1$ est égal à la somme de ses diviseurs. Huit ne l'est pas parce que la somme correspondante, $4 + 2 + 1 = 7$ et que huit n'est pas sept.

Il y a une excellente explication qui est fournie par Alcuin : six est parfait, parce que la Création s'est faite en six jours. Ce n'est pas le cas de huit et d'ailleurs la seconde création, celle qui a lieu après le Déluge, a impliqué les huit âmes qui étaient dans l'Arche. Alcuin est très clair sur ces points mais il ne fait que rassembler ce que bien d'autres avaient écrit avant lui, car le thème des nombres parfaits est un grand topique depuis Euclide. Il a été développé par Philon, inlassablement investigué par les gnostiques et commenté par Boèce que je tiens à citer pour montrer fièrement que nous avons au moins un poète avec nous.

Dans ses trois livres d'arithmétique, Euclide commence par établir la théorie des nombres premiers et conclut par la démonstration qu'il n'en existe pas un qui soit plus grand que tous les autres, c'est-à-dire, en langage codé, qu'il y en a une infinité. Le mouvement surprenant de cette preuve en préfigure d'autres qui, à travers Du Bois-Raymond et Cantor, mèneront aux grands théorèmes de Gödel. Puis viennent quelques propositions irrelevantes à notre propos et enfin l'énoncé dramatique que si l'entier p est tel que $2^p - 1$ est premier alors $2^{p-1} \times (2^p - 1)$ est parfait. C'est le cas pour $p = 2, 3, 5, 7$ mais pas 9, et les quatre (encore) plus petits nombres parfaits sont connus depuis l'Antiquité.

Les voici :

$$6 = 2^1 \times (2^2 - 1) = 2 \times 3 ; \quad 28 = 2^2 \times (2^3 - 1) = 4 \times 7$$

qui admet des explications évidentes dès que l'on a abandonné le vieux rythme des semaines de cinq jours ;

$$496 = 2^4 \times (2^5 - 1) = 16 \times 31 \quad \text{et}$$

$$8128 = 2^6 \times (2^7 - 1) = 64 \times 127.$$

Observez 127.

Oui, je le sais, hélas, ces choses-là sont rudes dans nos siècles de fer, de verre et de plastique. Pourtant elles faisaient partie des connaissances des clercs passés par le trivium et le quadrivium. D'ailleurs, assis à cette table, j'ai un garant que l'Abbesse Hroswitha ne négligeait pas d'en informer ses moniales, ce qui était d'autant plus méritoire que l'on ne disposait pas encore de la limpidité des notations modernes. En particulier, manquait la convention d'écriture que 2^{k+1} désigne le résultat de la multiplication têtue de deux par lui-même k fois, grande simplification prosaïque de ce qui fit, dit-on, l'amusement du roi Gélon, et de divers sages princes orientaux.

Aussi, personne ne pouvait alors s'aviser que $1 = 2^0 \times (2^1 - 1)$ peut être considéré comme un nombre parfait, le zéro-*ième* et, c'est là encore un très profond mystère, peut-être le seul nombre parfait qui soit impair (cf. Lautréamont).

Euclide est trop classique pour poser une question. D'ailleurs la question se pose d'elle-même. Existe-t-il un nombre parfait qui soit plus grand que tous les autres ?

Les auteurs du Moyen Age restent dans le vague. Certains croient que les nombres parfaits se terminent alternativement par 6 ou par 8, ce qui est une séduisante hypothèse attribuant un rôle privilégié à DIX = DEUX que multiplie CINQ. Mais elle n'est pas vraie. Pire, les auteurs affirment que le cinquième nombre parfait est :

$$2^{10} \times (2^{11} - 1).$$

Or $2^{11} - 1 = 2\,047$ n'est pas un nombre premier comme tout écolier pouvait le vérifier sans trop de peine puisqu'il suffit de constater qu'il est divisible par 23.

Sans doute la majorité des sorbonniqueurs ne faisait que recopier ce qu'elle avait lu, mais j'y vois une faute d'une toute autre gravité, celle de croire que le monde est trop simplement facile. La suite 2, 3, 5, 7, pas 9..., appelle 11 de façon trop voyante. Aurez-vous la dureté d'y dénoncer une erreur Pélagienne ? Il est curieux que Lefèvre d'Étaples soit tombé dans ce piège. Bovilius aussi, mais il a eu le mérite d'observer que les nombres parfaits sont des gnomons (c'est-à-dire des surfaces de triangles rectangles isocèles). Euclide le savait bien, mais il écrit hors du temps, donc sans citer ses prédécesseurs, et il ne manifeste aucune sympathie pour les Pythagoriciens.

Autre marque du temps chez les calculateurs. Chez vous les poèmes sont éternels, mais moins que les poètes et depuis les âges épiques, il n'y a plus de poèmes sans poètes alors que chez nous les théorèmes deviennent vite orphelins anonymes. Et nous ignorerons toujours qui a fait joyeusement quelque matin au Moyen Age la découverte que $2^{12} \times (2^{13} - 1)$ est un nombre parfait, le vrai *cinquième* nombre parfait.

Permettez un excursus dans le jardin de l'Amitié. Un nombre parfait est un nombre égal à la somme de ses parties aliquotes, comme on disait avant que les Conciles de Bourbaki n'aient exclu les mots aux allures pédantes qui effaroucheraient les gentils étudiants. Deux nombres sont amicables, *inter se amant*, si chacun est la somme des parties aliquotes de l'autre. La paire la plus connue est (220, 284). Les meilleurs commentateurs la réfèrent à la Genèse car c'est le nombre des brebis et des autres présents que s'échangent Jacob et Ésau. Autres temps, autres usages. J'extraie de l'histoire de l'arithmétique que El-Magriti en 1107 rapporte avoir observé sur lui-même l'effet érotique des nombres amicables « quand on donne à manger le plus petit et qu'on consomme soi-même le plus grand ». Ibn Khaldun, malgré son scepticisme habituel, commente leur influence en notant la nécessité de tenir compte des thèmes astrologiques. Je passe vite à Descartes qui a trouvé une méthode pour obtenir de nouvelles paires. C'est un filon qui restera exploité jusqu'à nos jours.

Je reviens au nombre parfait. L'époque moderne commence avec Cataldi qui, en 1558, construit les premières tables des nombres premiers et découvre les deux nombres parfaits suivants. Ceux-ci correspondent à $p = 17$ et à $p = 19$. Ce n'est pas un mince travail car Cataldi accomplit une à une toutes les divisions qu'il convient. Cinquante ans plus tard, Fermat démontre des théorèmes grâce auxquels ces calculs auraient été considérablement allégés, mais il ne trouve pas de nombres parfaits nouveaux, car il se présente une lacune inattendue.

C'est le grand Euler qui, en 1771, montrera que le nombre parfait suivant est $2^{30} \times (2^{31} - 1)$. Il se trouve pour l'anecdote, que le nombre 2^{31} est très exactement la limite de ceux que les ordinateurs acceptent sans que l'on ait à invoquer des procédures spéciales.

Et puis, plus de découvertes pendant un siècle jusqu'à Édouard Lucas, qui n'a pourtant aucune réputation chez les mathématiciens professionnels car il est inspecteur de l'enseignement, et ne publie que des livres de mathématiques amusantes. Vers 1875, il invente un méthode entièrement originale pour dépister les nombres parfaits. Elle relie de façon encore mystérieuse leur quête (que les lettrés ne manqueraient pas de dire initiatique) à l'antique Nombre d'Or, c'est-à-dire au pentacle. Est-ce une partialité sectaire que de croire qu'il était pythagoricien ? En était-il de même pour Fibonacci ? Sa méthode réduit à presque rien les calculs exigés pour la vérification des cas déjà connus, mais il se borne à en montrer la vertu en prouvant que $2^{126} \times (2^{127} - 1)$ est parfait. Vous avez reconnu 127, mais évitez des hypothèses trop hâtives ; en particulier, à un étage subalterne, que l'auteur de ces lignes serait moindrement cabaliste. Très vite, d'autres appliquent la méthode et débusquent quelques nombres parfaits nouveaux.

Voyez comme notre temps est plus lent que celui des Arts. Pendant plus d'un demi-siècle, on ne trouvera rien malgré des efforts nombreux et bien d'autres qui demeurent des échecs inavoués. Malgré l'outil forgé par Lucas, la masse des calculs est trop écrasante.

Mais en 1952, en Angleterre, Robinson montre que $2^{520} \times (2^{521} - 1)$ est parfait. Il a utilisé un ordinateur, et c'est aussi la première fois que ces machines fournissent un résultat proprement mathématique. Depuis, le domaine est devenu une petite industrie où amateurs et professionnels rivalisent pour enrichir la liste des nombres parfaits toujours grâce à la méthode de Lucas, et mille ingéniosités dans sa programmation.

Il est convenable (parce que $25 = 5^2$) de citer le *vingt-cinquième* nombre parfait. Il correspond au nombre premier 21 701, et il suffit pour l'écrire d'aligner une quinzaine de milliers de chiffres.

Désormais la technique intervient dans cette longue procession. On s'active aujourd'hui autour de $p = 33\,843$, et des mathématiciens s'acharnent à trouver, à l'instar de Lucas, des propriétés permettant d'avancer vers la solution de l'énigme. Dans ce travail, il faut beaucoup d'ardeur et une confiance inébranlable dans l'espoir du succès. On connaît d'ailleurs l'histoire du Rabbin Luria qui, en Bessarabie, à l'occasion de la Fête des Tabernacles, rassemble ses disciples et leur dit : « Prions, et demain nous serons à Jérusalem. » Le premier disciple demande : « Est-ce bien vrai, Rabi ? » Et le rabbin soupire : « C'eût été si beau de passer Sukhot à Jérusalem. »

Mais s'il n'y a pas d'autre voie que le test de Lucas, le temps de cette question ne sera plus que celui des machines. Et comme l'observe Daniel Shanks, auquel j'ai fait plus qu'emprunter, on pourrait évaluer le degré d'avancement technologique d'une civilisation extraterrestre sans en savoir rien d'autre que la taille du plus grand nombre parfait qu'elle est capable de nommer.

Ce serait humiliant. (Ne gronde pas, Fafner !) Et pour certains, absurde. Pourquoi perdre du temps à résoudre ces problèmes ? Entre Euler et Lucas un mathématicien anglais, Peter Barlow, en 1814, écrit dans une encyclopédie que : « Les nombres premiers étant seulement curieux, sans être utiles, il est peu vraisemblable qu'il se trouve des personnes pour essayer d'en trouver de nouveaux. » Je n'ai pas tenté d'établir le contraire ni de vous convaincre que le calcul soit autre chose que la drogue des calculateurs. Ni de dire que les merveilleux miracles que nous y voyons ne sont pas de misérables merveilles pour reprendre le mot de Michaux. Misérables aux yeux du dieu qui est à Delphes, du dieu qui n'est qu'à Delphes.

Car quel est le statut des nombres parfaits correspondant à des nombres premiers ayant deux cents chiffres comme nous pouvons maintenant en produire en série et non pas cinq comme 33 843 ? Il n'y a pas assez de matière dans l'univers visible pour construire un ordinateur permettant la vérification au moyen du test de Lucas. Peut-être même, Gödel l'autorise, la réponse est « ? ? ». Ultime ?, ou provisoire ?

Il y a une autre loi, ésotérique, qui, dans notre cité, n'oblige que ceux qui la connaissent. Elle est l'un des sens de la Parabole du Rabbin Luria et présuppose que la découverte et la preuve d'un théorème sont actes de volonté dans l'absolue liberté que laisse un Créateur auquel n'importe rien de ce qui est fini. Ce qui leur fait tenir pour vains les propos de Barlow, calculateur honorable mais homme par trop appliqué, même pour avoir dit une phrase fatale. Après la fin des temps...

(Ici la bande du magnétophone est devenue inaudible : vengeance de Fafner, ou sagesse éditoriale supérieure, car rien n'est futile comme le bavardage d'un calculateur sur le calcul. On reconnaît cependant une référence majeure à George Steiner faisant lui-même, par récursion, référence à un Château, puis des segments d'une longue phrase embrouillée évoquant des calculateurs à l'œuvre, sans nulle inconscience, devant la septième porte, celle qui donne sur la nuit.)