

Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter aux racines de l'unité

Nicolas Borie

29 septembre 2008

Introduction et Définitions

Constructions et Théories

Implementation, lecture des premiers résultats

Discussion, amélioration

Présentation d'un groupe de Coxeter

- ▶ Un groupe de Coxeter est un groupe engendré par des éléments d'ordre 2.

Générateurs : $(s_i)_{i \in S}$ (simples réflexions)

Relations : $s_i^2 = 1$ et $\underbrace{s_i s_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{s_j s_i \cdots}_{m_{i,j}}$, for $i \neq j$

Construction sur ce groupe : $\mathbb{C}[W]$ (algèbre du groupe)

Présentation d'un groupe de Coxeter

- ▶ Un groupe de Coxeter est un groupe engendré par des éléments d'ordre 2.

Générateurs : $(s_i)_{i \in S}$ (simples réflexions)

Relations : $s_i^2 = 1$ et $\underbrace{s_i s_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{s_j s_i \cdots}_{m_{i,j}}$, for $i \neq j$

Construction sur ce groupe : $\mathbb{C}[W]$ (algèbre du groupe)

- ▶ Exemple : le groupe symétrique S_n est engendré par les transpositions $s_i = (i, i + 1)$ pour $1 \leq i \leq n - 1$

les relations sont :

$$(s_i s_i)^1 = 1 \text{ soit } m_{ii} = 1 \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$$

$$(s_i s_j)^3 = 1 \text{ soit } m_{ij} = 3 \text{ si } |i - j| = 1$$

$$(s_i s_j)^2 = 1 \text{ soit } m_{ij} = 2 \text{ si } |i - j| \geq 2$$

Matrice d'un groupe de Coxeter

- ▶ Soit W un groupe de Coxeter généré par $(s_i)_{i \in S}$ où S est fini. On définit une matrice de Coxeter comme la matrice des $m(s_i, s_j)$ ordres des éléments $s_i s_j$ où $i, j \in S$.

Matrice d'un groupe de Coxeter

- ▶ Soit W un groupe de Coxeter généré par $(s_i)_{i \in S}$ où S est fini. On définit une matrice de Coxeter comme la matrice des $m(s_i, s_j)$ ordres des éléments $s_i s_j$ où $i, j \in S$.
- ▶ Exemple : pour le système $(S_n, \{s_1, s_2, \dots, s_n\})$, la matrice des coefficients de Coxeter est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \dots & \dots & 2 \\ 3 & 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & \dots & \dots & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter

- ▶ Soit W un groupe de Coxeter avec une matrice de Coxeter M . Soit R un anneau. Soit q une variable formelle et $A = R[q, q^{-1}]$ l'anneau des séries de Laurent sur R . Alors l'*algèbre de Hecke générique* H définie par ces données est la A -Algèbre unitaire définie par :

Générateurs : $(T_i)_{i \in S}$

Relations : $(T_s + q)(T_s - 1) = 0$ (relations quadratiques)

$\underbrace{T_i T_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{T_j T_i \cdots}_{m_{i,j}}$, for $i \neq j$ (relations de tresses)

Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter

- ▶ Soit W un groupe de Coxeter avec une matrice de Coxeter M . Soit R un anneau. Soit q une variable formelle et $A = R[q, q^{-1}]$ l'anneau des séries de Laurent sur R . Alors l'*algèbre de Hecke générique* H définie par ces données est la A -Algèbre unitaire définie par :

Générateurs : $(T_i)_{i \in S}$

Relations : $(T_s + q)(T_s - 1) = 0$ (relations quadratiques)

$\underbrace{T_j T_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{T_j T_i \cdots}_{m_{i,j}}$, for $i \neq j$ (relations de tresses)

- ▶ Le paramètre q peut être spécialisé en un élément de l'anneau R . Par exemple $q = i$ pour $R = \mathbb{C}$ nous donne une algèbre de Hecke où q est spécialisé.

Algèbre de Hecke $H(W)(q)$

- Soit H une Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter
 Générateurs : $(T_i)_{i \in S}$ Relations : $(T_i + q)(T_i - 1) = 0$ et
 $\underbrace{T_i T_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{T_j T_i \cdots}_{m_{i,j}}$, pour $i \neq j$. Alors :

Algèbre de Hecke $H(W)(q)$

- ▶ Soit H une Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter
 Générateurs : $(T_i)_{i \in S}$ Relations : $(T_i + q)(T_i - 1) = 0$ et
 $\underbrace{T_i T_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{T_j T_i \cdots}_{m_{i,j}}$, pour $i \neq j$. Alors :

- ▶ Théorème :

Pour $q = 1$: L'algèbre du groupe $\mathbb{C}[W]$

Pour $q = 0$: 0 - Hecke algebra $H(W)(0)$

Pour q non nul et non racine de l'unité : isomorphe à $\mathbb{C}[W]$

Algèbre de Hecke $H(W)(q)$

- ▶ Soit H une Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter
 Générateurs : $(T_i)_{i \in S}$ Relations : $(T_i + q)(T_i - 1) = 0$ et
 $\underbrace{T_i T_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{T_j T_i \cdots}_{m_{i,j}}$, pour $i \neq j$. Alors :

- ▶ Théorème :

Pour $q = 1$: L'algèbre du groupe $\mathbb{C}[W]$

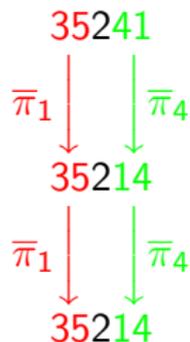
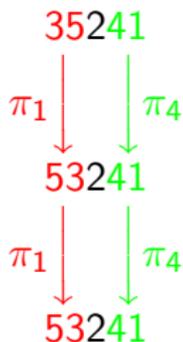
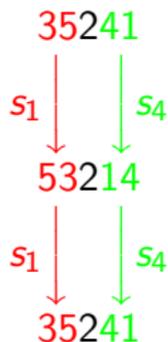
Pour $q = 0$: 0 - Hecke algebra $H(W)(0)$

Pour q non nul et non racine de l'unité : isomorphe à $\mathbb{C}[W]$

- ▶ On a donc une base de ces algèbres de Hecke indexée par les éléments du groupe de Coxeter
 Base naturelle : $(T_w)_{w \in W}$

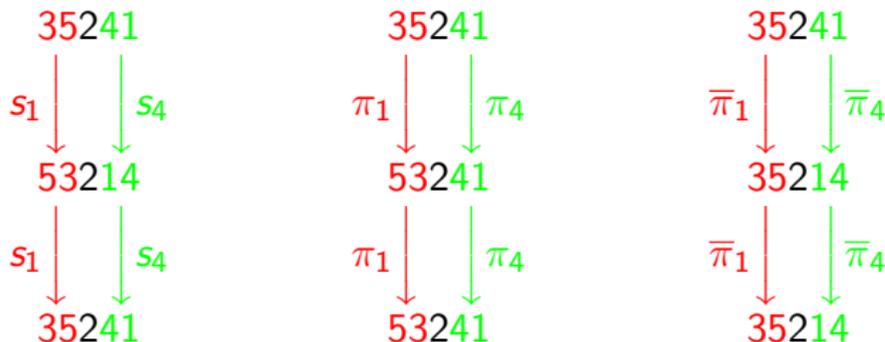
Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- Exemple : Représentation régulière de S_5 (type : A_4)



Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- Exemple : Représentation régulière de S_5 (type : A_4)



- Les s_i sont des réflexions : $s_i^2 = 1$
 Les π_i et $\bar{\pi}_i$ sont des projecteurs : $\pi_i^2 = \pi_i$ et $\bar{\pi}_i^2 = \bar{\pi}_i$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- ▶ Les opérateurs s_i , π_i et $\bar{\pi}_i$ peuvent être vu comme des opérateurs de tri :
 s_i renverse, π_i trie et $\bar{\pi}_i$ trie dans l'ordre inverse.

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- ▶ Les opérateurs s_i , π_i et $\bar{\pi}_i$ peuvent être vu comme des opérateurs de tri :
 s_i renverse, π_i trie et $\bar{\pi}_i$ trie dans l'ordre inverse.
- ▶ Opérateurs sur l'exemple de S_2 (type A_1)

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \bar{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- ▶ Les opérateurs s_i , π_i et $\bar{\pi}_i$ peuvent être vu comme des opérateurs de tri :
 s_i renverse, π_i trie et $\bar{\pi}_i$ trie dans l'ordre inverse.
- ▶ Opérateurs sur l'exemple de S_2 (type A_1)

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \bar{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Relations sur ces opérateurs :

$$s\pi = \pi, \quad \pi s = \bar{\pi}, \quad \pi + \bar{\pi} = id + s$$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- ▶ Les opérateurs s_i , π_i et $\bar{\pi}_i$ peuvent être vu comme des opérateurs de tri :
 s_i renverse, π_i trie et $\bar{\pi}_i$ trie dans l'ordre inverse.
- ▶ Opérateurs sur l'exemple de S_2 (type A_1)

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \bar{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Relations sur ces opérateurs :

$$s\pi = \pi, \quad \pi s = \bar{\pi}, \quad \pi + \bar{\pi} = id + s$$

- ▶ Pour un type A_n avec n plus grand, on remarque que les s_i et les π_i vérifient les relations de tresses issues de la structure de Coxeter.

0-Algèbre de Hecke

- ▶ On construit l'algèbre de Hecke du groupe spécialisée en $q = 0$

Générateurs : $(\pi_i)_{i \in S}$ Relations : $\pi_i^2 = \pi_i$ et

$$\underbrace{\pi_i \pi_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{\pi_j \pi_i \cdots}_{m_{i,j}}, \text{ pour } i \neq j.$$

0-Algèbre de Hecke

- ▶ On construit l'algèbre de Hecke du groupe spécialisée en $q = 0$
Générateurs : $(\pi_i)_{i \in S}$ Relations : $\pi_i^2 = \pi_i$ et

$$\underbrace{\pi_i \pi_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{\pi_j \pi_i \cdots}_{m_{i,j}}, \text{ pour } i \neq j.$$

- ▶ Exemple : Pour $W = S_2$ (type A_1)
On réalise une représentation de $H(W)(0)$ dans $End(\mathbb{C}W)$.

$$\text{générateur : } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- ▶ Idée : réaliser les générateurs de Hecke comme interpolation entre s_i et π_i avec respect aux valeurs propres

$$T_i = (1 - q)\pi_i + qs_i$$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- ▶ Idée : réaliser les générateurs de Hecke comme interpolation entre s_i et π_i avec respect aux valeurs propres

$$T_i = (1 - q)\pi_i + qs_i$$

- ▶ On a alors :

$$T_i^2 = ((1 - q)\pi_i + qs_i)((1 - q)\pi_i + qs_i)$$

$$T_i^2 = (1 - q)^2\pi_i^2 + (1 - q)q(\pi_i s_i + s_i \pi_i) + q^2 id$$

$$T_i^2 = (1 - q)^2\pi_i + (1 - q)q(\overline{\pi}_i + \pi_i) + q^2 id$$

$$T_i^2 = (1 - q)^2\pi_i + (1 - q)q(s_i + id) + q^2 id$$

$$T_i^2 = (1 - q) [(1 - q)\pi_i + qs_i] + (q - q^2)id + q^2 id$$

$$T_i^2 = (1 - q)T_i + qid$$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- ▶ Idée : réaliser les générateurs de Hecke comme interpolation entre s_i et π_i avec respect aux valeurs propres

$$T_i = (1 - q)\pi_i + qs_i$$

- ▶ On a alors :

$$T_i^2 = ((1 - q)\pi_i + qs_i)((1 - q)\pi_i + qs_i)$$

$$T_i^2 = (1 - q)^2\pi_i^2 + (1 - q)q(\pi_i s_i + s_i \pi_i) + q^2 id$$

$$T_i^2 = (1 - q)^2\pi_i + (1 - q)q(\overline{\pi}_i + \pi_i) + q^2 id$$

$$T_i^2 = (1 - q)^2\pi_i + (1 - q)q(s_i + id) + q^2 id$$

$$T_i^2 = (1 - q) [(1 - q)\pi_i + qs_i] + (q - q^2)id + q^2 id$$

$$T_i^2 = (1 - q)T_i + qid$$

- ▶ Les T_i ainsi définis, vérifient les relations quadratiques et les relations de tresses. Nous avons obtenu une représentation.

Groupe algèbre de Hecke

- ▶ Dans $End(\mathbb{C}W)$, on a vu comment construire les représentations de $H(W)(0)$ et de $H(W)(1) = \mathbb{C}[W]$.

Groupe algèbre de Hecke

- ▶ Dans $End(\mathbb{C}W)$, on a vu comment construire les représentations de $H(W)(0)$ et de $H(W)(1) = \mathbb{C}[W]$.
- ▶ Définition : Groupe algèbre de Hecke HW
On recolle $H(W)(0)$ et $\mathbb{C}[W]$ selon leurs représentations régulières à droite.

$$HW = \langle (\pi_i, s_i)_{i \in S} \rangle$$

Groupe algèbre de Hecke

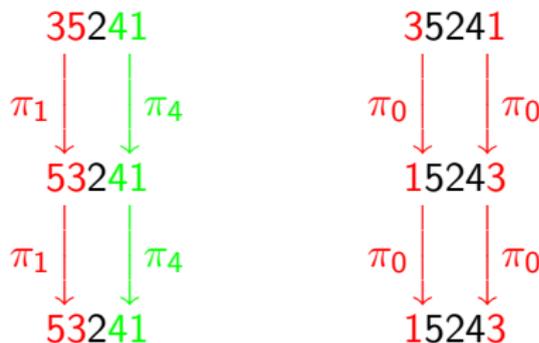
- ▶ Dans $End(\mathbb{C}W)$, on a vu comment construire les représentations de $H(W)(0)$ et de $H(W)(1) = \mathbb{C}[W]$.
- ▶ Définition : Groupe algèbre de Hecke HW
On recolle $H(W)(0)$ et $\mathbb{C}[W]$ selon leurs représentations régulières à droite.
 $HW = \langle (\pi_i, s_i)_{i \in S} \rangle$
- ▶ HW est généré par les symétries et les projections.
Ainsi la groupe algèbre de Hecke contient toutes les algèbres de Hecke par construction.

Action au level 0 et groupes affines

- ▶ Par tri à bulles, les projections peuvent trier les permutations. Mais cette opération n'est pas inversible. En insérant un extra élément π_0 qui agit sur les "extrêmes" mais en renversant l'ordre, on récupère une action transitive sur toutes les permutations.

Action au level 0 et groupes affines

- ▶ Par tri à bulles, les projections peuvent trier les permutations. Mais cette opération n'est pas inversible. En insérant un extra élément π_0 qui agit sur les "extrêmes" mais en renversant l'ordre, on récupère une action transitive sur toutes les permutations.



Action au Level 0 et groupes affines

- ▶ Théorème (Hivert, Schilling, Thiéry 2008)
 \tilde{W} : Groupe de Weyl affine
 W : Groupe de Weyl fini induit par l'action du niveau 0.
Alors, au niveau 0 (dans $\mathbb{C}W$) :
 - ▶ \tilde{W} dégénère en W

Action au Level 0 et groupes affines

- ▶ Théorème (Hivert, Schilling, Thiéry 2008)
 \tilde{W} : Groupe de Weyl affine
 W : Groupe de Weyl fini induit par l'action du niveau 0.
Alors, au niveau 0 (dans $\mathbb{C}W$) :
 - ▶ \tilde{W} dégénère en W
 - ▶ $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$ agit transitivement sur W

Action au Level 0 et groupes affines

- ▶ Théorème (Hivert, Schilling, Thiéry 2008)
 \tilde{W} : Groupe de Weyl affine
 W : Groupe de Weyl fini induit par l'action du niveau 0.
Alors, au niveau 0 (dans $\mathbb{C}W$) :
 - ▶ \tilde{W} dégénère en W
 - ▶ $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$ agit transitivement sur W
 - ▶ $H(\tilde{W})(0)$ dégénère en HW

Action au Level 0 et groupes affines

- ▶ Théorème (Hivert, Schilling, Thiéry 2008)
 \tilde{W} : Groupe de Weyl affine
 W : Groupe de Weyl fini induit par l'action du niveau 0.
Alors, au niveau 0 (dans $\mathbb{C}W$) :
 - ▶ \tilde{W} dégénère en W
 - ▶ $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$ agit transitivement sur W
 - ▶ $H(\tilde{W})(0)$ dégénère en HW
 - ▶ $H(\tilde{W})(q)$ dégénère en HW , for q générique.

Données et but

- ▶ A partir d'un type de Cartan affine $[\tilde{W}, r]$.
Recupérer l'action au niveau 0 de \tilde{W} sur la représentation régulière de W
Construire les générateurs M_1, M_2, \dots, M_r comme matrice carrée de taille $\text{card}(W)$

Données et but

- ▶ A partir d'un type de Cartan affine $[\tilde{W}, r]$.
Recupérer l'action au niveau 0 de \tilde{W} sur la représentation régulière de W
Construire les générateurs M_1, M_2, \dots, M_r comme matrice carrée de taille $\text{card}(W)$
- ▶ But : Trouver une famille B de matrices formée de produits de générateurs M_1, M_2, \dots, M_r , qui engendrent la représentation de l'algèbre de Hecke en tant qu'espace vectoriel.

Construction Explicite

- ▶ Exemple : Pour le type de Cartan \tilde{A}_2 (groupe \tilde{S}_3)

Construction Explicite

- ▶ Exemple : Pour le type de Cartan \tilde{A}_2 (groupe \tilde{S}_3)
- ▶ La projection π_1 intervient dans un générateur de Hecke qui agit sur $\mathbb{C}S_3$

Construction Explicite

- ▶ Exemple : Pour le type de Cartan \tilde{A}_2 (groupe \tilde{S}_3)
- ▶ La projection π_1 intervient dans un générateur de Hecke qui agit sur $\mathbb{C}S_3$
- ▶

	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)
(1,2,3)	0	0	0	0	0	0
(1,3,2)	0	0	0	0	0	0
(2,1,3)	1	0	1	0	0	0
(2,3,1)	0	0	0	0	0	0
(3,1,2)	0	1	0	0	1	0
(3,2,1)	0	0	0	1	0	1

Algorithme

- ▶ On considère T_1, T_2, \dots, T_n comme un alphabet
 $L^* = \{id, T_1, T_2, \dots, T_n, T_1 T_1, T_1 T_2, \dots, T_1 T_n, T_1 T_1 T_1, \dots\}$

Algorithmes

- ▶ On considère T_1, T_2, \dots, T_n comme un alphabet
 $L^* = \{id, T_1, T_2, \dots, T_n, T_1 T_1, T_1 T_2, \dots, T_1 T_n, T_1 T_1 T_1, \dots\}$
- ▶ On définit $H_l(q)$ comme le sous espace vectoriel de $H(q)$ engendré par les mots de longueur au plus l comme espace vectoriel.

Remarque : En spécialisant les générateurs pour un paramètre q complexe, on peut définir de même $H_l(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Algorithmme

- ▶ On considère T_1, T_2, \dots, T_n comme un alphabet
 $L^* = \{id, T_1, T_2, \dots, T_n, T_1 T_1, T_1 T_2, \dots, T_1 T_n, T_1 T_1 T_1, \dots\}$
- ▶ On définit $H_l(q)$ comme le sous espace vectoriel de $H(q)$ engendré par les mots de longueur au plus l comme espace vectoriel.

Remarque : En spécialisant les générateurs pour un paramètre q complexe, on peut définir de même $H_l(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

- ▶ Pour tout type de Cartan et tout paramètre, on en extrait une suite finie strictement croissante.

On peut prolonger cette suite dans l'esprit mais elle est ultimement stationnaire dès qu'il y a stabilité.

Exemple : Type de Cartan A_3

	Dimension									
	H(z)	W0	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8
2	211	1	5	15	35	69	121	181	207	211
0	211	1	5	15	35	69	121	181	207	211
1	24	1	5	15	23	24				
-1	125	1	5	15	33	59	89	115	125	
$1\frac{1}{3}$	152	1	5	15	35	68	112	139	149	152
$1\frac{1}{4}$	112	1	5	15	33	58	86	108	112	
$1\frac{1}{5}$	211	1	5	15	35	69	121	181	207	211
$1\frac{1}{6}$	211	1	5	15	35	69	121	181	207	211
$1\frac{1}{7}$	211	1	5	15	35	69	121	181	207	211
$1\frac{1}{8}$	211	1	5	15	35	69	121	181	207	211

Première conjecture

- ▶ On se heurte à un problème de taille des calculs très rapidement.
Pour le type de Cartan A_4 , l'ordinateur pivote des vecteurs de taille $(5!)^2 = 14400$.

Première conjecture

- ▶ On se heurte à un problème de taille des calculs très rapidement.
Pour le type de Cartan A_4 , l'ordinateur pivote des vecteurs de taille $(5!)^2 = 14400$.
- ▶ A la vue des résultats, Toutes les implémentations donne le résultat suivant :
Une chute de dimension pour les mots de longueur l par rapport au cas générique donne une chute de dimension pour la représentation.

Première conjecture

- ▶ On se heurte à un problème de taille des calculs très rapidement.
Pour le type de Cartan A_4 , l'ordinateur pivote des vecteurs de taille $(5!)^2 = 14400$.
- ▶ A la vue des résultats, Toutes les implémentations donne le résultat suivant :
Une chute de dimension pour les mots de longueur l par rapport au cas générique donne une chute de dimension pour la représentation.
- ▶ Ce que l'on peut exprimer comme :
 $z \in \mathbb{C} : \text{Si } \dim_{\mathbb{C}}(H_l(z)) < \dim_{\mathbb{C}(q)}(H_l(q))$
Alors $\dim_{\mathbb{C}}(H(z)) < \dim_{\mathbb{C}(q)}(H(q))$

Contre Exemple

- ▶ Après moulte recherche et echec, construction d'un contre exemple par ordinateur.

Contre Exemple

- ▶ Après moult recherche et echec, construction d'un contre exemple par ordinateur.
- ▶ Générateurs : (on veut spécialiser q en 1)

Contre Exemple

- ▶ Après moult recherche et echec, construction d'un contre exemple par ordinateur.
- ▶ Générateurs : (on veut spécialiser q en 1)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & q+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ & \left(\begin{array}{ccc} q-1 & q+1 & q-1 \\ 0 & q+1 & q-1 \\ 0 & q+1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Contre Exemple

► Générateurs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Contre Exemple

- ▶ Générateurs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Calculs sur $\mathbb{C}(q)$ et sur \mathbb{C} pour la spécialisation $q \leftarrow 1$.

Contre Exemple

- ▶ Générateurs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Calculs sur $\mathbb{C}(q)$ et sur \mathbb{C} pour la spécialisation $q \leftarrow 1$.

	$A_0(q)$	$A_1(q)$	$A_2(q)$	$A_3(q)$	$A_4(q)$	$A_5(q)$
<i>dim</i>	1	3	7	9	.	.
	$A_0(1)$	$A_1(1)$	$A_2(1)$	$A_3(1)$	$A_4(1)$	$A_5(1)$
<i>dim</i>	1	3	6	8	9	.

Questions ouvertes

- ▶ Le résultat recherché pendant mon stage est-il vrai dans ce cadre des algèbres de Hecke ?

Questions ouvertes

- ▶ Le résultat recherché pendant mon stage est-il vrai dans ce cadre des algèbres de Hecke ?
- ▶ Est ce que la spécialisation $q = -1$ provoque une chute de dimension de la représentation pour tout type de Cartan ?