Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter aux racines de l'unité

Nicolas Borie

29 septembre 2008

Présentation d'un groupe de Coxeter

- Un groupe de Coxeter est un groupe engendré par des éléments d'ordre 2.
  Générateurs : $(s_i)_{i \in S}$ (simples réflexions)
  Relations : ${s_i}^2 = 1$ et $\underbrace{s_i s_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{s_j s_i \cdots}_{m_{i,j}}$, for $i \neq j$
  Construction sur ce groupe : $\mathbb{C}[W]$ (algèbre du groupe)

Présentation d'un groupe de Coxeter

- Un groupe de Coxeter est un groupe engendré par des éléments d'ordre 2.
  Générateurs : $(s_i)_{i \in S}$ (simples réflexions)
  Relations : ${s_i}^2 = 1$ et $\underbrace{s_i s_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{s_j s_i \cdots}_{m_{i,j}}$, for $i \neq j$
  Construction sur ce groupe : $\mathbb{C}[W]$ (algèbre du groupe)
- Exemple : le groupe symétrique S_n est engendré par les transpositions $s_i = (i, i+1)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$
  les relations sont :
  $(s_i s_i)^1 = 1$ soit $m_{ii} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$
  $(s_i s_j)^3 = 1$ soit $m_{ij} = 3$ si $|i-j| = 1$
  $(s_i s_j)^2 = 1$ soit $m_{ij} = 2$ si $|i-j| \geqslant 2$

Matrice d'un groupe de Coxeter

- Soit W un groupe de Coxeter généré par $(s_i)_{i \in S}$ où S est fini. On définit une matrice de Coxeter comme la matrice des $m(s_i, s_j)$ ordres des éléments $s_i s_j$ où $i, j \in S$.

Matrice d'un groupe de Coxeter

- Soit W un groupe de Coxeter généré par $(s_i)_{i \in S}$ où S est fini. On définit une matrice de Coxeter comme la matrice des $m(s_i, s_j)$ ordres des éléments $s_i s_j$ où $i, j \in S$.
- Exemple : pour le système $(S_n, \{s_1, s_2, \ldots, s_n\})$, la matrice des coefficients de Coxeter est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \ldots & \ldots & 2 \\ 3 & 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & \ldots & \ldots & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter

- Soit W un groupe de Coxeter avec une matrice de coxeter M. Soit R un anneau. Soit q une variable formelle et $A = R[q, q^{-1}]$ l'anneau des séries de Laurent sur R. Alors l'*algèbre de Hecke générique* H définie par ces données est la A-Algèbre unitaire définie par :
  Générateurs : $(T_i)_{i \in S}$
  Relations : $(T_s + q)(T_s - 1) = 0$ (relations quadratiques)
  $\underbrace{T_i T_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{T_j T_i \cdots}_{m_{i,j}}$, for $i \neq j$ (relations de tresses)

Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter

- Soit W un groupe de Coxeter avec une matrice de coxeter M. Soit R un anneau. Soit q une variable formelle et $A = R[q, q^{-1}]$ l'anneau des séries de Laurent sur R. Alors l'*algèbre de Hecke générique* H définie par ces données est la A-Algèbre unitaire définie par :
  Générateurs : $(T_i)_{i \in S}$
  Relations : $(T_s + q)(T_s - 1) = 0$ (relations quadratiques)
  $\underbrace{T_i T_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{T_j T_i \cdots}_{m_{i,j}}$, for $i \neq j$ (relations de tresses)
- Le paramètre q peut être spécialisé en un élément de l'anneau R. Par exemple $q = i$ pour $R = \mathbb{C}$ nous donne une algèbre de Hecke où q est spécialisé.

Algèbre de Hecke $H(W)(q)$

- Soit H une Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter Générateurs : $(T_i)_{i \in S}$ Relations : $(T_i + q)(T_i - 1) = 0$ et $\underbrace{T_i T_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{T_j T_i \cdots}_{m_{i,j}}$, pour $i \neq j$. Alors :

Algèbre de Hecke $H(W)(q)$

- Soit H une Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter
  Générateurs : $(T_i)_{i \in S}$ Relations : $(T_i + q)(T_i - 1) = 0$ et
  $\underbrace{T_i T_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{T_j T_i \cdots}_{m_{i,j}}$, pour $i \neq j$. Alors :
- Théorème :
  Pour $q = 1$: L'algèbre du groupe $\mathbb{C}[W]$
  Pour $q = 0$: 0 - Hecke algebra $H(W)(0)$
  Pour q non nul et non racine de l'unité : isomorphe à $\mathbb{C}[W]$

Algèbre de Hecke $H(W)(q)$

- Soit H une Algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter
  Générateurs : $(T_i)_{i\in S}$ Relations : $(T_i + q)(T_i - 1) = 0$ et $\underbrace{T_i T_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{T_j T_i \cdots}_{m_{i,j}}$, pour $i \neq j$. Alors :
- Théorème :
  Pour $q = 1$: L'algèbre du groupe $\mathbb{C}[W]$
  Pour $q = 0$: 0 - Hecke algebra $H(W)(0)$
  Pour q non nul et non racine de l'unité : isomorphe à $\mathbb{C}[W]$
- On a donc une base de ces algèbres de Hecke indexée par les éléments du groupe de Coxeter
  Base naturelle : $(T_w)_{w\in W}$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- Exemple : Représentation régulière de S_5 (type : A_4)

$$
\begin{tikzcd}
35241 \arrow[d, shift right, "s_1"'] \arrow[d, shift left, "s_4"] \\
53214 \arrow[d, shift right, "s_1"'] \arrow[d, shift left, "s_4"] \\
35241
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
35241 \arrow[d, shift right, "\pi_1"'] \arrow[d, shift left, "\pi_4"] \\
53241 \arrow[d, shift right, "\pi_1"'] \arrow[d, shift left, "\pi_4"] \\
53241
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
35241 \arrow[d, shift right, "\overline{\pi}_1"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\pi}_4"] \\
35214 \arrow[d, shift right, "\overline{\pi}_1"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\pi}_4"] \\
35214
\end{tikzcd}
$$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- Exemple : Représentation régulière de S_5 (type : A_4)

$$
\begin{tikzcd}
35241 \arrow[d, shift right=3, "s_1"'] \arrow[d, shift left=3, "s_4"] & 35241 \arrow[d, shift right=3, "\pi_1"'] \arrow[d, shift left=3, "\pi_4"] & 35241 \arrow[d, shift right=3, "\overline{\pi}_1"'] \arrow[d, shift left=3, "\overline{\pi}_4"] \\
53214 \arrow[d, shift right=3, "s_1"'] \arrow[d, shift left=3, "s_4"] & 53241 \arrow[d, shift right=3, "\pi_1"'] \arrow[d, shift left=3, "\pi_4"] & 35214 \arrow[d, shift right=3, "\overline{\pi}_1"'] \arrow[d, shift left=3, "\overline{\pi}_4"] \\
35241 & 53241 & 35214
\end{tikzcd}
$$

- Les s_i sont des réflexions : ${s_i}^2 = 1$
  Les π_i et $\overline{\pi}_i$ sont des projecteurs : ${\pi_i}^2 = \pi_i$ et ${\overline{\pi}_i}^2 = \overline{\pi}_i$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- Les opérateurs s_i, π_i et $\overline{\pi}_i$ peuvent être vu comme des opérateurs de tri :
  s_i renverse, π_i trie et $\overline{\pi}_i$ trie dans l'ordre inverse.

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- Les opérateurs s_i, π_i et $\overline{\pi}_i$ peuvent être vu comme des opérateurs de tri :
  s_i renverse, π_i trie et $\overline{\pi}_i$ trie dans l'ordre inverse.
- Opérateurs sur l'exemple de S_2 (type A_1)

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \overline{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- Les opérateurs s_i, π_i et $\overline{\pi}_i$ peuvent être vu comme des opérateurs de tri :
  s_i renverse, π_i trie et $\overline{\pi}_i$ trie dans l'ordre inverse.
- Opérateurs sur l'exemple de S_2 (type A_1)

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \overline{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Relations sur ces opérateurs :

$$s\pi = \pi, \qquad \pi s = \overline{\pi}, \qquad \pi + \overline{\pi} = id + s$$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- Les opérateurs s_i, π_i et $\overline{\pi}_i$ peuvent être vu comme des opérateurs de tri :
  s_i renverse, π_i trie et $\overline{\pi}_i$ trie dans l'ordre inverse.
- Opérateurs sur l'exemple de S_2 (type A_1)

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \overline{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Relations sur ces opérateurs :

$$s\pi = \pi, \qquad \pi s = \overline{\pi}, \qquad \pi + \overline{\pi} = id + s$$

- Pour un type A_n avec n plus grand, on remarque que les s_i et les π_i vérifient les relations de tresses issues de la structure de Coxeter.

0-Algèbre de Hecke

- On construit l'algèbre de Hecke du groupe spécialisée en $q = 0$ Générateurs : $(\pi_i)_{i \in S}$ Relations : $\pi_i^2 = \pi_i$ et $\underbrace{\pi_i \pi_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{\pi_j \pi_i \cdots}_{m_{i,j}}$, pour $i \neq j$.

0-Algèbre de Hecke

- On construit l'algèbre de Hecke du groupe spécialisée en $q = 0$
  Générateurs : $(\pi_i)_{i \in S}$ Relations : $\pi_i^2 = \pi_i$ et
  $\underbrace{\pi_i \pi_j \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{\pi_j \pi_i \cdots}_{m_{i,j}}$, pour $i \neq j$.
- Exemple : Pour $W = S_2$ (type A_1)
  On réalise une représentation de $H(W)(0)$ dans $End(\mathbb{C}W)$.
  générateur : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- Idée : réaliser les générateurs de Hecke comme interpolation entre s_i et π_i avec respect aux valeurs propres

$$T_i = (1 - q)\pi_i + qs_i$$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- Idée : réaliser les générateurs de Hecke comme interpolation entre s_i et π_i avec respect aux valeurs propres

$$T_i = (1-q)\pi_i + qs_i$$

- On a alors :
$${T_i}^2 = ((1-q)\pi_i + qs_i)((1-q)\pi_i + qs_i)$$
$${T_i}^2 = (1-q)^2{\pi_i}^2 + (1-q)q(\pi_i s_i + s_i\pi_i) + q^2 id$$
$${T_i}^2 = (1-q)^2\pi_i + (1-q)q(\overline{\pi_i} + \pi_i) + q^2 id$$
$${T_i}^2 = (1-q)^2\pi_i + (1-q)q(s_i + id) + q^2 id$$
$${T_i}^2 = (1-q)\left[(1-q)\pi_i + qs_i\right] + (q-q^2)id + q^2 id$$
$${T_i}^2 = (1-q)T_i + qid$$

Construction d'opérateur dans $\mathbb{C}[W]$

- Idée : réaliser les générateurs de Hecke comme interpolation entre s_i et π_i avec respect aux valeurs propres

$$T_i = (1-q)\pi_i + qs_i$$

- On a alors :
$${T_i}^2 = ((1-q)\pi_i + qs_i)((1-q)\pi_i + qs_i)$$
$${T_i}^2 = (1-q)^2{\pi_i}^2 + (1-q)q(\pi_i s_i + s_i\pi_i) + q^2 id$$
$${T_i}^2 = (1-q)^2\pi_i + (1-q)q(\overline{\pi_i} + \pi_i) + q^2 id$$
$${T_i}^2 = (1-q)^2\pi_i + (1-q)q(s_i + id) + q^2 id$$
$${T_i}^2 = (1-q)\left[(1-q)\pi_i + qs_i\right] + (q-q^2)id + q^2 id$$
$${T_i}^2 = (1-q)\,T_i + qid$$
- Les T_i ainsi définis, vérifient les relations quadratiques et les relations de tresses. Nous avons obtenu une représentation.

Groupe algèbre de Hecke

- Dans $End(\mathbb{C}W)$, on a vu comment construire les représentation de $H(W)(0)$ et de $H(W)(1) = \mathbb{C}[W]$.

Groupe algèbre de Hecke

- Dans $End(\mathbb{C}W)$, on a vu comment construire les représentation de $H(W)(0)$ et de $H(W)(1) = \mathbb{C}[W]$.
- Définition : Groupe algèbre de Hecke HW
  On recolle $H(W)(0)$ et $\mathbb{C}[W]$ selon leurs représentations régulières à droite.
  $HW = < (\pi_i, s_i)_{i \in S} >$

Groupe algèbre de Hecke

- Dans $End(\mathbb{C}W)$, on a vu comment construire les représentation de $H(W)(0)$ et de $H(W)(1) = \mathbb{C}[W]$.
- Définition : Groupe algèbre de Hecke HW
  On recolle $H(W)(0)$ et $\mathbb{C}[W]$ selon leurs représentations régulières à droite.
  $HW =< (\pi_i, s_i)_{i \in S} >$
- HW est généré par les symétries et les projections.
  Ainsi la groupe algèbre de Hecke contient toutes les algèbres de Hecke par construction.

Action au level 0 et groupes affines

- Par tri à bulles, les projections peuvent trier les permutations. Mais cette opération n'est pas inversible. En insérant un extra élément π_0 qui agit sur les "extrêmes" mais en renversant l'ordre, on récupère una action transitive sur toutes les permutations.

Action au level 0 et groupes affines

- Par tri à bulles, les projections peuvent trier les permutations. Mais cette opération n'est pas inversible. En insérant un extra élément π_0 qui agit sur les "extrêmes" mais en renversant l'ordre, on récupère una action transitive sur toutes les permutations.
-

$$\begin{tikzcd}
35241 \arrow[d, shift right=2, "\pi_1"'] \arrow[d, shift left=2, "\pi_4"] \\
53241 \arrow[d, shift right=2, "\pi_1"'] \arrow[d, shift left=2, "\pi_4"] \\
53241
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
35241 \arrow[d, shift right=2, "\pi_0"'] \arrow[d, shift left=2, "\pi_0"] \\
15243 \arrow[d, shift right=2, "\pi_0"'] \arrow[d, shift left=2, "\pi_0"] \\
15243
\end{tikzcd}$$

Action au Level 0 et groupes affines

- Théorème (Hivert, Schilling, Thiéry 2008)
  $\tilde{W}$: Groupe de Weyl affine
  W : Groupe de Weyl fini induit par l'action du niveau 0.
  Alors, au niveau 0 (dans $\mathbb{C}W$) :
  - $\tilde{W}$ dégénère en W

Action au Level 0 et groupes affines

- Théorème (Hivert, Schilling, Thiéry 2008)
  $\tilde{W}$: Groupe de Weyl affine
  W : Groupe de Weyl fini induit par l'action du niveau 0.
  Alors, au niveau 0 (dans $\mathbb{C}W$) :
  - $\tilde{W}$ dégénère en W
  - $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ agit transitivement sur W

Action au Level 0 et groupes affines

- Théorème (Hivert, Schilling, Thiéry 2008)
  $\tilde{W}$: Groupe de Weyl affine
  W : Groupe de Weyl fini induit par l'action du niveau 0.
  Alors, au niveau 0 (dans $\mathbb{C}W$) :
  - $\tilde{W}$ dégénère en W
  - $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ agit transitivement sur W
  - $H(\tilde{W})(0)$ dégénère en HW

Action au Level 0 et groupes affines

- Théorème (Hivert, Schilling, Thiéry 2008)
  $\tilde{W}$: Groupe de Weyl affine
  W : Groupe de Weyl fini induit par l'action du niveau 0.
  Alors, au niveau 0 (dans $\mathbb{C}W$) :
  - $\tilde{W}$ dégénère en W
  - $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ agit transitivement sur W
  - $H(\tilde{W})(0)$ dégénère en HW
  - $H(\tilde{W})(q)$ dégénère en HW, for q générique.

Données et but

- A partir d'un type de Cartan affine $[\tilde{W}, r]$.
  Recupérer l'action au niveau 0 de $\tilde{W}$ sur la représentation régulière de W
  Construire les générateurs $M_1, M_2, \ldots, M_r$ comme matrice carrée de taille $card(W)$

Données et but

- A partir d'un type de Cartan affine $[\tilde{W}, r]$.
  Recupérer l'action au niveau 0 de $\tilde{W}$ sur la représentation régulière de W
  Construire les générateurs $M_1, M_2, \ldots, M_r$ comme matrice carrée de taille $card(W)$
- But : Trouver une famille B de matrices formée de produits de générateurs $M_1, M_2, \ldots, M_r$, qui engrendre la représentation de l'algèbre de Hecke en tant qu'espace vectoriel.

Construction Explicite

- Exemple : Pour le type de Cartan $\tilde{A}_2$ (groupe $\tilde{S}_3$)

Construction Explicite

- Exemple : Pour le type de Cartan $\tilde{A}_2$ (groupe $\tilde{S}_3$)
- La projection π_1 intervient dans un générateur de Hecke qui agit sur $\mathbb{C}S_3$

Construction Explicite

- Exemple : Pour le type de Cartan $\tilde{A}_2$ (groupe $\tilde{S}_3$)
- La projection π_1 intervient dans un générateur de Hecke qui agit sur $\mathbb{C}S_3$
-

	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)
(1,2,3)	0	0	0	0	0	0
(1,3,2)	0	0	0	0	0	0
(2,1,3)	1	0	1	0	0	0
(2,3,1)	0	0	0	0	0	0
(3,1,2)	0	1	0	0	1	0
(3,2,1)	0	0	0	1	0	1

Algorithme

- On considère $T_1, T_2, \ldots, T_n$ comme un alphabet
  $L^* = \{id, T_1, T_2, \ldots, T_n, T_1T_1, T_1T_2, \ldots, T_1T_n, T_1T_1T_1, \ldots\}$

Algorithme

- On considère $T_1, T_2, \ldots, T_n$ comme un alphabet
  $L^* = \{id, T_1, T_2, \ldots, T_n, T_1T_1, T_1T_2, \ldots, T_1T_n, T_1T_1T_1, \ldots\}$
- On définie $H_l(q)$ comme le sous espace vectoreil de $H(q)$ engendré par les mots de longueur au plus l comme espace vectoriel.
  Remarque : En spécialisant les générateurs pour un paramétre q complexe, on peut definir de même $H_l(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Algorithme

- On considère $T_1, T_2, \ldots, T_n$ comme un alphabet
  $L^* = \{id, T_1, T_2, \ldots, T_n, T_1T_1, T_1T_2, \ldots, T_1T_n, T_1T_1T_1, \ldots\}$
- On définie $H_l(q)$ comme le sous espace vectoreil de $H(q)$ engendré par les mots de longueur au plus l comme espace vectoriel.
  Remarque : En spécialisant les générateurs pour un paramétre q complexe, on peut definir de même $H_l(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- Pour tout type de Cartan et tout paramètre, on en extrait une suite finie strictement croissante.
  On peut prolonger cette suite dans l'esprit mais elle est ultimement stationnaire dès qu'il y a stabilité.

Exemple : Type de Cartan A_3

-

	Dimension									
	H(z)	W0	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8
2	**211**	1	5	15	35	69	121	181	207	**211**
0	**211**	1	5	15	35	69	121	181	207	**211**
1	**24**	1	5	15	23	**24**				
-1	**125**	1	5	15	33	59	89	115	**125**	
$1^{\frac{1}{3}}$	**152**	1	5	15	35	68	112	139	149	**152**
$1^{\frac{1}{4}}$	**112**	1	5	15	33	58	86	108	**112**	
$1^{\frac{1}{5}}$	**211**	1	5	15	35	69	121	181	207	**211**
$1^{\frac{1}{6}}$	**211**	1	5	15	35	69	121	181	207	**211**
$1^{\frac{1}{7}}$	**211**	1	5	15	35	69	121	181	207	**211**
$1^{\frac{1}{8}}$	**211**	1	5	15	35	69	121	181	207	**211**

Première conjecture

- On se heurte à un problème de taille des calculs très rapidement.
  Pour le type de Cartan A_4, l'ordinateur pivote des vecteurs de taille $(5!)^2 = 14400$.

Première conjecture

- On se heurte à un problème de taille des calculs très rapidement.
  Pour le type de Cartan A_4, l'ordinateur pivote des vecteurs de taille $(5!)^2 = 14400$.
- A la vue des résultats, Toutes les implémentations donne le résultat suivant :
  Une chute de dimension pour les mots de longueur l par rapport au cas générique donne une chute de dimension pour la représentation.

Première conjecture

- On se heurte à un problème de taille des calculs très rapidement.
  Pour le type de Cartan A_4, l'ordinateur pivote des vecteurs de taille $(5!)^2 = 14400$.
- A la vue des résultats, Toutes les implémentations donne le résultat suivant :
  Une chute de dimension pour les mots de longueur l par rapport au cas générique donne une chute de dimension pour la représentation.
- Ce que l'on peut exprimer comme :
  $z \in \mathbb{C}$: Si $dim_{\mathbb{C}}(H_l(z)) < dim_{\mathbb{C}(q)}(H_l(q))$
  Alors $dim_{\mathbb{C}}(H(z)) < dim_{\mathbb{C}(q)}(H(q))$

Contre Exemple

- Après moulte recherche et echec, construction d'un contre exemple par ordinateur.

Contre Exemple

- Après moulte recherche et echec, construction d'un contre exemple par ordinateur.
- Générateurs : (on veut spécialiser q en 1)

Contre Exemple

- Après moulte recherche et echec, construction d'un contre exemple par ordinateur.
- Générateurs : (on veut spécialiser q en 1)
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & q+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} q-1 & q+1 & q-1 \\ 0 & q+1 & q-1 \\ 0 & q+1 & 0 \end{pmatrix}$

Contre Exemple

- Générateurs :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Contre Exemple

- Générateurs :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
- Calculs sur $\mathbb{C}(q)$ et sur $\mathbb{C}$ pour la spécialisation $q \leftarrow 1$.

Contre Exemple

- Générateurs :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
- Calculs sur $\mathbb{C}(q)$ et sur $\mathbb{C}$ pour la spécialisation $q \leftarrow 1$.
-

	$A_0(q)$	$A_1(q)$	$A_2(q)$	$A_3(q)$	$A_4(q)$	$A_5(q)$
dim	1	3	7	9	.	.
	$A_0(1)$	$A_1(1)$	$A_2(1)$	$A_3(1)$	$A_4(1)$	$A_5(1)$
dim	1	3	6	8	9	.

Questions ouvertes

- Le résultat recherché pendant mon stage est-il vrai dans ce cadre des algèbres de Hecke ?

Questions ouvertes

- Le résultat recherché pendant mon stage est-il vrai dans ce cadre des algèbres de Hecke ?
- Est ce que la spécialisation $q = -1$ provoque une chute de dimension de la représentation pour tout type de Cartan ?