

Projet L3 MFA

David Courtemanche

Université Paris Sud

2012

Etude de quelques relations
algébriques entre multizêtas.

Enseignant encadrant : Olivier Bouillot

Table des matières

Introduction	3
1 Autour des valeurs aux entiers de la fonction zêta et applications aux calculs de certaines sommes.	4
1.1 Valeur aux entiers pairs de la fonction zêta.	4
1.1.1 Définition des nombres de Bernouilli.	4
1.1.2 Calcul des nombres de Bernouilli.	4
1.1.3 Calcul de $\zeta(2k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$	6
1.1.4 Deuxième preuve.	7
1.2 Calculs de sommes.	8
1.3 Interprétation et extension.	11
2 Définition et convergence des multizêtas.	11
3 Les tables de multiplications entre multizêtas.	12
3.1 Quelques définitions sur...	13
3.1.1 ... les polynômes non commutatifs.	13
3.1.2 ... le produit de mélange et de mélange contractant.	13
3.1.3 ... les séquences.	14
3.2 Une table de multiplication liée aux séries.	15
3.2.1 Première démonstration : version somme.	15
3.2.2 Deuxième démonstration : version fonctionnelle.	17
3.3 Une table de multiplication liée aux intégrales.	20
3.3.1 Première démonstration : version intégrale.	20
3.3.2 Deuxième démonstration : version syntaxique.	23
3.4 Lien entre $\mathcal{Z}e$ et les deux tables de multiplications.	26
3.5 Exemples de manipulation des tables.	30
4 D'autres relations algébriques entre multizêtas.	32
4.1 Un théorème de dualité.	32
4.2 Théorème de la Somme.	33
4.3 Relation de Ohno.	35
5 Trois conjectures importantes.	38
5.1 Conjecture diophantienne.	38
5.2 Dimensions conjecturales de sous-espace vectoriels de l'espace des multizêtas.	38
5.3 Absence de \mathbb{Q} -relations linéaires entre multizêtas de poids différents	44
Conclusion	45
Références	46

Introduction :

La fonction zêta de Riemann est une fonction qui joue un rôle central en arithmétique, notamment dans la théorie des nombres premiers.

Cependant, l'étude des ces nombres n'est encore qu'incomplète. En effet, on ne connaît que très peu de choses sur les valeurs aux entiers impairs. C'est pourquoi il a été introduit de nouveaux nombres qui permettent d'en savoir plus conjecturalement sur l'arithmétique de la fonction zêta : ce sont les *multizêtas*.

Ces nombres multizêtas ont été introduits par Euler (dès 1775, dans le cas de la longueur 2) , et viennent de faire leur retour en mathématiques après un peu plus de deux siècles d'oubli ; ils apparaissent naturellement dans un certain nombre de questions à la frontière de la théorie des nombres et de la physique théorique.

L'objectif de ce mémoire est de présenter un court rappel sur ce qui est aujourd'hui connu des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers et de mettre en évidence son lien avec les multizêtas. Or, on pense qu'il n'y a pas de relations (à coefficients rationnels) entre les valeurs de la fonction zêta. C'est pourquoi cette conjecture motive la question suivante : Y a-t-il des relations entre multizêtas (à coefficients rationnels) ? Si oui quelles sont elles ?

Pour cela, nous étudierons d'abord la fonction zêta aux entiers naturels, puis nous introduirons les multizêtas afin d'étudier leurs principales propriétés et enfin évoquer les principales conjectures les concernant.

1 Autour des valeurs aux entiers de la fonction zêta et applications aux calculs de certaines sommes.

Définition. On appelle *fonction zêta de Riemann* la fonction notée ζ et définie sur $]1, +\infty[$ et à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} .$$

1.1 Valeur aux entiers pairs de la fonction zêta.

Dans cette partie, on se propose d'établir une formule permettant de calculer la valeur des $\zeta(2k)$ pour tout entier $k \geq 1$. Pour cela, on introduit les polynômes et nombres de Bernouilli. $\mathbb{R}[X]$ désigne la \mathbb{R} -algèbre des polynômes à coefficients réels. On identifie un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

1.1.1 Définition des nombres de Bernouilli.

Définition. Les *polynômes de Bernouilli* sont définis comme l'unique suite de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} B_0 = 1 . \\ \forall n \in \mathbb{N}^* , B'_n = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(t)dt = 0 . \end{cases}$$

On appelle *n-ième nombre de Bernouilli* le nombre $b_n = B_n(0)$.

Remarques. • Pour tout $n \geq 2$, on a par définition :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t)dt = n \int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0 .$$

Pour $n = 1$, on calcule B_1 :

$$B'_1 = 1 \cdot B_0 = 1 . \text{ Donc } B_1 = X + C \text{ où } C \in \mathbb{R} . \text{ Or } \int_0^1 (t - C)dt = 0 .$$

D'où : $\frac{1}{2} + C = 0$ et $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$. Il vient alors $B_1(1) - B_1(0) = 1$.

• De plus, on remarque que la suite $U_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$ vérifie aussi les trois propriétés de la définition des polynômes de Bernouilli. Par unicité d'une telle suite, on a $B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$ (formule de symétrie).

1.1.2 Calcul des nombres de Bernouilli.

Cependant, le calcul des nombres de Bernouilli définis par $b_n = B_n(0)$ est assez lourd car il faut calculer récursivement les polynômes de Bernouilli B_n et prendre leur valeur en 0 .

On opte plus souvent pour une autre source de calcul récursif : on applique la formule de Taylor au polynôme B_n de degré n :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k .$$

Or, $B_n^{(k)}(X) = n(n-1)\dots(n-k+1)B_{n-k}(X)$, ce qui donne : $\frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k} b_{n-k}$.

D'où : $B_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$.

Le but est de pouvoir établir une relation pour calculer plus facilement les b_n pour n assez grand. On évalue en 1 :

$$b_n = B_n(0) = B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} .$$

On suppose $n \geq 2$. De la formule précédente, on tire que :

$$b_n = b_n + nb_{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} b_{n-k} .$$

Et finalement, la suite (b_n) est définie par :

$$\begin{cases} b_0 = 1 . \\ \forall n \geq 1, b_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} . \end{cases}$$

Remarques. On calcule ainsi les premiers nombres de Bernoulli :

- On applique la formule de symétrie en $X = 0$, il vient alors :

$$\forall n \geq 1, b_{2n+1} = 0 .$$

Avec la formule précédente, on obtient alors :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

- Il existe une deuxième définition des nombres de Bernoulli : ce sont les coefficients du développement en série de $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ tels que $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} b_k \frac{x^k}{k!}$. Cette définition coïncide bien avec celle donnée précédemment.

1.1.3 Calcul de $\zeta(2k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

On considère maintenant la fonction g_k 2π -périodique définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$g_k(x) = B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \text{ pour tout } x \in [0, 2\pi[.$$

On remarque que g_k est continue sur \mathbb{R} car $g_k(2\pi) = B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = g_k(0)$.

On va développer cette fonction en série de Fourier. En effet, g_k est 2π -périodique et C^1 par morceaux. Donc, par le théorème de Dirichlet, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) \cos(nx) + b_n(k) \sin(nx).$$

Soit $x \in [0, \pi]$, $g_k(-x) = B_{2k}\left(\frac{-x}{2\pi}\right) = B_{2k}\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)$ par la formule de symétrie. Donc $g_k(-x) = B_{2k}\left(\frac{2\pi+x}{2\pi}\right) = g_k(x+2\pi) = g_k(x)$, i.e g_k est paire.

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(k) = 0.$$

Il vient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) \cos(nx).$$

Calculons maintenant les coefficients de Fourier restants. On effectue deux intégrations par parties successives.

Soit $n \geq 1$ et $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n(k) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\left[B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} B'_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \\ &= \frac{-k}{n\pi^2} \int_0^{2\pi} B_{2k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \sin(nx) dx \\ &= \frac{-k}{n\pi^2} \left(\left[B_{2k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{2k-1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} B_{2k-2}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{-k}{n\pi^2} \left(\frac{-1}{n} (B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)) \right) + \frac{2k-1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} B_{2k-2}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \cos(nx) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n(k) &= \frac{k}{(n\pi)^2} (B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_{2(k-1)}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \cos(nx) dx \\
&= \frac{k}{(n\pi)^2} (B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1) .
\end{aligned}$$

Si $k = 1$, on a vu que $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$. Donc $B_1(1) - B_1(0) = 1$.

De plus, $a_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = 0$. Donc : $a_n(1) = \frac{1}{(n\pi)^2}$.

Si $k \geq 2$, $B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) = 0$ et donc : $a_n(k) = -\frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1)$.

Par une récurrence immédiate, il vient $a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{(2n\pi)^{2(k-1)}} \frac{(2k)!}{2} a_n(1)$.

$$\text{Donc } a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} (n\pi)^{2k}} .$$

Remarque. Cette formule est aussi vraie pour $k = 1$.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) dx = 0$.

On remplace maintenant l'expression des coefficients dans le développement en série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \cos(nx) .$$

En évaluant en 0, il vient $b_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$. D'où :

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k} b_{2k}}{2(2k)!} .$$

Ainsi, on retrouve facilement les premières valeurs de la fonction zêta aux entiers pairs :

k	1	2	3	4	5
$\zeta(2k)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$

1.1.4 Deuxième preuve.

La preuve que nous venons de voir est la preuve "classique". C'est Euler qui a été le premier à trouver cette valeur, mais avec une démonstration différente : il est parti de deux développements différents de $\pi z \cot(\pi z)$.

$$\forall z \in D(0 ; 1) , \pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n} b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} .$$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , \pi z \cot(\pi z) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^2}{k^2 - z^2} .$$

Or, pour $z \in D(0 ; 1)$, on a :

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z^2}{k^2} \right)^n = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(2n) z^{2n} , \text{ par Fubini.}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient donc :

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} b_{2n}}{2(2n)!} .$$

1.2 Calculs de sommes.

Fonction zêta alternée de Riemann.

Soit $s > 0$. On se propose de calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

On introduit la fonction zêta alternée de Riemann définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}_*^+ , F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} .$$

On remarque que F est bien définie sur \mathbb{R}_*^+ par le critère spécial des séries alternées.

On sépare maintenant les termes pairs et les termes impairs de F pour $s > 1$:

$$F(s) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = -\frac{1}{2^s} \zeta(s) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} .$$

De même, on a $\zeta(s) = \frac{1}{2^s} \zeta(s) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$.

Il vient donc $F(s) = -\frac{1}{2^s} \zeta(s) - \frac{1}{2^s} \zeta(s) + \zeta(s)$.

D'où : $\forall s > 1$, $F(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}} \right) \zeta(s)$.

Par exemple, on a donc : $F(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \zeta(2) = \frac{\pi^2}{12}$.

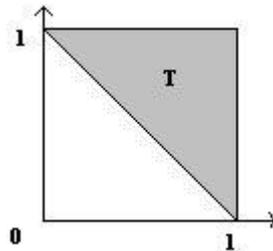
Calcul de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Euler s'est posé la question de la valeur de cette série, il la relie d'abord à $\zeta(2)$ en séparant les termes pairs et impairs. Il obtient alors $S = \frac{3}{4}\zeta(2)$. Le problème devient alors équivalent à retrouver la valeur de $\zeta(2)$.

Avec ce que nous avons fait dans la sous partie précédente, on peut d'ors et déjà affirmer que $S = \frac{\pi^2}{8}$. Nous allons approcher cette valeur par la méthode qu'Euler avait utilisée en donnant les 6 premières décimales de $\zeta(2)$.

On définit le triangle $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1\}$.

FIGURE 1 -



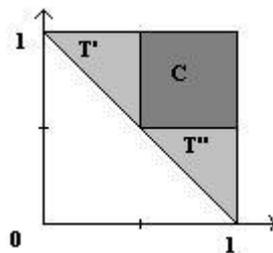
On note $I = \iint_T \frac{dx dy}{xy}$, de sorte que $I = \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_{1-y}^1 \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{-\ln(1-y)}{y} dy$.

En développant $-\ln(1-y)$ en série entière et intervertissant les signes \int et \sum par le théorème de Beppo Levi, on obtient :

$$I = \sum_{n \geq 1} \int_0^1 \frac{y^n}{n} \cdot \frac{dy}{y} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_0^1 y^{n-1} dy = \zeta(2).$$

On décompose maintenant T en un carré et deux triangles de la façon suivante :

FIGURE 2 -



Par symétrie, les deux triangles ont un rôle similaire, que l'on peut évaluer par :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln(1-y)}{y} dy = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n n^2} .$$

Le carré contribue pour $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dy}{y} = (\ln(2))^2$. D'où :

$$I = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} + (\ln(2))^2 .$$

En tronquant la série à $\sum_{n=1}^{14} \frac{1}{2^n n^2}$, et en utilisant la valeur approchée de $\ln(2)$ dont Euler connaissait les 25 premières décimales¹, il a obtenu :

$$\zeta(2) \simeq 1,644934 \simeq \frac{\pi^2}{6} .$$

Remarque. Il existe une démonstration directe de la valeur exacte de S par une intégrale similaire. On pose :

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1 - x^2 y^2} .$$

On a successivement :

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n \geq 0} (xy)^{2n} = \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 x^{2n} dx \right) \left(\int_0^1 y^{2n} dy \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = S .$$

D'un autre côté, on effectue le changement de variable $x = \frac{\sin u}{\cos v}$, $y = \frac{\sin v}{\cos u}$ qui transforme :

- $\frac{dx dy}{1 - x^2 y^2}$ en $dudv$,
- le domaine $\{(x, y) | (x, y) \in [0, 1]^2\}$ en $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | (u, v) \in [0; \frac{\pi}{2}]^2, u+v \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Il vient alors :

$$S = J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-u} 1 \cdot dudv = \frac{\pi^2}{8} .$$

1. $\ln(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série convergeant très lentement ; il n'est donc pas réaliste de l'utiliser pour obtenir une valeur approchée de $\ln(2)$.

Néanmoins, on a : $\ln(2) = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{4^n n} + \frac{1}{3^n n} \right)$. Cela permet d'évaluer

$\ln(2)$ numériquement à haute précision en tronquant la série, car la convergence est alors géométrique. En ne calculant que les 49 premiers termes, on obtient alors $\ln(2)$ avec 25 décimales correctes.

1.3 Interprétation et extension.

En 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré la transcendance de π . On en déduit alors que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2k)$ est transcendant.

Si l'étude de $\zeta(2k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ se fait assez facilement, on ne sait encore que très peu de choses sur la nature des $\zeta(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}^*$. En effet, tout le monde pense qu'ils sont irrationnels et même transcendants, mais aucune preuve (ou presque...) n'existe! En effet, Roger Apéry fut le premier à montrer l'irrationalité de $\zeta(3)$ en 1977.

L'avancée majeure de la dernière décennie est due à Tanguy Rivoal qui prouva en 2000 qu'une infinité des $\zeta(2k+1)$ sont irrationnels. Depuis, aucune avancée significative sur des questions d'irrationalité n'a eu lieu.

De nombreuses questions autour de ce sujet sont toujours ouvertes et proviennent de la conjecture suivante :

Conjecture 1. $\zeta(2), \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(2k+1) \dots$ sont algébriquement indépendants.

Le but de ce mémoire est de d'introduire des nouveaux nombres qui pourraient permettre d'en savoir plus sur les $\zeta(2k+1)$, d'un point de vue arithmétique et d'étudier cette conjecture. Il s'agit des multizêtas.

En effet, de nombreuses raisons laissent penser aujourd'hui que l'étude des relations algébriques entre ces nombres pourrait permettre d'obtenir de nouveaux résultats arithmétiques sur les valeurs de $\zeta(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}^*$. C'est pourquoi l'étude de ces nombres subit un regain d'intérêt de la part des mathématiciens.

2 Définition et convergence des multizêtas.

Définition. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{s} = (s_1; \dots; s_r)$ un r -uplet de réels vérifiant $\begin{cases} \forall i \in \{2; \dots; r\}, s_i \geq 1. \\ s_1 > 1. \end{cases}$ A une telle séquence, on associe le *multizêta* :

$$\mathcal{Z}e^{\underline{s}} = \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r} = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}.$$

Remarque. On retrouve bien la fonction Zêta de Riemann lorsque $r = 1$.

Théorème 1. La série définissant les multizêtas converge² si et seulement si $s_1 > 1$.

Démonstration. 1. On écrit $\mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r} = \sum_{n_1=r}^{\infty} \sum_{n_2=r-1}^{n_1-1} \dots \sum_{n_r=1}^{n_{r-1}-1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}$.

2. La démonstration de la convergence de la série reste vraie pour $(s_1; \dots; s_r) \in \mathbb{C}^r$ vérifiant $\Re(s_1) > 1$ en utilisant le fait que $\left| \frac{1}{n_i^{s_i}} \right| = \frac{1}{n_i^{\Re(s_i)}}$.

La divergence de la série pour $\Re(s_1) = 1$ ne sera pas ici étudiée.

Soit $i \in \{2; \dots; r\}$. On remarque que $1 \leq r + 1 - i \leq n_{i-1} - 1 \leq n_1$. D'où :

$$\sum_{n_i=r+1-i}^{n_i-1} \frac{1}{n_i^{s_i}} \leq \sum_{n_i=1}^{n_1} \frac{1}{n_i^{s_i}} \leq \sum_{n_i=1}^{n_1} \frac{1}{n_i}, \text{ car } s_i \geq 1.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur les réels positifs, on effectue une comparaison série-intégrale. On a alors :

$$\sum_{n_i=1}^{n_1} \frac{1}{n_i} = 1 + \sum_{n_i=2}^{n_1} \frac{1}{n_i} \leq 1 + \int_1^{n_1} \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n_1).$$

Finalement, on obtient une majoration des $r - 1$ sommes intérieures par $1 + \ln(n_1)$. Donc :

$$\mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r} \leq \sum_{n_1=r}^{\infty} \frac{(1 + \ln(n_1))^{r-1}}{n_1^{s_1}}.$$

Or $\sum_{n_1=r}^{\infty} \frac{(1 + \ln(n_1))^{r-1}}{n_1^{s_1}} < +\infty$ si et seulement si $s_1 > 1$ par le critère de Bertrand.

Donc, si $s_1 \geq 2$, on a $\mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r} < +\infty$.

2. Supposons maintenant $s_1 = 1$. Montrons que $\mathcal{Z}e^{1, s_2, \dots, s_r}$ diverge.

$$\text{On a : } \mathcal{Z}e^{1, s_2, \dots, s_r} = \sum_{n_1=r}^{\infty} \left(\sum_{n_2=r-1}^{n_1-1} \dots \sum_{n_r=1}^{n_r-1} \frac{1}{n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} \right) \frac{1}{n_1}.$$

On minore les séries positives intermédiaires par leur premier terme. Il vient alors :

$$\mathcal{Z}e^{1, s_2, \dots, s_r} \geq \sum_{n_1=r}^{\infty} \frac{1}{(r-1)^{s_2} \dots 2^{s_{r-1}} 1^{s_r}} \frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{(r-1)^{s_2} \dots 2^{s_{r-1}} 1^{s_r}} \sum_{n_1=r}^{\infty} \frac{1}{n_1}.$$

Donc $\mathcal{Z}e^{1, s_2, \dots, s_r}$ diverge. \square

A partir de maintenant, on se restreindra uniquement au cas des entiers naturels, on suppose donc que pour tout $i \in \{1; \dots; r\}, s_i \in \mathbb{N}^*$. On désigne par S^* l'ensemble de ces séquences et on notera S_{cv}^* l'ensemble des séquences \underline{s} vérifiant $s_1 \geq 2$ et pour tout $i \in \{2; \dots; r\}, s_i \geq 1$.

3 Les tables de multiplications entre multizêtas.

Le but de ce mémoire est de dégager certaines relations entre multizêtas. Dans cette section, nous allons présenter trois familles de relations entre multizêtas qui semblent produire toutes les relations entre multizêtas. Nous allons voir qu'il est possible d'exprimer le produit de deux multizêtas comme une combinaison linéaire de multizêtas. Ce qui est remarquable, c'est que nous allons mettre en évidence deux tables de multiplications différentes permettant d'effectuer un tel produit de multizêtas.

3.1 Quelques définitions sur...

3.1.1 ... les polynômes non commutatifs.

On considère un alphabet $X = \{x_0; x_1\}$. On définit par X^* l'ensemble des mots formés à partir de X , c'est-à-dire des suites finies de x_0 et de x_1 écrits les uns à cotés des autres. On écrira plus simplement a^n le mot constitué de la lettre a répété n fois. On notera e le mot vide et $\mathbb{Q}\langle X \rangle$ désignera l'ensemble des polynômes non commutatifs en x_0 et x_1 à coefficients dans \mathbb{Q} , c'est-à-dire des \mathbb{Q} -combinaisons linéaires de mots formés à partir de X .

A tout $s \in \mathbb{N}^*$, on associe le mot $y_s = x_0^{s-1}x_1$, ce qui nous permet de considérer l'alphabet $Y = \{(y_i)_{i \geq 1}\}$.

A toute séquence $\underline{s} = (s_1; \dots; s_r) \in S^*$, on associe le mot $y_{\underline{s}} = y_{s_1} \dots y_{s_r}$ de l'alphabet Y .

Définition. La *profondeur* d'un mot $y_{\underline{s}}$, $\underline{s} = (s_1; \dots; s_r) \in S^*$, est le nombre d'apparition de la lettre x_1 dans ce mot. Ainsi, la profondeur du mot $y_{\underline{s}}$ est r .

Définition. On appelle *poids* du mot $y_{\underline{s}}$, $\underline{s} \in S^*$, le nombre $\|\underline{s}\| = s_1 + \dots + s_r$.

Remarque. Pour tout $w \in X^*x_1$, c'est-à-dire un mot w se terminant par x_1 , on peut lui associer une unique séquence $\underline{s} \in S^*$ telle que $w = y_{\underline{s}}$. Réciproquement, tout r -uplet est associé à un unique mot $y_{\underline{s}} = y_{s_1} \dots y_{s_r}$. Ainsi, X^*x_1 est en bijection avec S^* .

Définitions. • On appelle *mot convergent* tout mot $w \in x_0X^*x_1$, c'est-à-dire un mot commençant par x_0 et se terminant par x_1 . On remarquera également que S_{cv}^* est en bijection avec $x_0X^*x_1$.

• On appelle *polynôme non commutatif convergent* l'ensemble $\mathbb{Q}_{cv}\langle X \rangle$ constitué des \mathbb{Q} -combinaisons linéaires de mots convergents.

Par exemple, $x_0x_1^2$ est un mot (convergent) tandis que $x_0x_1^2 + 3x_0^2x_1$ est un polynôme non commutatif.

Pour tout $w \in x_0X^*x_1$, on peut donc définir sans ambiguïté l'application :

$$\zeta : \begin{array}{l} x_0X^*x_1 \longrightarrow \mathbb{C} \\ w = y_{\underline{s}} \longmapsto \mathcal{Z}e^{\underline{s}} \end{array}, \text{ et étendu par linéarité à } \mathbb{Q}_{cv}\langle X \rangle.$$

Remarque. L'utilisation des polynômes non commutatifs nous sera utile, mais ne sera qu'un outil. En effet, nous allons définir les mêmes notions sur les séquences à la section 3.1.3.

3.1.2 ... le produit de mélange et de mélange contractant.

On introduit le produit de mélange pour l'alphabet X défini récursivement par :

$$\begin{cases} e \sqcup w = w \sqcup e = w, \\ (x_j u) \sqcup (x_k v) = x_j(u \sqcup (x_k v)) + x_k((x_j u) \sqcup v), \end{cases}$$

où $w \in (X^*)$, $(u; v) \in (X^*)^2$, $(x_j; x_k) \in X^2$.

De plus, on définit par $Sha(u; v)$ l'ensemble des mots apparaissant dans $u \sqcup v$.

On introduit maintenant le produit de mélange contractant noté $*$. Cette loi est associative et commutative sur l'ensemble X^*x_1 et est définie récursivement par :

$$\begin{cases} w * e = e * w = w , \\ (y_s w) * (y_t w') = y_s(w * y_t w') + y_t(y_s w * w') + y_{s+t}(w * w') , \end{cases}$$

où $(w; w') \in (X^*x_1)^2$ et $(s; t) \in \mathbb{N}^{*2}$.

On notera $She(u; v)$ l'ensemble des mots apparaissant dans $u * v$.

3.1.3 ... les séquences.

On définit l'opération linéaire de concaténation à droite, notée \cdot , définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \emptyset \cdot n = n , \\ (s_1; \dots; s_r) \cdot n = (s_1; \dots; s_r; n) , \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et $(s_1; \dots; s_r) = \underline{s} \in S^*$.

On peut donc définir récursivement le mélange de deux séquences de la façon suivante :

$$\begin{cases} Sha(\underline{s}; \emptyset) = Sha(\emptyset; \underline{s}) = \{\underline{s}\} , \\ Sha(\underline{s}^1 \cdot s_1; \underline{s}^2 \cdot s_2) = \left(Sha(\underline{s}^1; \underline{s}^2 \cdot s_2) \cdot s_1 \right) \sqcup \left(Sha(\underline{s}^1 \cdot s_1, \underline{s}^2) \cdot s_2 \right) , \end{cases}$$

où $(\underline{s}; \underline{s}^1; \underline{s}^2) \in (S^*)^3$, $(s_1; s_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et \sqcup désigne l'union disjointe.

On procède de même pour le produit de mélange contractant :

$$\begin{cases} She(\underline{s}; \emptyset) = She(\emptyset; \underline{s}) = \{\underline{s}\} , \\ She(\underline{s}^1 \cdot s_1; \underline{s}^2 \cdot s_2) = \left(She(\underline{s}^1; \underline{s}^2 \cdot s_2) \cdot s_1 \right) \sqcup \left(She(\underline{s}^1; \underline{s}^2) \cdot (s_1 + s_2) \right) \\ \qquad \qquad \qquad \sqcup \left(She(\underline{s}^1 \cdot s_1, \underline{s}^2) \cdot s_2 \right) , \end{cases}$$

où $(\underline{s}; \underline{s}^1; \underline{s}^2) \in (S^*)^3$, $(s_1; s_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et \sqcup désigne l'union disjointe.

Enfin, on rappelle que pour toute séquence $\underline{s} = (s_1; \dots; s_r)$, on désignera par $\underline{s}^{\geq 2}$ (resp. $\underline{s}^{\leq r-1}$) la séquence $(s_2; \dots; s_r)$ (resp. $(s_1; \dots; s_{r-1})$).

3.2 Une table de multiplication liée aux séries.

Voici la première table de multiplication vérifiée par les multizêtas.

Théorème 2. Soit $(\underline{u}; \underline{v}) \in (S_{cv}^*)^2$. Alors :

$$\mathcal{Z}e^{\underline{u}}\mathcal{Z}e^{\underline{v}} = \sum_{\underline{w} \in \text{She}(\underline{u}; \underline{v})} \mathcal{Z}e^{\underline{w}}. \quad (1)$$

Remarque. Cette table de multiplication peut s'énoncer de manière équivalente par :

$$\forall (\underline{u}; \underline{v}) \in S_{cv}^*, \zeta(y_{\underline{u}})\zeta(y_{\underline{v}}) = \zeta(y_{\underline{u}} * y_{\underline{v}}).$$

On donnera dans cette partie deux démonstrations de la première table de multiplication, toutes deux basées sur les mêmes idées, mais mettant en oeuvre des outils différents : la première repose sur une écriture en terme de séquence tandis que la seconde utilisera la notation syntaxique (c'est-à-dire utilisera les polynômes non commutatifs).

3.2.1 Première démonstration : version somme.

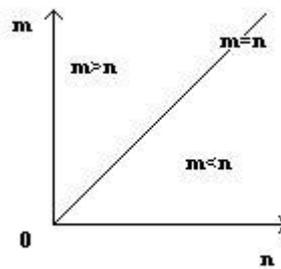
Démonstration. On raisonne par récurrence sur $l(\underline{u}) + l(\underline{v}) = n$.

Si l'un des mots est le mot vide, la relation est immédiate. On suppose désormais que les mots sont différents du mot vide e .

$n = 2$:

On a alors $l(\underline{u}) = l(\underline{v}) = 1$. Donc $u = y_s$ et $v = y_{s'}$ avec $s \geq 2$ et $s' \geq 2$.

FIGURE 3 –



En décomposant \mathbb{N}^2 en trois domaines, une droite et deux triangles (cf. Figure 3), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}e^s\mathcal{Z}e^{s'} &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^{s'}} = \sum_{m > n > 1} \frac{1}{m^{s'}n^s} + \sum_{n > m > 1} \frac{1}{n^sm^{s'}} + \sum_{n=m \geq 1} \frac{1}{n^{s+s'}} \\ &= \mathcal{Z}e^{s',s} + \mathcal{Z}e^{s,s'} + \mathcal{Z}e^{s+s'}. \end{aligned}$$

Or $She(s; s') = \{(s, s'); (s', s); (s + s')\}$. Donc :

$$\mathcal{Z}e^s \mathcal{Z}e^{s'} = \sum_{w \in She(s; s')} \mathcal{Z}e^w .$$

$n \rightarrow n + 1$:

Supposons la propriété vraie pour tout couple de séquences $(\underline{u}; \underline{v}) \in (S_{cv}^*)^2$ tel que $l(\underline{u}) + l(\underline{v}) \leq n$. Montrons-la pour un couple $(\underline{u}; \underline{v}) \in (S_{cv}^*)^2$ vérifiant $l(\underline{u}) + l(\underline{v}) = n + 1$.

On suppose $l(\underline{u}) = r$ et $l(\underline{v}) = s$ avec $r + s = n + 1$.

Pour des raisons pratiques, on pose $\mathcal{Z}e_N^{s_1, \dots, s_m} = \sum_{N < n_m < \dots < n_1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_m^{s_m}}$ pour $\underline{s} \in S_{cv}^*$ et $N \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\mathcal{Z}e^{\underline{s}} = \sum_{n_m \geq 1} \frac{1}{n_m^{s_m}} \mathcal{Z}e_{n_m}^{\underline{s}^{\leq m-1}}$.

En reprenant la même technique que celle mise en oeuvre pour $n = 2$, ce qui justifie la présence de cette étape a priori inutile dans la récursion, on a successivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}e^{\underline{u}} \mathcal{Z}e^{\underline{v}} &= \left(\sum_{p > 0} \frac{1}{p^{u_r}} \mathcal{Z}e_p^{\underline{u}^{\leq r-1}} \right) \left(\sum_{q > 0} \frac{1}{q^{v_s}} \mathcal{Z}e_q^{\underline{v}^{\leq s-1}} \right) \\ &= \sum_{p > q > 0} \frac{1}{p^{u_r} q^{v_s}} \mathcal{Z}e_p^{\underline{u}^{\leq r-1}} \mathcal{Z}e_q^{\underline{v}^{\leq s-1}} + \sum_{p = q > 0} \frac{1}{p^{u_r} q^{v_s}} \mathcal{Z}e_p^{\underline{u}^{\leq r-1}} \mathcal{Z}e_q^{\underline{v}^{\leq s-1}} \\ &\quad + \sum_{q > p > 0} \frac{1}{p^{u_r} q^{v_s}} \mathcal{Z}e_p^{\underline{u}^{\leq r-1}} \mathcal{Z}e_q^{\underline{v}^{\leq s-1}} \\ &= \sum_{q > 0} \left(\left(\sum_{p > q} \frac{1}{p^{u_r}} \mathcal{Z}e_p^{\underline{u}^{\leq r-1}} \right) \frac{1}{q^{v_s}} \mathcal{Z}e_q^{\underline{v}^{\leq s-1}} \right) + \sum_{n > 0} \frac{1}{n^{u_r + v_s}} \mathcal{Z}e_n^{\underline{u}^{\leq r-1}} \mathcal{Z}e_n^{\underline{v}^{\leq s-1}} \\ &\quad + \sum_{p > 0} \left(\left(\sum_{q > p} \frac{1}{q^{v_s}} \mathcal{Z}e_q^{\underline{v}^{\leq s-1}} \right) \frac{1}{p^{u_r}} \mathcal{Z}e_p^{\underline{u}^{\leq r-1}} \right) \\ &= \sum_{q > 0} \frac{1}{q^{v_s}} \mathcal{Z}e_q^{\underline{v}^{\leq s-1}} \mathcal{Z}e_q^{\underline{u}} + \sum_{n > 0} \frac{1}{n^{u_r + v_s}} \mathcal{Z}e_n^{\underline{u}^{\leq r-1}} \mathcal{Z}e_n^{\underline{v}^{\leq s-1}} \\ &\quad + \sum_{p > 0} \frac{1}{p^{u_r}} \mathcal{Z}e_p^{\underline{u}^{\leq r-1}} \mathcal{Z}e_p^{\underline{v}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}e^{\underline{u}}\mathcal{Z}e^{\underline{v}} &= \sum_{q>0} \left(\sum_{\underline{w} \in She(\underline{u}; \underline{v}^{\leq s-1})} \frac{1}{q^{v_s}} \mathcal{Z}e^{\frac{w}{q}} \right) + \sum_{n>0} \left(\sum_{\underline{w} \in She(\underline{u}^{\leq r-1}; \underline{v}^{\leq s-1})} \frac{1}{n^{u_r+v_s}} \mathcal{Z}e^{\frac{w}{n}} \right) \\
&\quad + \sum_{p>0} \left(\sum_{\underline{w} \in She(\underline{u}^{\leq r-1}; \underline{v})} \frac{1}{p^{u_r}} \mathcal{Z}e^{\frac{w}{p}} \right), \text{ d'après hypothèse de récurrence.} \\
&= \sum_{\underline{w} \in She(\underline{u}; \underline{v}^{\leq s-1})} \left(\sum_{q>0} \frac{1}{q^{v_s}} \mathcal{Z}e^{\frac{w}{q}} \right) + \sum_{\underline{w} \in She(\underline{u}^{\leq r-1}; \underline{v}^{\leq s-1})} \left(\sum_{n>0} \frac{1}{n^{u_r+v_s}} \mathcal{Z}e^{\frac{w}{n}} \right) \\
&\quad + \sum_{\underline{w} \in She(\underline{u}^{\leq r-1}; \underline{v})} \left(\sum_{p>0} \frac{1}{p^{u_r}} \mathcal{Z}e^{\frac{w}{p}} \right), \text{ car : } \forall (\underline{s}, \underline{s}') \in (S_{cv}^*)^2, \#She(\underline{s}; \underline{s}') < +\infty. \\
&= \sum_{\underline{w} \in She(\underline{u}; \underline{v}^{\leq s-1}) \cdot v_s} \mathcal{Z}e^w + \sum_{\underline{w} \in She(\underline{u}^{\leq r-1}; \underline{v}^{\leq s-1}) \cdot (u_r+v_s)} \mathcal{Z}e^w \\
&\quad + \sum_{\underline{w} \in She(\underline{u}^{\leq r-1}; \underline{v}) \cdot u_r} \mathcal{Z}e^w \\
&= \sum_{\underline{w} \in She(\underline{u}; \underline{v})} \mathcal{Z}e^w, \text{ par définition récursive de l'ensemble } She(\underline{u}; \underline{v}).
\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

Le principe de récurrence permet donc d'affirmer que :

$$\mathcal{Z}e^{\underline{u}}\mathcal{Z}e^{\underline{v}} = \sum_{\underline{w} \in She(\underline{u}; \underline{v})} \mathcal{Z}e^w.$$

□

3.2.2 Deuxième démonstration : version fonctionnelle.

Définition. On définit les *multizêtas de Hurwitz* $\mathcal{H}e$ par :

$$\forall \underline{s} \in S^*, \forall t \in \mathbb{R}^+, \mathcal{H}e^{\underline{s}}(t) = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{1}{(t+n_1)^{s_1} \dots (t+n_{r-1})^{s_{r-1}} (t+n_r)^{s_r}}.$$

Remarque. On vérifie que la convergence des multizêtas de Hurwitz est identique à celle des multizêtas "usuels" et que $\mathcal{H}e^{\underline{s}}(0) = \mathcal{Z}e^{\underline{s}}$.

L'idée de la seconde démonstration est de suivre le même raisonnement que la première, mais à l'aide des polynômes non commutatifs.

On considère désormais l'opérateur de différence D défini pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Df(t) = f(t-1) - f(t).$$

On vérifie que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour toutes $(f; f_1; f_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{C})^3$:

$$\begin{cases} Df_1 f_2 = Df_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot Df_2 + Df_1 \cdot Df_2 . \\ D(\lambda f) = \lambda Df . \end{cases}$$

On introduit également l'opérateur I , qui s'apparente à un opérateur d'intégration défini pour toute fonction $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Ig(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g(t+n) \text{ si } Ig(t) < +\infty .$$

Remarques. • On vérifie aisément que pour tout couple de fonctions $(f_1; f_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{C})^2$ vérifiant $If_1(t) < +\infty$ et $If_2(t) < +\infty$, on a :

$$I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2) .$$

• De plus, on a :

$$DI(g)(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g(t+n-1) - \sum_{n=1}^{+\infty} g(t+n) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(t+n) - \sum_{n=1}^{+\infty} g(t+n) = g(t) .$$

• Si $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ est telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$ existe, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, IDg(t) = \sum_{n \geq 1} (g(t-1+n) - g(t+n)) = g(t) - \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) .$$

Autrement dit, D et I sont "presque" des opérateurs inverses.

Lemme 1. $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall \underline{s} = (s_1, \dots, s_r) \in S_{cv}^*$, $\mathcal{H}e^{\underline{s}}(t) = I\left(\frac{1}{t^{s_r}} \mathcal{H}e^{s_1, \dots, s_{r-1}}(t)\right)$.

Démonstration. Par définition, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}e^{\underline{s}}(t) &= \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{1}{(t+n_1)^{s_1} \dots (t+n_{r-1})^{s_{r-1}} (t+n_r)^{s_r}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(t+n)^{s_r}} \sum_{1 \leq n_{r-1} < \dots < n_1} \frac{1}{(t+n_1+n)^{s_1} \dots (t+n_{r-1}+n)^{s_{r-1}}} \right) \\ &= I \left(\frac{1}{t^{s_r}} \sum_{1 \leq n_{r-1} < \dots < n_1} \frac{1}{(t+n_1)^{s_1} \dots (t+n_{r-1})^{s_{r-1}}} \right) \\ &= I \left(\frac{1}{t^{s_r}} \mathcal{H}e^{s_1, \dots, s_{r-1}}(t) \right) . \end{aligned}$$

□

On pourra remarquer ici l'analogie forte de ce résultat avec la formule

$$\mathcal{Z}e^{\underline{s}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{s_r}} \mathcal{Z}e_n^{s_1, \dots, s_{r-1}} !!!$$

De façon identique à ζ , on définit l'application $h : \begin{array}{ll} x_0 X^* x_1 & \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}) \\ w = y_{\underline{s}} & \longmapsto \mathcal{H}e^{\underline{s}} \end{array}$

que l'on prolonge par linéarité à $\mathbb{Q}_{cv}\langle X \rangle$.

Corollaire 1. *Le lemme précédent nous donne alors :*

$$\forall u \in x_0 X^* x_1, \forall j \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0, Dh(uy_j)(t) = DI\left(\frac{1}{t^j} h(u)(t)\right) = \frac{1}{t^j} h(u)(t) .$$

Lemme 2. $\forall \underline{s} \in S_{cv}^*, \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{H}e^{\underline{s}}(t) = 0 .$

Démonstration. En reprenant les inégalités montrant la convergence de $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}$ lorsque $\underline{s} \in S_{cv}^*$, mais en remplaçant n_i par $n_i + t$, on trouve :

$$\forall t \geq 0, 0 \leq \mathcal{H}e^{\underline{s}}(t) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{(1 + \ln(n + t))^r}{(n + t)^{s_1}} \leq \sum_{n \geq E(t)} \frac{(1 + \ln(n + 1))^r}{n^{s_1}},$$

où E désigne la fonction partie entière.

Puisque $s_1 > 1$, on observe que le terme de droite de l'inégalité est le reste d'une série convergente par le critère de Bertrand. Donc, ce terme tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Par encadrement de $\mathcal{H}e$, on obtient alors le résultat annoncé. □

On peut donc ainsi formuler une nouvelle version du théorème 2 :

Théorème 2 bis. *L'application h est un homomorphisme de $(x_0 X^* x_1, *)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $(w_1; w_2) \in x_0 X^* x_1$.
Il suffit de montrer que $h(w_1 * w_2) = h(w_1) \cdot h(w_2)$.

On raisonne par récurrence sur $l(w_1) + l(w_2)$.

Si $l(w_1) = 0$, alors $w_1 * w_2 = w_2$ et $h(w_1 * w_2) = h(w_2)$.
 $h(e) \cdot h(w_2) = 1 \cdot h(w_2) = h(w_1 * w_2)$.
La relation est aussi vérifiée si $l(w_2) = 0$.

Supposons maintenant $l(w_1) > 0$ et $l(w_2) > 0$, on écrit alors $w_1 = uy_j$ et $w_2 = vy_k$.

$$\begin{aligned} D(h(w_1) \cdot h(w_2)) &= D(h(uy_j) \cdot h(vy_k)) \\ &= Dh(uy_j) \cdot h(vy_k) + h(uy_j) \cdot Dh(vy_k) + Dh(uy_j) \cdot Dh(vy_k) \\ &= \frac{1}{t^j} h(u) \cdot h(vy_k) + \frac{1}{t^k} h(uy_j) \cdot h(v) \\ &\quad + \frac{1}{t^{j+k}} h(u) \cdot h(v), \text{ d'après le corollaire 1.} \tag{2} \\ &= \frac{1}{t^j} h(u * vy_k) + \frac{1}{t^k} h(uy_j * v) \\ &\quad + \frac{1}{t^{j+k}} h(u * v), \text{ par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(h(w_1) \cdot h(w_2)) &= D\left(h((u*vy_k)y_j) + h((uy_j*v)y_k) + h((u*v)y_{j+k})\right) \\
&= h\left((u*vy_k)y_j + (uy_j*v)y_k + (u*v)y_{j+k}\right) \\
&= Dh(uy_j*vy_k) \\
&= Dh(w_1*w_2) .
\end{aligned}$$

On applique maintenant l'opérateur I à gauche.
Donc, $\exists C \in \mathbb{C}$, $h(w_1) \cdot h(w_2) = h(w_1*w_2) + C$.
Par le lemme précédent, il vient $C = 0$.
D'où la conclusion par récurrence. \square

Ainsi, on retrouve bien que ζ est un homomorphisme de $x_0X^*x_1$ dans \mathbb{R} en évaluant en $t = 0$ les égalités fonctionnelles que nous venons d'obtenir, ce qui redémontre la première table de multiplication.

3.3 Une table de multiplication liée aux intégrales.

Voici la seconde table de multiplication vérifiée par les multizêtas.

Théorème 3. Soit $(\underline{u}; \underline{v}) \in S_{cv}^*$. Alors :

$$\mathcal{Z}e^{\underline{u}}\mathcal{Z}e^{\underline{v}} = \sum_{\underline{w} \in Sha(\underline{u}; \underline{v})} \mathcal{Z}e^{\underline{w}} . \quad (3)$$

Remarque. Cette table de multiplication peut s'énoncer de manière équivalente par :

$$\forall (\underline{u}; \underline{v}) \in S_{cv}^* , \zeta(y_{\underline{u}})\zeta(y_{\underline{v}}) = \zeta(y_{\underline{u} \sqcup \underline{v}}) .$$

De même, nous donnerons deux démonstrations différentes basées sur les mêmes idées.

3.3.1 Première démonstration : version intégrale.

On introduit la fonction $\mathcal{W}a$ définie sur $[0; 1]$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{W}a^{\alpha_1, \dots, \alpha_r}(x) = (-1)^l \int_{0 < t_r < \dots < t_1 < x} \frac{dt_1 \dots dt_r}{(\alpha_1 - t_1) \dots (\alpha_r - t_r)} \text{ si } x \in [0; 1] , \\ \mathcal{W}a^\emptyset(x) = 1 , \end{cases}$$

où \emptyset est la séquence vide, $(\alpha_i)_i$ une suite d'entiers positifs ou nuls et l le nombre de α_i vérifiant $\alpha_i = 0$.

Proposition 1. Pour toute séquence $\underline{s} = (s_1; \dots; s_r) \in S_{cv}^*$, on a :

$$\mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r} = \mathcal{W}a^{0^{[s_r-1]}; 1; 0^{[s_{r-1}-1]}; 1; \dots; 0^{[s_1-1]}; 1}(1) .$$

Démonstration. On traitera le cas d'une séquence à un élément. Le lecteur pourra vérifier que la méthode s'adapte sans difficulté pour tout r -uplet.

Soit donc $s \geq 2$, $x \in [0; 1]$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}a^{0^{[s-1]},1}(x) &= \int_{0 < t_s < \dots < t_1 < x} \frac{dt_1 \dots dt_s}{t_{s-1} \dots t_1 (1 - t_s)} \\
&= \int_{0 < t_s < \dots < t_1 < x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_s^n}{t_1 \dots t_{s-1}} dt_1 \dots dt_s, \text{ en développant } \frac{1}{1 - t_s} \text{ en série entière.} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{0 < t_s < \dots < t_1 < x} \frac{t_s^n}{t_1 \dots t_{s-1}} dt_1 \dots dt_s, \text{ par le théorème de Beppo Levi.} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{0 < t_{s-1} < \dots < t_1 < x} \left(\int_0^{t_{s-1}} t_s^n dt_s \right) \frac{dt_1 \dots dt_{s-1}}{t_1 \dots t_{s-1}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \int_{0 < t_{s-1} < \dots < t_1 < x} t_{s-1}^n \cdot \frac{dt_1 \dots dt_{s-1}}{t_1 \dots t_{s-2}} \\
&\vdots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{s-1}} \int_{0 < t_1 < x} t_1^n dt_1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^s}.
\end{aligned}$$

En faisant $x = 1$, on trouve $\mathcal{W}a^{0^{[s-1]},1}(1) = \mathcal{Z}e^s$. □

On démontre maintenant une propriété fondamentale :

Théorème 3 bis. Soit $x \in [0; 1]$. Pour toutes séquences $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ d'éléments de $\{0; 1\}$, on a :

$$\mathcal{W}a^{\underline{\alpha}}(x)\mathcal{W}a^{\underline{\beta}}(x) = \sum_{\underline{\gamma} \in \text{Sha}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} \mathcal{W}a^{\underline{\gamma}}(x).$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n = l(\underline{\alpha}) + l(\underline{\beta})$.

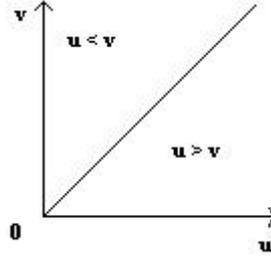
$n = 0$:

On a alors $l(\underline{\alpha}) = 0$ et $l(\underline{\beta}) = 0$. L'égalité est donc vérifiée par définition de $\mathcal{W}a^{\emptyset}$.

$n \rightarrow n + 1$:

Supposons la formule vraie pour $l(\underline{\alpha}) + l(\underline{\beta}) = n$. Montrons-la au rang $n + 1$. On considère donc que $l(\underline{\alpha}) + l(\underline{\beta}) = n + 1$. On a alors : En décomposant $[0; 1]^2$

FIGURE 4 -



en trois domaines, une droite et deux triangles (cf. Figure 4), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}a^{\underline{\alpha}}(x)\mathcal{W}a^{\underline{\beta}}(x) &= (-1)^{1-\alpha_1+1-\beta_1} \left(\int_0^x \frac{\mathcal{W}a^{\underline{\alpha}^{\geq 2}}(u)}{\alpha_1 - u} du \right) \left(\int_0^x \frac{\mathcal{W}a^{\underline{\beta}^{\geq 2}}(v)}{\beta_1 - v} dv \right) \\
 &= (-1)^{2-\alpha_1-\beta_1} \int_{0 < u < v < x} \frac{\mathcal{W}a^{\underline{\alpha}^{\geq 2}}(u)\mathcal{W}a^{\underline{\beta}^{\geq 2}}(v)}{(\alpha_1 - u)(\beta_1 - v)} dudv \\
 &\quad + (-1)^{2-\alpha_1-\beta_1} \int_{0 < v < u < x} \frac{\mathcal{W}a^{\underline{\alpha}^{\geq 2}}(u)\mathcal{W}a^{\underline{\beta}^{\geq 2}}(v)}{(\alpha_1 - u)(\beta_1 - v)} dudv \\
 &= (-1)^{2-\alpha_1-\beta_1} \int_0^x \frac{\left(\int_0^v \frac{\mathcal{W}a^{\underline{\alpha}^{\geq 2}}(u)}{\alpha_1 - u} du \right) \mathcal{W}a^{\underline{\beta}^{\geq 2}}(v)}{\beta_1 - v} dv \\
 &\quad + (-1)^{2-\alpha_1-\beta_1} \int_0^x \frac{\left(\int_0^u \frac{\mathcal{W}a^{\underline{\beta}^{\geq 2}}(v)}{\beta_1 - v} dv \right) \mathcal{W}a^{\underline{\alpha}^{\geq 2}}(u)}{\alpha_1 - u} du \\
 &= (-1)^{2-\alpha_1-\beta_1} \int_0^x \frac{\mathcal{W}a^{\underline{\alpha}}(v)\mathcal{W}a^{\underline{\beta}^{\geq 2}}(v)}{\beta_1 - v} dv \\
 &\quad + (-1)^{2-\alpha_1-\beta_1} \int_0^x \frac{\mathcal{W}a^{\underline{\beta}}(v)\mathcal{W}a^{\underline{\alpha}^{\geq 2}}(v)}{\alpha_1 - v} dv .
 \end{aligned}$$

Or $l(\underline{\alpha}) + l(\underline{\beta}^{\geq 2}) = n$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}a^{\underline{\alpha}}(x)\mathcal{W}a^{\underline{\beta}}(x) &= (-1)^{2-\alpha_1-\beta_1} \int_0^x \left(\sum_{\gamma \in Sha(\underline{\alpha}; \underline{\beta}^{\geq 2})} \frac{\mathcal{W}a^{\gamma}(v)}{\beta_1 - v} + \sum_{\gamma \in Sha(\underline{\alpha}^{\geq 2}; \underline{\beta})} \frac{\mathcal{W}a^{\gamma}(v)}{\alpha_1 - v} \right) dv \\
&= \sum_{\gamma \in Sha(\underline{\alpha}; \underline{\beta}^{\geq 2})} \mathcal{W}a^{\beta_1 \cdot \gamma}(x) + \sum_{\gamma \in Sha(\underline{\alpha}^{\geq 2}; \underline{\beta})} \mathcal{W}a^{\alpha_1 \cdot \gamma}(x) \\
&= \sum_{\gamma \in \beta_1 \cdot Sha(\underline{\alpha}; \underline{\beta}^{\geq 2})} \mathcal{W}a^{\gamma}(x) + \sum_{\gamma \in \alpha_1 \cdot Sha(\underline{\alpha}^{\geq 2}; \underline{\beta})} \mathcal{W}a^{\gamma}(x) \\
&= \sum_{\gamma \in Sha(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} \mathcal{W}a^{\gamma}(x) .
\end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$.

D'où la conclusion par récurrence. \square

On peut maintenant en déduire la table de multiplication liée aux intégrales :

Corollaire 2. *Pour tout $(\underline{s}; \underline{s}') \in (S_{cv}^*)^2$, on a la deuxième table de multiplication :*

$$\mathcal{Z}e^{\underline{s}} \mathcal{Z}e^{\underline{s}'} = \sum_{\gamma \in Sha(\underline{s}; \underline{s}')} \mathcal{Z}e^{\gamma} .$$

Démonstration. C'est une conséquence des deux derniers résultats appliqués en $x = 1$. \square

3.3.2 Deuxième démonstration : version syntaxique.

On se place sur l'ensemble X^*x_1 , c'est-à-dire l'ensemble des mots formés avec x_0 et x_1 se terminant par x_1 . A tout mot de X^*x_1 , on lui associe le r -uplet \underline{s} correspondant comme dans le paragraphe 3.1.1.

Définition. On introduit alors la *fonction polylogarithme* définie par :

$$\forall z \in D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}, \quad Li_{\underline{s}}(z) = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} .$$

On fait ici le lien avec la preuve de la proposition 1. En effet, on a prouvé : $\forall s \geq 2, \forall x \in [0; 1], \mathcal{W}a^{0^{[s-1]}; 1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^s}$. Cette formule se généralise sans peine en ... la fonction polylogarithme !

On introduit la fonction $li : \mathbb{Q}_{cv}\langle X \rangle \rightarrow \mathcal{H}(D(0; 1))$ définie par linéarité et : $\forall \underline{s} \in S_{cv}^*, li_{y_{\underline{s}}} = Li_{\underline{s}}$.

Par convention, on pose : $li_e = 1$. Ainsi, pour tout $w \in x_0X^*x_1$ tel que $w = y_{\underline{s}}$, on a : $li_{y_{\underline{s}}}(1) = \zeta(w)$.

Proposition 2. Soit $w \in X^*x_1$ un mot commençant par la lettre x_j (ie $w = x_ju$ tel que $u \in X^*x_1$). Alors :

$$\frac{d}{dz}li_w(z) = \frac{d}{dz}li_{x_ju}(z) = \omega_j(z)li_u(z) ,$$

où ω_j est la forme différentielle définie par :

$$\omega_j(z) = \omega_{x_j}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } x_j = x_0 . \\ \frac{1}{1-z} & \text{si } x_j = x_1 . \end{cases}$$

Démonstration. Soit $x_{\underline{s}}$ la séquence associée à w . On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}li_w(z) &= \frac{d}{dz}li_{\underline{s}}(z) = \frac{d}{dz} \left(\sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} \right) \\ &= \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{z^{n_1-1}}{n_1^{s_1-1} n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} , \text{ en dérivant terme à terme.} \end{aligned}$$

1^{er} cas : $s_1 \geq 2$, c'est-à-dire $x_j = x_0$:

$$\frac{d}{dz}li_{x_0u}(z) = \frac{1}{z} \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1-1} n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} = \frac{1}{z} li_{s_1-1, s_2, \dots, s_r}(z) = \frac{1}{z} li_u(z) .$$

2^{eme} cas : $s_1 = 1$, c'est-à-dire $x_j = x_1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}li_{x_1u}(z) &= \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{z^{n_1-1}}{n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_2} \frac{1}{n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}} \sum_{n_1=n_2+1}^{+\infty} z^{n_1-1} \\ &= \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_2} \frac{1}{n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} z^{n_2} \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{1}{1-z} \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_2} \frac{z^{n_2}}{n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} = \frac{1}{1-z} li_{s_2, \dots, s_r}(z) \\ &= \frac{1}{1-z} li_u(z) . \end{aligned}$$

D'où la conclusion suivant les cas. □

Remarque. Cette propriété n'est autre que la version différentielle de l'égalité

$$\int_0^v \frac{Wa^{\alpha_{\geq 2}}(u)}{\alpha_1 - u} du = Wa^{\alpha}(v) \text{ vu dans la démonstration du théorème 4 !}$$

Théorème 3 bis. L'application $w \mapsto li_w(z)$ est un homomorphisme de $(X^*; \sqcup)$ dans $\mathcal{C}(]0, 1[, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $(w_1, w_2) \in (X^*)^2$, il suffit de prouver la relation :

$$li_{w_1 \sqcup w_2}(z) = li_{w_1}(z)li_{w_2}(z) .$$

On raisonne par récurrence sur le nombre $n = \|w_1\| + \|w_2\|$:

$n = 0$:

Si $w_1 = e$ et $w_2 = e$, la relation devient $1 = 1 \times 1$ qui est vraie par définition de li_e .

$n \rightarrow n + 1$:

Supposons maintenant la relation vérifiée pour tout $(w_1, w_2) \in (X^*)^2$ vérifiant $n = \|w_1\| + \|w_2\|$.

Soit maintenant $w_1 = x_j u$ et $w_2 = x_k v$ tels que $\|w_1\| + \|w_2\| = n + 1$. Par le lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(li_{w_1}li_{w_2}) &= \frac{d}{dz}\left(li_{x_j u}li_{x_k v}\right) \\ &= \left(\frac{d}{dz}li_{x_j u}\right) \cdot li_{x_k v} + li_{x_j u} \cdot \left(\frac{d}{dz}li_{x_k v}\right) \\ &= \omega_j(z)li_u li_{x_k v} + \omega_k li_{x_j u} li_v \\ &= \omega_j li_{u \sqcup x_k v} + \omega_k li_{x_j u \sqcup v} , \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= \frac{d}{dz}\left(li_{x_j(u \sqcup x_k v)} + li_{x_k(x_j u \sqcup v)}\right) \\ &= \frac{d}{dz}li_{x_j u \sqcup x_k v} = \frac{d}{dz}li_{w_1 \sqcup w_2} . \end{aligned}$$

Donc : $\exists C \in \mathbb{R}$, $li_{w_1}li_{w_2} = li_{w_1 \sqcup w_2} + C$.

On fait alors $z \rightarrow 0$ pour obtenir $C = 0$.

D'où la conclusion par récurrence. □

On peut maintenant établir une nouvelle fois la seconde table de multiplication :

Corollaire 3. *L'application ζ est un homomorphisme de $(x_0 X^* x_1; \sqcup)$ dans \mathbb{R} . C'est-à-dire :*

$$\forall (w_1, w_2) \in (x_0 X^* x_1)^2, \zeta(w_1 \sqcup w_2) = \zeta(w_1)\zeta(w_2) .$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent appliqué en $z = 1$. □

3.4 Lien entre $\mathcal{Z}e$ et les deux tables de multiplications.

Dans cette partie, nous allons montrer que pour tout $w \in x_0 X^* x_1$, $\zeta(x_1 \sqcup w - x_1 * w) = 0$. Pour cela, nous allons avoir besoin du résultat suivant :

Proposition 3. *Pour toute séquence $\underline{s} = (s_1; \dots; s_r) \in S_{cv}^*$, on a :*

$$\sum_{k=1}^r \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_{k-1}, s_k+1, s_{k+1}, \dots, s_r} = \sum_{\substack{k=1 \\ s_k \geq 2}}^r \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_{k-1}, s_k-j, j+1, s_{k+1}, \dots, s_r} .$$

Démonstration. La démonstration étant très lourde, nous nous limiterons qu'aux multizêtas de longueur 2. Mais le lecteur courageux pourra vérifier que la méthode s'adapte pour toutes les longueurs et comparer à V. V. Zudilin.

Soit $k \in \{1; 2\}$. On prends ici $k = 1$ et on pourra adapter pour $k = 2$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 > n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1+1} n_2^{s_2}} + \sum_{n_1 > m > n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} m n_2^{s_2}} &= \sum_{n_1 \geq m > n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} m n_2^{s_2}} \\ &= \sum_{n_1 > n_2 \geq 1} \sum_{m=n_2+1}^{n_1} \frac{1}{m n_1^{s_1} n_2^{s_2}} . \end{aligned}$$

Plus généralement, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n_k > \dots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_k^{s_k+1} n_{k+1}^{s_{k+1}} \dots n_r^{s_r}} + \sum_{n_k > m > n_{k+1} > \dots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_k^{s_k} m n_{k+1}^{s_{k+1}}} \\ = \sum_{n_k > \dots > n_r \geq 1} \sum_{m=n_{k+1}+1}^{n_k} \frac{1}{m n_k^{s_k} \dots n_r^{s_r}} . \end{aligned}$$

$$\text{On obtient ainsi : } \mathcal{Z}e^{s_1+1, s_2} + \mathcal{Z}e^{s_1, 1, s_2} = \sum_{n_1 > n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} \sum_{m=n_2+1}^{n_1} \frac{1}{m} .$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}e^{s_1+1, s_2} + \mathcal{Z}e^{s_1, 1, s_2} &= \sum_{n_1 > n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} \sum_{m=1}^{n_1} \frac{1}{m} \\ &= \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \frac{1}{m_1^{s_2} (m_1 + m_2)^{s_1}} \sum_{m=1}^{m_1+m_2} \frac{1}{m} \\ &= \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_2} M_2^{s_1}} \sum_{m_{r+1} \geq 1} \left(\frac{1}{m_{r+1}} - \frac{1}{M_{r+1}} \right) , \end{aligned}$$

où $M_k = m_1 + \dots + m_k$.

On utilise ensuite le développement :

$$\forall (u; v) \in \mathbb{R}^2, \forall s \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{u(u+v)^s} = \frac{1}{v^s u} - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{v^{j+1} (u+v)^{s-j}} .$$

On pose ici $u = m_3$, $v = M_2$ et $s = s_1$. On remarquera que le membre de droite de l'équation est alors une progression géométrique.

$$\text{On obtient alors : } \frac{1}{M_2^{s_1}} \left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{M_3} \right) = \sum_{j=0}^{s_1-2} \frac{1}{M_2^{j+1} M_3^{s_1-k}} + \frac{1}{m_3 M_3^{s_1}}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z}e^{s_1+1,s_2} + \mathcal{Z}e^{s_1,1,s_2} + \mathcal{Z}e^{s_1,s_2+1} + \mathcal{Z}e^{s_1,s_2,1} \\ &= \sum_{j=0}^{s_1-2} \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_2} M_2^{j+1} M_3^{s_1-j}} + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_2} m_3 M_3^{s_1}} \\ &= \sum_{j=0}^{s_1-2} \mathcal{Z}e^{s_1-j, j+1, s_2} + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_2} m_2 M_3^{s_1}}. \end{aligned}$$

En utilisant le développement précédent avec $u = m_{k+1}$, $v = M_k = M_{k+1} - m_{k+1}$ et $s = s_{3-k}$, on en déduit que :

$$\frac{1}{M_1^2 m_3} = \sum_{j=0}^{s_2} \frac{1}{M_1^{j+1} M_3^{s_2-j}} + \frac{1}{m_2 M_2^{s_2}}.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_2} m_2 M_3^{s_1}} &= \sum_{j=0}^{s_2-1} \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 1} \frac{1}{M_1^{j+1} M_2^{s_2-j} M_3^{s_1}} + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 1} \frac{1}{m_2 M_2^{s_2} M_3^{s_1}} \\ &= \sum_{j=0}^{s_2-1} \mathcal{Z}e^{s_1, s_2-j, j+1, s_2} + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 1} \frac{1}{m_1 M_2^{s_2} M_3^{s_1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut établir la formule annoncée :

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z}e^{s_1+1,s_2} + \mathcal{Z}e^{s_1,1,s_2} + \mathcal{Z}e^{s_1,s_2+1} + \mathcal{Z}e^{s_1,s_2,1} \\ &= \sum_{j=0}^{s_1-2} \mathcal{Z}e^{s_1-j, j+1, s_2} + \sum_{j=0}^{s_2-1} \mathcal{Z}e^{s_1, s_2-j, j+1, s_2} \\ &+ \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 1} \frac{1}{m_1 M_2^{s_2} M_3^{s_1}} \\ &= \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{s_k-2} \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_{k-1}, s_k-j, j+1, s_{k+1}, \dots, s_2} + \mathcal{Z}e^{s_1, 1, s_2} + \mathcal{Z}e^{s_1, s_2, 1}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où la formule : } \sum_{k=1}^2 \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_{k-1}, s_k+1, s_{k+1}, \dots, s_2} = \sum_{\substack{k=1 \\ s_k \geq 2}}^2 \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_{k-1}, s_k-j, j+1, s_{k+1}, \dots, s_2}.$$

On vérifie ensuite que la démonstration s'adapte pour toutes les longueurs. \square

Nous allons donner une présentation syntaxique de cette proposition, de manière à ce qu'il soit plus simple de se rappeler de ce résultat. Pour cela, nous allons introduire les dérivations.

Définition. On appelle *dérivation* sur l'algèbre $\mathbb{Q}\langle X \rangle$, une application linéaire $\delta : \mathbb{Q}\langle X \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}\langle X \rangle$ vérifiant :

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{Q}\langle X \rangle)^2, \delta(uv) = \delta(u)v + u\delta(v) .$$

Introduisons maintenant les dérivations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta_{\sqcup} : X^* &\longrightarrow X^* & \text{et} & \delta_* : X^*x_1 &\longrightarrow X^*x_1 \\ w &\longmapsto x_1w - x_1 \sqcup w & & w &\longmapsto y_1w - y_1 * w \end{aligned}$$

Remarque. On vérifie aisément que δ_{\sqcup} et δ_* sont des dérivations et qu'elles vérifient :

$$\delta_{\sqcup}x_0 = -x_0x_1, \delta_{\sqcup}x_1 = -x_1^2, \delta_*x_0 = 0, \delta_*x_1 = -x_1^2 - x_0x_1 .$$

Définition. On définit l'anti-automorphisme τ sur $\mathbb{Q}\langle x_0, x_1 \rangle$ qui transpose x_0 et x_1 . Par exemple, $\tau(x_0^2x_1x_0x_1) = x_0x_1x_0x_1^2$. On remarque que τ est une involution qui préserve le poids.

Pour toute dérivation δ , on introduit sa dérivation duale $\bar{\delta}$ définie par : $\bar{\delta} = \tau\delta\tau$.

On introduit également la dérivation notée D vérifiant :

$$Dx_0 = 0 \text{ et } Dx_1 = x_0x_1 .$$

Ainsi, D vérifie : $\forall s \in \mathbb{N}^*, Dy_s = y_{s+1}$.

Corollaire 4. Pour tout $w \in x_0X^*x_1$, on a :

$$\zeta(Dw) = \zeta(\bar{D}w) .$$

Démonstration. Soit $w \in x_0X^*x_1$. Il existe alors $\underline{s} = (s_1; \dots; s_r) \in S_{cv}^*$ telle que $w = y_{\underline{s}} = y_{s_1} \dots y_{s_r}$. On a :

$$Dw = D(y_{s_1} \dots y_{s_r}) = \sum_{k=1}^r y_{s_1} \dots y_{s_{k-1}} y_{s_{k+1}} y_{s_{k+1}} \dots y_{s_r} .$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \bar{D}w &= \tau D \left(x_0 x_1^{s_r-1} x_0 x_1^{s_{r-1}-1} \dots x_0 x_1^{s_1-1} \right) \\ &= \tau \left(\sum_{\substack{k=1 \\ s_k \geq 2}}^r \sum_{j=0}^{s_k-2} x_0 x_1^{s_r-1} \dots x_0 x_1^{s_{k+1}-1} x_0 x_1^j x_0 x_1^{s_k-j-1} x_0 x_1^{s_{k-1}-1} \dots x_0 x_1^{s_1-1} \right) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ s_k \geq 2}}^r \sum_{j=0}^{s_k-2} x_0^{s_1-1} x_1 \dots x_0^{s_{k-1}-1} x_1 x_0^{s_k-j-1} x_1 x_0^j x_1 x_0^{s_{k+1}-1} x_1 \dots x_0^{s_r-1} x_0 . \end{aligned}$$

On applique alors ζ à l'égalité ci-dessus et par la proposition 3, il vient :

$$\zeta(Dw) = \zeta(\bar{D}w) .$$

□

On introduit la dérivation D qui agit sur les générateurs de l'alphabet X de la manière suivante :

$$Dx_0 = 0, \quad Dx_1 = x_0x_1, \quad \bar{D}x_0 = x_0x_1, \quad \bar{D}x_1 = 0.$$

Lemme 3. $D - \bar{D} = \delta_* - \delta_{\sqcup}$ sur $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$.

Démonstration. Soit $s > 1$.

$$\text{On calcule : } (\delta_* - \delta_{\sqcup})(y_s) = x_1 \sqcup y_s - x_1 * y_s = \sum_{k=2}^s y_k y_{s+1-k} - y_{s+1}.$$

En effet, on montre par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \quad y_n \sqcup y_1 = 2y_n y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i y_{n+1-i} = y_n y_1 + \sum_{i=1}^n y_i y_{n+1-i}.$$

$n = 1$

On a : $y_1 \sqcup y_1 = 2y_1 y_1$. D'où la propriété au rang 1.

$n \rightarrow n + 1$: Soit $n \geq 1$ tel que la propriété soit vraie au rang n . On a alors successivement :

$$\begin{aligned} y_{n+1} \sqcup y_1 &= x_0(y_n \sqcup y_1) + y_1 y_{n+1} \\ &= x_0(2y_n y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i y_{n+1-i}) + y_1 y_{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= 2y_{n+1} y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1} y_{n+1-i} + y_1 y_{n+1} \\ &= 2y_{n+1} y_1 + \sum_{i=2}^n y_i y_{n+2-i} + y_1 y_{n+1} \\ &= 2y_{n+1} y_1 + \sum_{i=1}^n y_i y_{n+2-i}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion d'après le principe de récurrence.

$$\text{On a donc bien : } (\delta_* - \delta_{\sqcup})(y_s) = \sum_{k=2}^s y_k y_{s+1-k} - y_{s+1}.$$

$$\text{D'autre part, } (\bar{D} - D)(y_s) = \sum_{j=0}^{s-2} y_{s-j} y_{j+1} - y_{s+1} = \sum_{k=1}^{s-1} y_{s+1-k} y_k - y_{s+1}.$$

On remarque alors que $\delta_* - \delta_{\sqcup} = \bar{D} - D$ sur les générateurs de l'alphabet Y (la relation est aussi vérifiée pour y_1). Donc $\delta_* - \delta_{\sqcup} = \bar{D} - D$ sur $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$. \square

Théorème 4. Pour tout $w \in x_0 X^* x_1$, on a $(x_1 \sqcup w - x_1 * w) \in x_0 X^* x_1$ et :

$$\zeta(x_1 \sqcup w - x_1 * w) = 0. \quad (4)$$

Démonstration. Soit $w \in x_0 X^* x_1 \subset \mathbb{Q}_{cv}\langle Y \rangle$. D'après la démonstration du corrolaire précédent, on a Dw et $\bar{D}w \in \mathbb{Q}_{cv}\langle Y \rangle$.

On peut donc appliquer la proposition précédente :

$$\zeta(x_1 \sqcup w - x_1 * w) = \zeta((\delta_* - \delta_{\sqcup})w) = \zeta((\bar{D} - D)w) = \zeta(\bar{D}w) - \zeta(Dw) = 0 .$$

□

3.5 Exemples de manipulation des tables.

Premier Exemple : une relation au poids 3.

Euler avait démontré que $\mathcal{Z}e^{2,1} = \mathcal{Z}e^3$. Nous allons la retrouver grâce aux tables de multiplications.

On choisit donc les mots $y_2 = x_0 x_1$ et $y_1 = x_1$. On calcule les produits de mélanges :

$$y_2 * y_1 = y_2 y_1 + y_1 y_2 + y_3 .$$

$$\begin{aligned} y_2 \sqcup y_1 &= (x_0 x_1) \sqcup x_1 = x_0(x_1 \sqcup x_1) + x_1(x_0 x_1 \sqcup e) \\ &= x_0(x_1(e \sqcup x_1) + x_1(x_1 \sqcup e)) + x_1 x_0 x_1 = 2x_0 x_1^2 + x_1 x_0 x_1 \\ &= 2y_2 y_1 + y_1 y_2 . \end{aligned}$$

Donc, il vient : $y_2 \sqcup y_1 - y_2 * y_1 = y_2 y_1 - y_3$.

Or par (3), $y_2 \sqcup y_1 - y_2 * y_1 \in \ker \zeta$. Donc $\zeta(y_2 y_1) - \zeta(y_3) = 0$.

Ainsi, on retrouve bien $\mathcal{Z}e^{2,1} = \mathcal{Z}e^3$.

Cela se traduit par la relation non triviale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ où H_n désigne la somme partielle au rang n de la série harmonique car :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Z}e^{2,1} = \sum_{1 \leq n_2 < n_1} \frac{1}{n_1^2 n_2} = \sum_{n_1=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n_2=1}^{n_1-1} \frac{1}{k} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{H_{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2} . \\ \mathcal{Z}e^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} . \end{array} \right.$$

Deuxième exemple : une relation au poids 4.

On choisit $y_2 = x_0 x_1$.

On obtient alors $y_2 * y_2 = 2y_2^2 + y_4$ et $y_2 \sqcup y_2 = 2y_2^2 + 4y_3 y_1$.

On a alors $(\mathcal{Z}e^2)^2 = 2\mathcal{Z}e^{2,2} + \mathcal{Z}e^4 = 2\mathcal{Z}e^{2,2} + 4\mathcal{Z}e^{3,1}$ par (1) et (2).

Il vient $\mathcal{Z}e^4 = 4\mathcal{Z}e^{3,1}$. Or, on connaît $\mathcal{Z}e^4$ puisque l'on sait calculer la valeur en tout les nombres pairs de la fonction ζ : $\mathcal{Z}e^4 = \frac{\pi^4}{90}$, d'où $\mathcal{Z}e^{3,1} = \frac{\pi^4}{360}$.

$$\text{De plus, on a aussi } \mathcal{Z}e^{2,2} = \frac{(\mathcal{Z}e^2)^2 - \mathcal{Z}e^4}{2} = \frac{\pi^4}{120}.$$

$$\text{Enfin, } y_1 \sqcup y_2 y_1 - y_1 * y_2 y_1 = y_2 y_1 y_1 - y_2 y_2 - y_3 y_1.$$

$$\text{Donc, par (3), il vient : } \mathcal{Z}e^{2,1,1} = \mathcal{Z}e^{2,2} + \mathcal{Z}e^{3,1}.$$

Remarque. Plus généralement, il apparait une formule pour les $\mathcal{Z}e^{2k,2k}$. En effet, $y_{2k} * y_{2k} = 2y_{2k}^2 + y_{4k}$. Et il vient $\mathcal{Z}e^{2k,2k} = \frac{(\mathcal{Z}e^{2k})^2 - \mathcal{Z}e^{4k}}{2}$, formule que l'on sait calculer car elle ne fait intervenir que les valeurs paires de la fonction Zêta.

En procédant par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$, on voit alors que $\mathcal{Z}e^{\underline{s}} \in \pi^{2kr} \mathbb{Q}$ lorsque $\underline{s} = \underbrace{(2k; \dots; 2k)}_{r \text{ fois}}$.

Troisième exemple : une relation au poids 5.

On choisit maintenant les mots $y_2 = x_0 x_1$ et $y_3 = x_0^2 x_1$.

$$\begin{aligned} y_2 * y_3 &= y_2(e * y_3) + y_3(y_2 * e) + y_5(e * e) = y_2 y_3 + y_3 y_2 + y_5 \\ y_2 \sqcup y_3 &= x_0 x_1 \sqcup x_0^2 x_1 = x_0(x_1 \sqcup x_0^2 x_1) + x_0(x_0 x_1 \sqcup x_0 x_1) \\ &= x_0(x_1 x_0^2 x_1 + x_0(x_1 \sqcup x_0 x_1)) + x_0(x_0(x_1 \sqcup x_0 x_1) + x_0(x_0 x_1 \sqcup x_1)) \\ &= x_0 x_1 x_0^2 x_1 + x_0^2(x_1 x_0 x_1 + x_0(x_1 \sqcup x_1)) \\ &\quad + x_0^2(x_1 x_0 x_1 + 2x_0(x_1 \sqcup x_1) + x_1 x_0 x_1) \\ &= x_0 x_1 x_0^2 x_1 + 3x_0^2 x_1 x_0 x_1 + 2x_0^3 x_1^2 + 4x_0^3 x_1^2 \\ &= y_2 y_3 + 3y_3 y_2 + 6y_4 y_1. \end{aligned}$$

Par théorèmes sur les tables de multiplications, il vient :

$$\mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^3 = \mathcal{Z}e^{2,3} + \mathcal{Z}e^{3,2} + \mathcal{Z}e^5 \text{ et } \mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^3 = \mathcal{Z}e^{2,3} + 3\mathcal{Z}e^{3,2} + 6\mathcal{Z}e^{4,1}.$$

En soustrayant, on obtient une nouvelle relation $\mathcal{Z}e^5 = 2\mathcal{Z}e^{3,2} + 6\mathcal{Z}e^{4,1}$.

Théorème d'Euler.

On choisit $y_n = x_0^{n-1} x_1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1 = x_1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $y_n * y_1 = y_n y_1 + y_1 y_n + y_{n+1}$.

On a déjà montré lors de la démonstration du théorème 8 que :

$$\forall n \geq 1, \quad y_n \sqcup y_1 = 2y_n y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i y_{n+1-i} = y_n y_1 + \sum_{i=1}^n y_i y_{n+1-i}.$$

Il vient alors : $y_{n+1} - \sum_{i=2}^n y_i y_{n+1-i} \in \ker \zeta$. Cette relation est "connue" sous le nom de théorème d'Euler. Elle se réécrit en :

$$\forall n \geq 3, \mathcal{Z}e^n = \sum_{i=2}^{n-1} \mathcal{Z}e^{i, n-i} .$$

4 D'autres relations algébriques entre multizêtas.

4.1 Un théorème de dualité.

Par la proposition 2 , on peut écrire les polylogarithmes d'une nouvelle manière pour tout mot $w = x_{\epsilon_1} \dots x_{\epsilon_k}$ où $(\epsilon_i)_i \in \{0, 1\}^k$:

$$\forall t \in]0; 1[, li_w(t) = \int_0^t \omega_{\epsilon_1}(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} \omega_{\epsilon_2}(t_2) dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} \omega_{\epsilon_k}(t_k) dt_k .$$

Pour les mots convergent, c'est-à-dire $\epsilon_1 = 0$ ou $x_{\epsilon_1} \neq x_1$, l'intégrale converge sur $0 < t \leq 1$. Donc :

$$\zeta(w) = \int_{0 < t_k < \dots < t_1} \omega_{\epsilon_1}(t_1) \dots \omega_{\epsilon_k}(t_k) dt_1 \dots dt_k .$$

On réintroduit l'anti-automorphisme τ définie dans la partie 3.4.

Théorème 5. Pour tout $w \in x_0 X^* x_1$, $\zeta(w) = \zeta(\tau(w))$.

Démonstration. Soit $w \in x_0 X^* x_1$. On a vu que :

$$\zeta(w) = \int_{0 < t_k < \dots < t_1 < 1} \omega_{\epsilon_1}(t_1) \dots \omega_{\epsilon_k}(t_k) dt_1 \dots dt_k .$$

On fait le changement de variable $t'_1 = 1 - t_k$, $t'_2 = 1 - t_{k-1}$, ... , $t'_k = 1 - t_1$.
On a :

$$\zeta(w) = \int_1^0 \omega_{\epsilon_1}(1-t'_k)(-dt'_k) \int_1^{t'_k} \omega_{\epsilon_2}(1-t'_{k-1})(-dt'_{k-1}) \dots \int_1^{t'_2} \omega_{\epsilon_k}(1-t'_1)(-dt'_1) .$$

Or, on remarque que pour tout $0 < t < 1$, on a : $\omega_0(1-t) = \omega_1(t)$. Donc :

$$\zeta(w) = \int_{0 < t'_k < \dots < t'_1 < 1} \omega_{1-\epsilon_1}(t'_k) \dots \omega_{1-\epsilon_k}(t'_1) dt'_1 \dots dt'_k .$$

On reconnaît alors $\zeta(\tau(w))$, ce qui prouve bien que : $\zeta(w) = \zeta(\tau(w))$. □

Exemple 1 : On choisit $w = y_{n+2} = x_0^{n+1} x_1$.

On a alors : $\tau(w) = x_0 x_1^{n+1} = y_2 y_1^n$.

On obtient alors le résultat : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Z}e^{n+2} = \mathcal{Z}e^{2, 1^{[n]}}$.

Exemple 2 : Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

Considérons $\omega = y_{m+2}y_1^n = x_0^{m+1}x_1^{n+1}$.

Alors, $\tau(x_0^{m-1}x_1^{n+1}) = x_0^{n+1}x_1^{m+1} = y_{n+2}y_1^m$.

Donc, par le théorème de dualité, il vient : $\mathcal{Z}e^{m+2,1^{[n]}} = \mathcal{Z}e^{n+2,1^{[m]}}$.

On remarque que lorsque $m = 0$ ou $n = 0$, on retrouve la relation précédente. Donc en particulier la relation d'Euler.

4.2 Théorème de la Somme.

Nous allons ici énoncer une nouvelle relation connue sous le nom de théorème de la somme. Celle-ci généralise le théorème d'Euler.

Proposition 4. *Pour tous entiers naturels $s \geq 2$ et $r \geq 1$, on a :*

$$\sum_{\substack{s_1 \geq 2, s_2 \geq 1, \dots, s_r \geq 1 \\ s_1 + \dots + s_r = s}} \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r} = \mathcal{Z}e^s.$$

Démonstration. Posons $S(s, r) = \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_r = s \\ s_1 \geq 2 ; s_2, \dots, s_r \geq 1}} \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r}$.

Nécessairement, on a : $s \geq r + 1$.

$$\begin{aligned} S(s, r) &= \sum_{s_1 + \dots + s_r = s} \int_{0 < t_s < \dots < t_1 < 1} \frac{dt_1 \dots dt_s}{(1-t_s)t_{s-1} \dots t_{s-n+1} \dots (1-t_{s_1+1})t_{s_1} \dots t_1} \\ &= \sum_{\substack{(\alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}) \in \{0;1\}^{s-2} \\ \alpha_2 + \dots + \alpha_{s-1} = r-1}} \int_{0 < t_s < \dots < t_1 < 1} \frac{(-1)^{\#\{\alpha_i=0\}} dt_1 \dots dt_s}{(1-t_s)(\alpha_{s-1} - t_{s-1}) \dots (\alpha_2 - t_2)t_1}. \end{aligned}$$

On permute les signes \sum et \int puis on isole le terme α_2 :

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{s-1} S(s, r) X^{r-1} \\ &= \sum_{r=1}^{s-1} \sum_{\substack{(\alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}) \in \{0;1\}^{s-2} \\ \alpha_2 + \dots + \alpha_{s-1} = r-1}} \int_{0 < t_s < \dots < t_1 < 1} \frac{(-1)^{\#\{\alpha_i=0\}} \cdot dt_1 \dots dt_s}{(1-t_s)(\alpha_{s-1} - t_{s-1}) \dots (\alpha_2 - t_2)t_1} X^{r-1} \\ &= \sum_{(\alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}) \in \{0;1\}^{s-2}} \int_{0 < t_s < \dots < t_1 < 1} \frac{(-1)^{\#\{\alpha_i=0\}} \cdot dt_1 \dots dt_s}{(1-t_s)(\alpha_{s-1} - t_{s-1}) \dots (\alpha_2 - t_2)t_1} X^{\alpha_2 + \dots + \alpha_{s-1}} \\ &= \int_{0 < t_s < \dots < t_1 < 1} \sum_{(\alpha_3, \dots, \alpha_{s-1}) \in \{0;1\}^{s-2}} \frac{(-1)^{\#\{\alpha_i=0\}}}{(1-t_s)(\alpha_{s-1} - t_{s-1}) \dots (\alpha_3 - t_3)t_1} X^{\alpha_3 + \dots + \alpha_{s-1}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{t_2} + \frac{X}{1-t_2} \right) dt_1 \dots dt_s \end{aligned}$$

On réitère ensuite l'opération pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=1}^{s-1} S(s, r) X^{r-1} \\
&= \int_{0 < t_s < \dots < t_1 < 1} \frac{1}{1-t_s} \left(\frac{1}{t_{s-1}} + \frac{X}{1-t_{s-1}} \right) \cdots \left(\frac{1}{t_2} + \frac{X}{1-t_2} \right) \frac{1}{t_1} dt_1 \dots dt_s \\
&= \int_{0 < t_s < t_1 < 1} \left(\int_{t_s < t_{s-1} < \dots < t_1} \left(\frac{1}{t_{s-1}} + \frac{X}{1-t_{s-1}} \right) \cdots \left(\frac{1}{t_2} + \frac{X}{1-t_2} \right) dt_2 \dots dt_s \right) \\
&\quad \times \frac{dt_1 dt_s}{(1-t_s)t_1} \\
&= \int_{0 < t_s < t_1 < 1} \frac{1}{(s-2)!} \left(\int_{t_s < t_2, \dots, t_{s-1} < t_1} \left(\frac{1}{t_{s-1}} + \frac{X}{1-t_{s-1}} \right) \cdots \left(\frac{1}{t_2} + \frac{X}{1-t_2} \right) dt_2 \dots dt_s \right) \\
&\quad \times \frac{dt_1 dt_s}{(1-t_s)t_1} \\
&= \int_{0 < t_s < t_1 < 1} \frac{1}{(s-2)!} \left(\int_{t_s}^{t_1} \left(\frac{1}{t} + \frac{X}{1-t} \right) dt \right)^{s-2} \frac{dt_1 dt_s}{t_1(1-t_s)} \\
&= \int_{0 < t_s < t_1 < 1} \frac{1}{(s-2)!} \left(\ln \left(\frac{t_1}{t_s} \right) - X \ln \left(\frac{1-t_1}{1-t_s} \right) \right)^{s-2} \frac{dt_1 dt_s}{t_1(1-t_s)} \\
&= \sum_{r=1}^{s-1} \int_{0 < t_s < t_1 < 1} \frac{1}{(r-1)!(s-1-r)!} \left(\ln \left(\frac{t_1}{t_s} \right) \right)^{s-r-1} \left(-X \ln \left(\frac{1-t_1}{1-t_s} \right) \right)^{r-1} \\
&\quad \times \frac{dt_1 dt_s}{t_1(1-t_s)}, \text{ par le binôme de Newton.}
\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
S(s, r) &= \int_{0 < t_s < t_1 < 1} \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!(s-1-r)!} \left(\ln \left(\frac{t_1}{t_s} \right) \right)^{s-r-1} \left(\ln \left(\frac{1-t_1}{1-t_s} \right) \right)^{r-1} \\
&\quad \times \frac{dt_1 dt_s}{(1-t_s)t_1}.
\end{aligned}$$

On effectue ensuite le changement de variable $x = \ln \frac{t_1}{t_s}$ et $y = \ln \frac{1-t_s}{1-t_1}$ qui transforme t_s en $\frac{e^y - 1}{e^{x+y} - 1}$, t_1 en $\frac{e^x(e^y - 1)}{e^{x+y} - 1}$ et $dt_1 dt_s$ en $\frac{e^{x+y}(e^x - 1)(e^y - 1)}{(e^{x+y} - 1)^3}$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
S(s, r) &= \frac{1}{(r-1)!(s-r-1)!} \left(\int_{(\mathbb{R}^+)^2} \frac{x^{s-r-1} y^{r-1}}{e^{x+y} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{(r-1)!(s-r-1)!} \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \left(\sum_{p \geq 1} x^{s-r-1} y^{r-1} e^{-p(x+y)} \right) dx dy \\
&= \frac{1}{(r-1)!(s-r-1)!} \sum_{p \geq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^+} x^{s-r-1} e^{-px} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^+} y^{r-1} e^{-py} dy \right), \\
&\quad \text{en appliquant le théorème de Beppo Levi} \\
&= \frac{1}{(r-1)!(s-r-1)!} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{s-r}} \frac{1}{p^r} \Gamma(s-r) \Gamma(r) \\
&= \frac{\Gamma(s-r) \Gamma(r)}{(r-1)!(s-r-1)!} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^s} \\
&= \mathcal{Z} e^s.
\end{aligned}$$

□

Cependant, il existe une nouvelle relation permettant de généraliser le théorème de la somme : la relation de Ohno. Sa démonstration s'inspire de celle que l'on vient d'achever. Nous redémontrerons ensuite le théorème de la somme comme conséquence de la relation de Ohno.

4.3 Relation de Ohno.

On définit deux nouvelles séquences \underline{s} et \underline{s}' liée par dualité telles que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k \geq 1$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\underline{s} = \{ \underbrace{1, \dots, 1}_{a_1-1}, b_1 + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_2-1}, b_2 + 1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_k-1}, b_k + 1 \} . \\
\underline{s}' = \{ \underbrace{1, \dots, 1}_{b_k-1}, a_k + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{b_{k-1}-1}, a_{k-1} + 1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{b_1-1}, a_1 + 1 \} .
\end{array} \right.$$

C'est-à-dire : $\tau(\underline{y}_{\underline{s}}) = \underline{y}_{\underline{s}'}$.

On peut maintenant établir la relation de Ohno :

Proposition 5. *Pour toutes séquences \underline{s} et \underline{s}' définies comme précédemment, pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\sum_{\substack{c_1+c_2+\dots+c_r=l \\ c_1, \dots, c_r \geq 0}} \mathcal{Z} e^{s_1+c_1, s_2+c_2, \dots, s_r+c_r} = \sum_{\substack{c_1+c_2+\dots+c_r=l \\ c_1, \dots, c_r \geq 0}} \mathcal{Z} e^{s'_1+c_1, s'_2+c_2, \dots, s'_r+c_r} .$$

Remarque. Pour $l = 0$, on retrouve le théorème de dualité.

Démonstration. On a, par la formule de conversion :

$$\mathcal{Z}e^{\underline{s}} = \mathcal{W}a^{0^{[b_k]}, 1^{[a_k]}, 0^{[b_{k-1}]}, 1^{[a_{k-1}]}, \dots, 0^{[b_1]}, 1^{[a_1]}}(1) .$$

Pour toute séquence $\underline{s} = \{s_1, \dots, s_r\} \in S_{cv}^*$, pour tout entier $l \geq 0$, on définit l'application Z sur S_{cv}^* par :

$$Z(\underline{s}; l) = Z(s_1, s_2, \dots, s_r; l) = \sum_{\substack{c_1+c_2+\dots+c_r=l \\ c_1, \dots, c_r \geq 0}} \mathcal{Z}e^{s_1+c_1, s_2+c_2, \dots, s_r+c_r} .$$

Pour des entiers $l_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, k$) satisfaisant $l_1 + \dots + l_k = l$ et pour l des entiers d_i satisfaisant $1 \leq d_i \leq a_i + l_i$, ($i = 1, \dots, k$), on définit de plus le nombre $S_{\underline{s}}$ par :

$$S_{\underline{s}}(d_1, \dots, d_k; l_1, \dots, l_k) = \sum_{\substack{\epsilon_{i,2}+\dots+\epsilon_{i,a_i+l_i}=d_i-1 \\ \forall i, \epsilon_{i,2}, \dots, \epsilon_{i,a_i+l_i} \in \{0,1\}}} \mathcal{W}a^{0^{[b_k]}, \epsilon_{k,a_k+l_k}, \dots, \epsilon_{k,2}, 1, \dots, 0^{[b_1]}, \epsilon_{1,a_1+l_1}, \dots, \epsilon_{1,2}, 1}(1) .$$

$$\text{Ainsi, } Z(\underline{s}; l) = \sum_{\substack{l_1+\dots+l_k=l \\ \forall i, l_i \geq 0}} S_{\underline{s}}(a_1, \dots, a_k; l_1, \dots, l_k) .$$

On introduit la fonction génératrice de $S_{\underline{s}}$:

$$\sum_{\forall i, 1 \leq d_i \leq a_i+l_i} \left(S_{\underline{s}}(d_1, \dots, d_k; l_1, \dots, l_k) \prod_{j=1}^k X_j^{d_j-1} \right) .$$

En considérant que $t_{2k+1} = 1$, on applique une méthode similaire au calcul fait lors de la démonstration du théorème de la somme pour obtenir :

$$\begin{aligned} S_{\underline{s}}(a_1, \dots, a_k; l_1, \dots, l_k) &= \left(\prod_{i=1}^k (l_i! (a_i - 1)! (b_i - 1)!) \right)^{-1} \\ &\times \int_{0 < t_1 < \dots < t_{2k} < 1} \prod_{i=1}^k \left(\left(\log \frac{t_{2i}}{t_{2i-1}} \right)^{l_i} \left(\log \frac{1-t_{2i-1}}{1-t_{2i}} \right)^{a_i-1} \left(\log \frac{t_{2i+1}}{t_{2i}} \right)^{b_i-1} \right) \\ &\times \frac{dt_1 dt_2 \dots dt_{2k}}{(1-t_1)t_2(1-t_3) \dots t_{2k}} . \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} Z(\underline{s}; l) &= \left(l! \prod_{i=1}^k ((a_i - 1)! (b_i - 1)!) \right)^{-1} \int_{0 < t_1 < \dots < t_{2k} < 1} \left(\log \left(\prod_{i=1}^k \frac{t_{2i}}{t_{2i-1}} \right) \right)^l \\ &\times \prod_{i=1}^k \left(\left(\log \frac{1-t_{2i-1}}{1-t_{2i}} \right)^{a_i-1} \left(\log \frac{t_{2i+1}}{t_{2i}} \right)^{b_i-1} \right) \frac{dt_1 \dots dt_{2k}}{(1-t_1)t_2(1-t_3) \dots t_{2k}} . \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, \dots, k\}$, on effectue le changement de variables³ suivant :

$$x_{2i-1} = \log \frac{1 - t_{2i-1}}{1 - t_{2i}} \text{ et } x_{2i} = \log \frac{t_{2i+1}}{t_{2i}} .$$

On a alors : $\frac{dt_1 \dots dt_{2k}}{(1 - t_1)t_2(1 - t_3) \dots t_{2k}} = dx_1 \dots dx_{2k} .$

$$\text{On pose } f(x_1, \dots, x_{2k}) = \sum_{j=0}^{2k} \left((-1)^j \exp \left(\sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ impair}}}^j x_r + \sum_{\substack{r=j+1 \\ r \text{ pair}}}^{2k} x_r \right) \right) = \left(\prod_{i=1}^k \frac{t_{2i}}{t_{2i-1}} \right)^{-1} .$$

Il vient alors :

$$Z(\underline{s}, l) = \left(l! \prod_{i=1}^k ((a_i - 1)!(b_i - 1)!) \right)^{-1} \\ \times \int_{\substack{x_i > 0, 1 \leq i \leq 2k \\ f(x_1, \dots, x_{2k}) > 0}} (\log(f(x_1, \dots, x_{2k})^{-1}))^l \left(\prod_{i=1}^k (x_{2i-1}^{a_i-1} x_{2i}^{b_i-1}) \right) dx_1 \dots dx_{2k} .$$

On remarque que $f(x_1, \dots, x_{2k}) = f(x_{2k}, \dots, x_1)$. On effectue alors, pour $i \in \{1, \dots, 2k\}$, le changement de variable $u_i = x_{2k+1-i}$. On reconnaît alors l'expression de $Z(\underline{s}'; l)$.

On conclut donc que $Z(\underline{s}; l) = Z(\underline{s}'; l)$. □

Nous avons appliqué, dans la démonstration précédente, une étape similaire au coeur de la démonstration du théorème de la somme. Voyons maintenant en quoi les relations d'Ohno contiennent en particulier les relations données par le théorème de la somme.

On choisit pour cela la séquence à un terme $\underline{s} = r + 1$. Ainsi, $k = 1$, $a_1 = 1$ et $b_1 = r$ avec les notations précédentes. On a alors $\underline{s}' = \underbrace{\{1, \dots, 1, 2\}}_{r-1 \text{ fois}}$. Soit $l \geq 1$.

Par définition, on a : $Z(\underline{s}; l) = Z(r + 1; l) = \zeta(r + 1 + l)$.

$$\text{Par ailleurs, } Z(\underline{s}'; l) = Z(\underbrace{1, \dots, 1, 2}_{r-1 \text{ fois}}; l) \\ = \sum_{\substack{c_1 + \dots + c_r = l \\ c_1, \dots, c_r \geq 0}} \mathcal{Z} e^{2+c_1, 1+c_2, \dots, 1+c_r} \\ = \sum_{\substack{s_1 \geq 2, s_2 \geq 1, \dots, s_r \geq 1 \\ s_1 + \dots + s_r = r+1+l}} \mathcal{Z} e^{s_1, \dots, s_r} .$$

Ainsi, la relation de Ohno s'écrit :

$$\sum_{\substack{s_1 \geq 2, s_2 \geq 1, \dots, s_r \geq 1 \\ s_1 + \dots + s_r = r+1+l}} \mathcal{Z} e^{s_1, \dots, s_r} = \zeta(r + 1 + l) .$$

Cette équation est bien la relation du théorème de la somme.

3. Ce changement de variables généralise celui effectué lors de la démonstration du théorème de la somme.

5 Trois conjectures importantes.

Cette partie consistera à évoquer les trois principales conjectures sur les multizêtas. En effet, il reste beaucoup de propriétés à découvrir sur ces nombres.

5.1 Conjecture diophantienne.

Toutes les relations connues entre multizêtas semble provenir des relations (1), (2) et (3). Ainsi, la conjecture suivante semble plausible :

Conjecture 2. *Toutes les relations algébriques sur \mathbb{Q} entre multizêtas sont engendrés par les relations (1), (2) et (3). C'est-à-dire, de manière équivalente :*

$$\ker \zeta = \{u \sqcup v - u * v \mid u \in X^* x_1, v \in x_0 X^* x_1\} .$$

5.2 Dimensions conjecturales de sous-espace vectoriels de l'espace des multizêtas.

On définit par Z_k le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les multizêtas convergents de poids k . On note d_k sa dimension. Zagier a énoncé la conjecture suivante :

Conjecture 3. *La suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, \\ \forall k \geq 3, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}. \end{cases}$$

Un argument important en faveur de cette conjecture est lié au théorème très récent suivant :

Théorème ⁴. *Tout multizêta convergent s'exprime comme une \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multizêtas ne contenant que des 2 et des 3.*

Ce théorème est un premier résultat important pour la conjecture 3 . En effet, le nombre de multizêtas de poids k ne contenant que des 2 et des 3 vérifie la récurrence de la conjecture de Zagier.

Nous allons vérifier cette conjecture pour les "petits" poids. Pour cela, nous supposons que la conjecture 2 est vraie, ce qui nous permet de ne considérer que quelques relations pour un poids donné!

Poids 0 :

Par convention, on pose $Z_0 = \mathbb{Q}$. On a donc bien $d_0 = 1$.

Poids 1 :

Comme il n'existe pas de multizêtas convergent de poids 1, on pose $Z_1 = \{0\}$. On a donc $d_1 = 0$.

4. Ce théorème, démontré par Francis Brown date de 2011, mais les outils invoqués dans sa démonstration relèvent de la géométrie algébrique et dépassent largement le cadre de ce mémoire qui se veut élémentaire.

Poids 2 :

Le seul multizêta convergent de poids 2 est $\mathcal{Z}e^2$. Comme $\mathcal{Z}e^2 = \frac{\pi^2}{6} \neq 0$, on a $d_2 = 1$.

Poids 3 :

Les multizêtas convergents de poids 3 sont $\mathcal{Z}e^3$ et $\mathcal{Z}e^{2,1}$. Mais ces deux multizêtas ne sont pas indépendants, puisqu'il a été vu que $\mathcal{Z}e^{2,1} = \mathcal{Z}e^3 \neq 0$. Donc $d_3 = 1$.

Ceci est cohérent avec la relation de récurrence : $d_3 = d_1 + d_0 = 1$.

Poids 4 :

On répertorie les multizêtas convergents de poids 4 : $\mathcal{Z}e^4, \mathcal{Z}e^{3,1}, \mathcal{Z}e^{2,2}, \mathcal{Z}e^{2,1,1}$ et $(\mathcal{Z}e^2)^2$.

- On calcule les deux produits de mélange suivants :

$$\begin{cases} y_2 * y_2 = 2y_2^2 + y_4 \\ y_2 \sqcup y_2 = 2y_2^2 + 4y_3y_1 \end{cases}$$

Il vient donc :

$$\begin{cases} 2\mathcal{Z}e^{2,2} + \mathcal{Z}e^4 = (\mathcal{Z}e^2)^2 \\ 2\mathcal{Z}e^{2,2} + 4\mathcal{Z}e^{3,1} = (\mathcal{Z}e^2)^2 \end{cases}$$

- On calcule aussi :

$$\begin{cases} y_1 \sqcup y_3 = y_1y_3 + y_2^2 + 2y_3y_1 \\ y_1 * y_3 = y_1y_3 + y_3y_1 + y_4 \end{cases}$$

Donc : $y_1 \sqcup y_3 - y_1 * y_3 = y_2^2 + y_3y_1 - y_4$.

D'où : $\zeta(y_2^2 + y_3y_1 - y_4) = 0$ par la relation (3).

Il vient donc : $\mathcal{Z}e^4 = \mathcal{Z}e^{2,2} + \mathcal{Z}e^{3,1}$.

- On calcule $y_1 \sqcup y_2y_1 - y_1 * y_2y_1 = y_2y_1^2 - y_2^2 - y_3y_1$.

Donc, il vient : $\mathcal{Z}e^{2,1,1} = \mathcal{Z}e^{2,2} + \mathcal{Z}e^{3,1}$.

Bilan : On a trouvé les quatre relations :

$$\begin{cases} 2\mathcal{Z}e^{2,2} + \mathcal{Z}e^4 = (\mathcal{Z}e^2)^2 \\ 2\mathcal{Z}e^{2,2} + 4\mathcal{Z}e^{3,1} = (\mathcal{Z}e^2)^2 \\ \mathcal{Z}e^4 - \mathcal{Z}e^{2,2} - \mathcal{Z}e^{3,1} = 0 \\ \mathcal{Z}e^{2,1,1} - \mathcal{Z}e^{2,2} - \mathcal{Z}e^{3,1} = 0 \end{cases}$$

La matrice associée à ce système est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie qu'elle est de rang 4. On peut donc résoudre le système en choisissant un paramètre. Les relations trouvées précédemment sont donc indépendantes.

Donc $d_4 = 1$. C'est bien cohérent avec $d_4 = d_1 + d_2 = 1$.

Poids 5 :

On répertorie les multizêtas convergents de poids 5 :

$$\mathcal{Z}e^5, \mathcal{Z}e^{4,1}, \mathcal{Z}e^{3,2}, \mathcal{Z}e^{3,1,1}, \mathcal{Z}e^{2,3}, \mathcal{Z}e^{2,2,1}, \mathcal{Z}e^{2,1,2}, \mathcal{Z}e^{2,1,1,1}, \mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^3.$$

• On avait déjà trouvé dans le paragraphe "Exemples de manipulation des tables" que : $\mathcal{Z}e^5 = 2\mathcal{Z}e^{3,2} + 6\mathcal{Z}e^{4,1}$.

• En calculant, on obtient : $y_1 \sqcup y_4 - y_1 * y_4 = y_4 y_1 + y_2 y_3 + y_3 y_2 - y_5$.

Donc, par (3), il vient : $\mathcal{Z}e^{4,1} + \mathcal{Z}e^{2,3} + \mathcal{Z}e^{3,2} - \mathcal{Z}e^5 = 0$.

• De même, $y_1 \sqcup y_2^2 - y_1 * y_2^2 = y_2 y_1 y_2 + y_2^2 y_1 - y_2 y_3 - y_3 y_2$.

Donc, par (3), il vient : $\mathcal{Z}e^{2,1,2} + \mathcal{Z}e^{2,2,1} - \mathcal{Z}e^{2,3} - \mathcal{Z}e^{3,2} = 0$.

• De même, $y_1 \sqcup y_3 y_1 - y_1 * y_3 y_1 = y_2^2 y_1 + y_3 y_1^2 - y_3 y_2 - y_4 y_1$.

Donc, par (3), il vient : $\mathcal{Z}e^{2,2,1} + \mathcal{Z}e^{3,1,1} - \mathcal{Z}e^{3,2} - \mathcal{Z}e^{4,1} = 0$.

• De même, $y_1 \sqcup y_2 y_1^2 - y_1 * y_2 y_1^2 = y_2 y_1^3 - y_2 y_1 y_2 - y_2^2 y_1 - y_3 y_1^2$.

Donc, par (3), il vient : $\mathcal{Z}e^{2,1,1,1} - \mathcal{Z}e^{2,1,2} - \mathcal{Z}e^{2,2,1} - \mathcal{Z}e^{3,1,1} = 0$.

• On avait vu comme application du théorème de dualité la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Z}e^{n+2} = \mathcal{Z}e^{2,1^{[n]}}$$

On fait $n = 3$ et il vient : $\mathcal{Z}e^5 = \mathcal{Z}e^{2,1,1,1}$.

• **Bilan** : On récapitule les relations déjà trouvées :

$$\begin{cases} \mathcal{Z}e^5 - 2\mathcal{Z}e^{3,2} - 6\mathcal{Z}e^{4,1} = 0 . \\ \mathcal{Z}e^{4,1} + \mathcal{Z}e^{2,3} + \mathcal{Z}e^{3,2} - \mathcal{Z}e^5 = 0 . \\ \mathcal{Z}e^{2,1,2} + \mathcal{Z}e^{2,2,1} - \mathcal{Z}e^{2,3} - \mathcal{Z}e^{3,2} = 0 . \\ \mathcal{Z}e^{2,2,1} + \mathcal{Z}e^{3,1,1} - \mathcal{Z}e^{3,2} - \mathcal{Z}e^{4,1} = 0 . \\ \mathcal{Z}e^{2,1,1,1} - \mathcal{Z}e^{2,1,2} - \mathcal{Z}e^{2,2,1} - \mathcal{Z}e^{3,1,1} = 0 . \\ \mathcal{Z}e^5 - \mathcal{Z}e^{2,1,1,1} = 0 . \end{cases}$$

La matrice associée à ce système est
$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie avec maple qu'elle est de rang 6. Donc les relations trouvées sont deux à deux indépendantes, ce qui permet de conclure que $d_5 \leq 2$.

On choisit maintenant deux multizêtas comme paramètres, disons $\mathcal{Z}e^5$ et $\mathcal{Z}e^{2,3}$, pour exprimer tout les multizêtas de poids 5 en fonction de ces paramètres.

On exprime ensuite $\mathcal{Z}e^{2,3}$ en fonction de $\mathcal{Z}e^2\mathcal{Z}e^3$ et $\mathcal{Z}e^5$. On a alors :

$$\dim \mathcal{Z}_5 = d_5 = \begin{cases} 2 & \text{si } \frac{\mathcal{Z}e^5}{\mathcal{Z}e^2\mathcal{Z}e^3} \notin \mathbb{Q}. \\ 1 & \text{si } \frac{\mathcal{Z}e^5}{\mathcal{Z}e^2\mathcal{Z}e^3} \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

On calcule $\frac{\mathcal{Z}e^5}{\mathcal{Z}e^2\mathcal{Z}e^3}$ à une précision de 500 décimales :

$$\frac{\mathcal{Z}e^5}{\mathcal{Z}e^2\mathcal{Z}e^3} = 0.524414845386580689246453287237208140463738333302763850423266 \\ 98565149156791143627992160300501235299988584247654114061693620 \\ 65200594347320142503170554444687521615274223768308564800666724 \\ 35233357499198883285373189800603907461938424034532254949519448 \\ 20048340169123186157644564388729521451840859772072876061735211 \\ 20015392158833689119958666283336297133470054333366938695252474 \\ 77326745824693126251383177108223615513716280585884503284378321 \\ 88312246026508202457604356550022069584052057709919955533093363 \\ 797463.$$

Cette précision nous permet de remarquer que à priori, il n'existe pas de période dans les décimales. En effet, ce phénomène semble se produire aussi loin que l'on porte le développement décimale, ce qui voudrait dire que la période éventuelle, si elle existe, serait gigantesque. Bien que cette question soit toujours ouverte, on peut donc penser que $\frac{\mathcal{Z}e^5}{\mathcal{Z}e^2\mathcal{Z}e^3} \notin \mathbb{Q}$.

On en déduit que $d_5 = 2$ à priori. Ce qui est conforme à la relation de récurrence.

Poids 6 :

Il existe 16 multizêtas de poids 6 : $\mathcal{Z}e^6, \mathcal{Z}e^{5,1}, \mathcal{Z}e^{4,2}, \mathcal{Z}e^{3,3}, \mathcal{Z}e^{2,4}, \mathcal{Z}e^{4,1,1}, \mathcal{Z}e^{3,2,1}, \mathcal{Z}e^{3,1,2}, \mathcal{Z}e^{2,1,3}, \mathcal{Z}e^{2,3,1}, \mathcal{Z}e^{2,2,2}, \mathcal{Z}e^{3,1,1,1}, \mathcal{Z}e^{2,2,1,1}, \mathcal{Z}e^{2,1,2,1}, \mathcal{Z}e^{2,1,1,2}, \mathcal{Z}e^{2,1,1,1,1}$.

On ne considérera pas ici les produits de multizêtas de poids 6.

• On calcule les différents produits liés aux relations (1) et (2) . On a :

$$\begin{cases} y_4 \sqcup y_2 = 4y_4y_2 + 8y_5y_1 + 2y_3^2 + y_2y_4 . \\ y_4 * y_2 = y_4y_2 + y_2y_4 + y_6 . \end{cases}$$

On en déduit : $\mathcal{Z}e^6 = 3\mathcal{Z}e^{4,2} + 8\mathcal{Z}e^{5,1} + 2\mathcal{Z}e^{3,3}$.

De même :

$$\begin{cases} y_3 \sqcup y_3 = 2y_3^2 + 6y_4y_2 + 12y_5y_1 . \\ y_3 * y_3 = 2y_3^2 + y_6 . \end{cases}$$

On en déduit : $\mathcal{Z}e^6 = 6\mathcal{Z}e^{4,2} + 12\mathcal{Z}e^{5,1}$.

D'autre part :

$$\begin{cases} (y_3y_1) \sqcup y_2 = y_3y_1y_2 + 4y_3y_2y_1 + 9y_4y_1^2 + y_2y_3y_1 . \\ (y_3y_1) * y_2 = y_3y_1y_2 + y_3y_2y_1 + y_3^2 + y_2y_3y_1 + y_5y_1 . \end{cases}$$

On en déduit : $3\mathcal{Z}e^{3,2,1} + 9\mathcal{Z}e^{4,1,1} - \mathcal{Z}e^{3,3} - \mathcal{Z}e^{5,1} = 0$.

De plus :

$$\begin{cases} (y_2^2) \sqcup y_2 = 3y_2^3 + 4y_2y_3y_1 + 4y_3y_2y_1 + 4y_3y_1y_2 . \\ (y_2^2) * y_2 = 3y_2^2y_3 + y_2y_4 + y_4y_2 . \end{cases}$$

On en déduit : $4\mathcal{Z}e^{2,3,1} + 4\mathcal{Z}e^{3,2,1} + 4\mathcal{Z}e^{3,1,2} - \mathcal{Z}e^{2,4} - \mathcal{Z}e^{4,2} = 0$.

On a aussi :

$$\begin{cases} (y_2y_1^2) \sqcup y_2 = y_2y_1^2y_2 + 2y_2y_1y_2y_1 + 4y_2^2y_1^2 + 8y_3y_1^3 . \\ (y_2y_1^2) * y_2 = y_2y_1^2y_2 + y_2y_1y_2y_1 + y_2y_1y_3 + 2y_2^2y_1^2 + y_2y_3y_1 + y_4y_1^2 . \end{cases}$$

On en déduit : $2\mathcal{Z}e^{2,2,1,1} + 8\mathcal{Z}e^{3,1,1,1} - \mathcal{Z}e^{2,1,3} - \mathcal{Z}e^{2,3,1} - \mathcal{Z}e^{4,1,1} = 0$.

Enfin :

$$\begin{cases} (y_2y_1) \sqcup (y_2y_1) = 2y_2y_1y_2y_1 + 6y_2^2y_1^2 + 12y_3y_1^3 . \\ (y_2y_1) * (y_2y_1) = 2y_2y_1y_2y_1 + 4y_2^2y_1^2 + 2y_2^3 + 2y_2y_3y_1 + 2y_4y_1^2 + y_4y_2 . \end{cases}$$

On en déduit : $2\mathcal{Z}e^{2,2,2} + \mathcal{Z}e^{2,3,1} + \mathcal{Z}e^{4,1,1} + \mathcal{Z}e^{4,2} - 12\mathcal{Z}e^{3,1,1,1}$.

• On calcule maintenant les produits liés à la relation (3) .

On a :

$$y_5 \sqcup y_1 - y_5 * y_1 = y_5y_1 + y_4y_2 + y_3^2 + y_2y_4 - y_6 .$$

Donc : $\mathcal{Z}e^{5,1} + \mathcal{Z}e^{4,2} + \mathcal{Z}e^{3,3} + \mathcal{Z}e^{2,4} - \mathcal{Z}e^6 = 0$.

De même :

$$(y_4y_1) \sqcup y_1 - (y_4y_1) * y_1 = y_4y_1^2 + y_3y_2y_1 + y_2y_3y_1 - y_4y_2 - y_5y_1 .$$

$$\text{Donc : } \mathcal{Z}e^{4,1,1} + \mathcal{Z}e^{3,2,1} + \mathcal{Z}e^{2,3,1} - \mathcal{Z}e^{4,2} - \mathcal{Z}e^{5,1} = 0 .$$

De même :

$$(y_3y_2) \sqcup y_1 - (y_3y_2) * y_1 = y_3y_2y_1 + y_3y_1y_2 + y_2^3 - y_3^2 - y_4y_2 .$$

$$\text{Donc : } \mathcal{Z}e^{3,2,1} + \mathcal{Z}e^{3,1,2} + \mathcal{Z}e^{2,2,2} - \mathcal{Z}e^{3,3} - \mathcal{Z}e^{4,2} = 0 .$$

De même :

$$(y_2y_3) \sqcup y_1 - (y_2y_3) * y_1 = y_2y_3y_1 + y_2^3 + y_2y_1y_3 - y_2y_4 - y_3^2 .$$

$$\text{Donc : } \mathcal{Z}e^{2,3,1} + \mathcal{Z}e^{2,2,2} + \mathcal{Z}e^{2,1,3} - \mathcal{Z}e^{2,4} - \mathcal{Z}e^{3,3} = 0 .$$

De même :

$$(y_3y_1^2) \sqcup y_1 - (y_3y_1^2) * y_1 = y_3y_1^3 + y_2^2y_1^2 - y_3y_1y_2 - y_3y_2y_1 - y_4y_1^2 .$$

$$\text{Donc : } \mathcal{Z}e^{3,1,1,1} + \mathcal{Z}e^{2,2,1,1} - \mathcal{Z}e^{3,1,2} - \mathcal{Z}e^{3,2,1} - \mathcal{Z}e^{4,1,1} = 0 .$$

De même :

$$(y_2^2y_1) \sqcup y_1 - (y_2^2y_1) * y_1 = y_2^2y_1^2 + y_2y_1y_2y_1 - y_2^3 - y_2y_3y_1 - y_3y_2y_1 .$$

$$\text{Donc : } \mathcal{Z}e^{2,2,1,1} + \mathcal{Z}e^{2,1,2,1} - \mathcal{Z}e^{2,2,2} - \mathcal{Z}e^{2,3,1} - \mathcal{Z}e^{3,2,1} = 0 .$$

De même :

$$(y_2y_1y_2) \sqcup y_1 - (y_2y_1y_2) * y_1 = y_2y_1y_2y_1 + y_2y_1^2y_2 - y_2y_1y_3 - y_2^3 - y_3y_1y_2 .$$

$$\text{Donc : } \mathcal{Z}e^{2,1,2,1} + \mathcal{Z}e^{2,1,1,2} - \mathcal{Z}e^{2,1,3} - \mathcal{Z}e^{2,2,2} - \mathcal{Z}e^{3,1,2} = 0 .$$

Enfin :

$$(y_2y_1^3) \sqcup y_1 - (y_2y_1^3) * y_1 = y_2y_1^4 - y_2y_1^2y_2 - y_2y_1y_2y_1 - y_2^2y_1^2 - y_3y_1^3 .$$

$$\text{Donc : } \mathcal{Z}e^{2,1,1,1,1} - \mathcal{Z}e^{2,1,1,2} - \mathcal{Z}e^{2,1,2,1} - \mathcal{Z}e^{2,2,1,1} - \mathcal{Z}e^{3,1,1,1} = 0 .$$

• **Bilan** On a trouvé 14 relations à l'aide des relations (1) , (2) et (3) . Comme précédemment, on écrit la matrice associée de taille 14×16 . Maple nous indique que cette matrice est de rang 14 . Donc les relations trouvées sont deux à deux indépendantes. Donc $d_6 \leq 2$.

De manière analogue au poids précédent, on choisit les paramètre $(\mathcal{Z}e^2)^3$ et $(\mathcal{Z}e^3)^2$. On peut donc résoudre le système en fonction de ces deux paramètres. Or :

$$\frac{(\mathcal{Z}e^3)^2}{(\mathcal{Z}e^2)^3} = 3.08031713202843209254630462490648200415505404239994878293762 \\ 0523954225192591213394790402199638487310676648987898035254918 \\ 72309825720306719489575072448 .$$

On conjecture de même que : $\frac{(\mathcal{Z}e^3)^2}{(\mathcal{Z}e^2)^3} \notin \mathbb{Q}$. Ce qui nous permettrait d'en déduire, à priori, que $d_6 = 2$.

5.3 Absence de \mathbb{Q} -relations linéaires entre multizêtas de poids différents

Le lecteur aura pu remarquer que les différentes relations entre multizêtas évoquées dans ce mémoire ne font intervenir que des multizêtas de même poids. C'est pourquoi la conjecture suivante semble vérifiée :

Conjecture 4. *Il n'existe aucune relation linéaire (dans \mathbb{Q}) entre multizêtas de poids différents.*

C'est-à-dire que, en notant $MZV = \text{Vect} (\mathcal{Z}e^s)_{\underline{s} \in S_{cv}^}$, on a : $MZV = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}_k$.*

Conclusion :

Après avoir calculé la valeur de la fonction zêta aux entiers pairs, nous nous sommes intéressés au cas des entiers impairs. Des interrogations sur la nature de ces nombres ont donc motivé l'introduction des multizêtas. Mais peu de choses restent encore connues sur ces nombres.

Nous avons mis en évidence trois relations fondamentales sur les multizêtas : les deux tables de multiplication et la relation de renormalisation. En effet, ces relations semblent engendrer toutes les relations entre multizêtas.

Avec plus de temps, nous aurions pu aussi calculer numériquement les multizêtas à haute précision en utilisant des algorithmes de détection de relations entières pour (re)trouver ou (re)découvrir d'éventuelles relations linéaires entre ces nombres. Ce qui permettrait de pouvoir à nouveau argumenter sur la véracité des conjectures citées précédemment qui, une fois démontrées, résoudraient un grand nombre de problèmes des mathématiques modernes.

Références.

- O. Bouillot, *Invariants analytiques des difféomorphismes et multizêtas*, thèse de doctorat, Université Paris-Sud 11, 2011, 290p.
- P. Cartier, *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents*, 2001.
- Y. Ohno, *A Generalisation of the Duality and Sum Formulas on the Multiple Zeta Values*, Journal of Number Theory, **74**, 1999, pp. 39-43.
- M. Waldschmidt, *Valeurs zêta multiples. Une Introduction*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **12**, 2000, pp. 581-592.
- V. V. Zudilin, *Algebraic Relations for Multiple Zeta Values*, Russian Mathematical Surveys, **58**, 2003, pp. 1-29.