

Autours des invariants analytiques des difféomorphismes
tangents à l'identité

Séminaire, Université de Lille 1, Rennes 1 et Strasbourg.

Olivier Bouillot

29 mars 2012

- 1 Définition du cadre de travail.
- 2 Définition des invariants holomorphes.
- 3 Rappels sur la méthode de sommation de Borel.
- 4 Rappels sur la résurgence.
- 5 Une équation aux différences simples.
 - 6 Méthodes de calcul des invariants.
 - Les différentes méthodes de calcul.
 - Comparaison des méthodes.
- 7 Perspectives.
- 8 Conclusion.

Soit $\mathcal{T} = \{f \in \mathbb{C}\{x\} ; f(x) = \lambda x + \mathcal{O}(x^2), \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}^*\}$.

But : Décrire les classes de conjugaison de \mathcal{T} .

- Cas hyperbolique : $|\lambda| \neq 1$.

$f \in \mathcal{T}$ est holomorphiquement conjugué à $x \mapsto \lambda x$. (Koenig)

- Cas elliptique : $|\lambda| = 1$ et $\lambda = e^{2i\pi\theta}$, $\theta \notin \mathbb{Q}$.

Il existe une condition diophantienne, optimale, dûe à Bryuno, qui garantit la linéarisation analytique de tous les f commençant par λ .

(Siegel pour une condition non optimale, Bryuno pour l'optimalité et la suffisance, R ussman, Yoccoz pour l'optimalité et la nécessité, Perez-Marco)

- Cas parabolique : $|\lambda| = 1$ et $\lambda = e^{2i\pi\frac{p}{q}}$.

$f \in \mathcal{T}$ n'est pas conjugu e à $x \mapsto \lambda x$ (sauf si f est d'ordre fini) .

- A l'infini, tout difféomorphisme tangent à l'identité est formellement conjugué à $z \mapsto z + z^{1-p} - \rho z^{1-2p}$, où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\rho \in \mathbb{C}$.

p et ρ sont les deux invariants formels.

- On s'intéresse à la classe type $(p; \rho) = (1; 0)$, i.e.

$$f(z) = z + 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

On pose aussi $l : z \mapsto z + 1$.

Définition des invariants de f .

$$\blacksquare \exists f^* \in \mathbb{Z} + \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right], f^* \circ f = l \circ f^* .$$

$$\exists {}^*f \in \mathbb{Z} + \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right], f \circ {}^*f = {}^*f \circ l .$$

$$\blacksquare \pi_f^+ = f_+^* \circ {}^*f_- \text{ commute avec } l \text{ et est invariante par conjugaison.}$$

Définition :

Les invariants de f , notés $(A_{2in\pi}^+(f))_{n \in \mathbb{Z}^*}$, sont les coefficients de Fourier de $\pi_f^+ - id_{\mathbb{C}}$.

Problématique :

Calculer numériquement les $A_{2in\pi}^+(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$.
Comprendre comment sont construits ces invariants .

Rappel sur la transformée de Borel.

La transformation \mathcal{B} de "Borel formelle" est une opération agissant sur $\frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$, à valeurs dans $\mathbb{C}[[\zeta]]$:

$$\mathcal{B} : \frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right] \longrightarrow \mathbb{C}[[\zeta]]$$
$$\sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{z^{n+1}} \longmapsto \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{n!} \zeta^n .$$

Notation : $\widehat{\varphi} = \mathcal{B}(\widetilde{\varphi})$.

Propriétés : Soit $(\widetilde{\varphi}; \widetilde{\psi}) \in \left(\frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right] \right)^2$.

Alors :

- 1 $\mathcal{B}(\partial_z \widetilde{\varphi})(\zeta) = -\zeta \widehat{\varphi}(\zeta)$.
- 2 $\mathcal{B}(\widetilde{\varphi} \circ l)(\zeta) = e^{-\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta)$, où $l : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $l(z) = z + 1$.
- 3 $\mathcal{B}(\widetilde{\varphi} \cdot \widetilde{\psi})(\zeta) = \left(\widehat{\varphi} \star \widehat{\psi} \right) (\zeta)$.

Définition

Etant donné $\theta \in \mathbb{R}$, nous dirons que $\tilde{\varphi} \in \frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$ est Borel-sommable dans la direction θ , et nous noterons $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}, \theta}$, lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

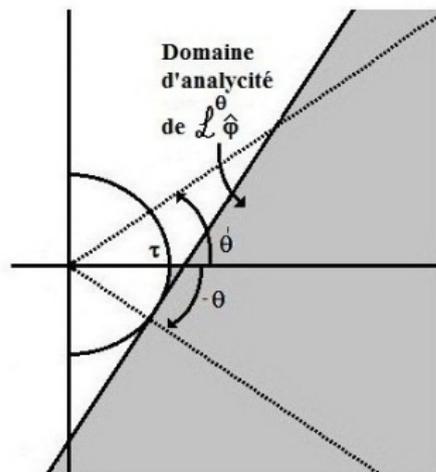
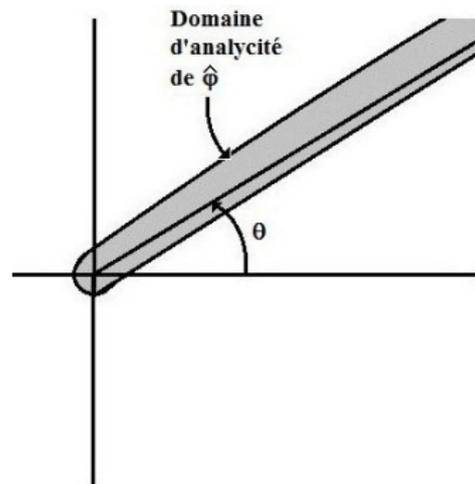
- 1 $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$ se prolonge analytiquement sur un voisinage Ω de $e^{i\theta} \mathbb{R}_+$.
- 2 $\exists C > 0, \exists \tau > 0, \forall \zeta \in \Omega, |\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C e^{\tau|\zeta|}$.

Dans ce cas, la somme de Borel correspondante, notée $S^\theta(\tilde{\varphi})$, est définie par :

$$S^\theta(\tilde{\varphi})(z) = \mathcal{L}^\theta(\mathcal{B}(\tilde{\varphi}))(z) = \int_0^{e^{i\theta} \infty} \mathcal{B}(\tilde{\varphi})(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta \dots$$

Une telle somme est alors automatiquement analytique sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}; \Re(e^{i\theta} z) > \tau\}$.

Domaine d'holomorphie de $S^\theta(\tilde{\varphi})$.



Exemple : Si $\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$, alors $S^0(\tilde{\varphi})(z) = \frac{1}{z+1}$.

$$\text{Ainsi : } 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2} .$$

Ce procédé sommatoire est satisfaisant, au sens où :

- 1 Si $\tilde{\varphi} \in \mathbb{C} \left\{ \frac{1}{z} \right\}$ est définie sur un voisinage Ω de l'infini, alors les sommes de Borel $S^\theta(\tilde{\varphi})$ coïncident avec $\tilde{\varphi}$ sur Ω , pour toute direction $\theta \in \mathbb{R}$.
- 2 $S^\theta : \mathcal{S}_{\mathcal{B},\theta} \longrightarrow \mathbb{C} \left\{ \frac{1}{z} \right\}$ est un homomorphisme d'algèbres injectif qui commute avec la dérivation.
- 3 Si $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}_{\mathcal{B},\theta}$ alors $S^\theta(\tilde{\varphi})$ admet $\tilde{\varphi}$ comme développement asymptotique à l'infini.

Diagramme résumé.

$$\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}} \in \frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\frac{1}{z} \right] \cap \mathcal{S}_{\mathcal{B}, \theta} .$$

(série formelle sommable au sens de Borel dans la direction θ) .

\mathcal{B}

$$\hat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} \zeta^n .$$

(fonction se prolongeant analytiquement au voisinage de $e^{i\theta} \mathbb{R}_+$ et à croissance exponentiellement contrôlée) .

Développement asymptotique à l'infini.

\mathcal{L}^θ

$$S^\theta(\tilde{\varphi})(z) = \mathcal{L}^\theta \hat{\varphi}(z) = \int_0^{e^{i\theta} \infty} \hat{\varphi}(\zeta) e^{-\zeta z} d\zeta .$$

(fonction analytique définie sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} ; \Re(e^{i\theta} z) > 0\}$) .

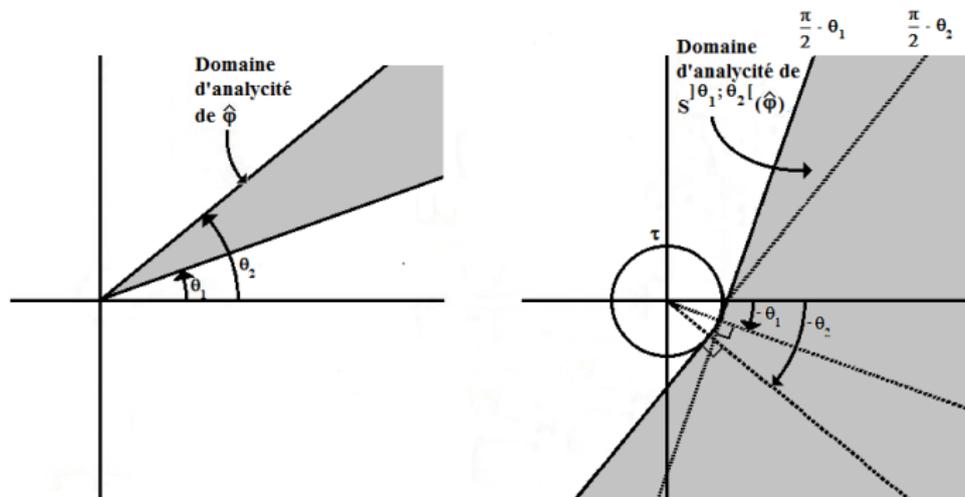
Définition

On dit qu'une série formelle $\tilde{\varphi}$ est uniformément Borel-sommable dans l'intervalle de direction $[\theta_1; \theta_2]$ lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

- 1 $\hat{\varphi}$ se prolonge analytiquement sur un voisinage de

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\} .$$

- 2 $\exists (C; \tau) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\forall \zeta \in \Omega$, $|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq Ce^{\tau|\zeta|}$.



Pourquoi travailler dans le plan de Borel ?

- 1 Dans le plan multiplicatif, il est nécessaire de faire de l'analyse de Fourier. Dans le plan de Borel, les invariants seront localisés en un point.
- 2 Le passage au plan de Borel permet de traiter divers sur-groupe de \mathcal{T} (à croissance Gevrey 2^- par exemple), qui n'ont plus aucune interprétation dans le plan multiplicatif mais qui possèdent néanmoins des classes de conjugaisons non-triviales et des invariants en tout point analogues à ceux des difféomorphismes analytiques.
- 3 Le passage au plan de Borel nous fournira deux des quatre méthodes de calcul numérique que nous allons exposer.

■ Singularités simples.

Soit $\widehat{\varphi}$, holomorphe sur un disque ouvert D .

$\widehat{\varphi}$ possède une singularité simple en un point ω adhérent à D lorsque :

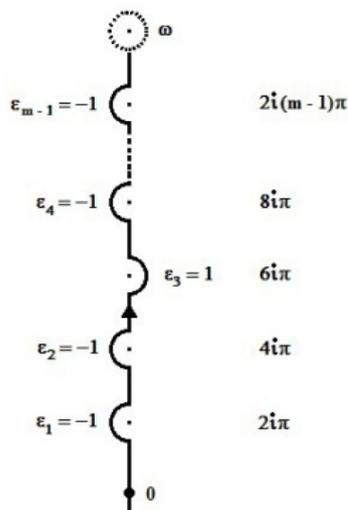
$$\widehat{\varphi}(\zeta) \underset{(\zeta \rightarrow \omega)}{=} \frac{C}{2i\pi(\zeta - \omega)} + \frac{1}{2i\pi} \widehat{\Phi}(\zeta - \omega) \log(\zeta - \omega) + \text{reg}(\zeta - \omega) .$$

On notera cette égalité sous la forme :

$$\text{sing}_{\omega} \widehat{\varphi} = C\delta + \widehat{\Phi} \in \mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\{\zeta\} .$$

■ Prolongement sans fin.

Un germe φ de fonction holomorphe en 0 se prolonge sans fin sur \mathbb{C} lorsque, pour toute ligne brisée finie L , il existe un ensemble fini $\Omega_L \subset L$ de singularités tel que φ se prolonge analytiquement le long de tous les chemins possibles obtenus en suivant L et en contournant chaque point de Ω_L soit à gauche, soit à droite.



■ Fonctions résurgentes dans le modèle convolutif.

Les fonctions résurgentes sont les germes en 0 de fonctions holomorphes se prolongeant sans fin sur \mathbb{C} et à singularités simples.

■ Fonctions résurgentes dans le modèle formel.

Dans le modèle formel, les fonctions résurgentes sont les séries formelles de $\frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$ dont la transformée de Borel est une fonction résurgente dans le modèle convolutif.

Notation : On note RES l'ensemble des fonctions résurgentes dans l'un ou l'autre des modèles.

Exemples : f^* est $*f$ sont résurgentes : leurs transformées de Borel sont définies uniformes sur $\mathbb{C} - \widetilde{2\pi i \mathbb{Z}}$.

Pour tout $\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$, on définit une dérivation, par rapport à la convolution, "mesurant" les singularités au voisinage de ω :

$$\Delta_\omega : \text{RES} \longrightarrow \text{RES} ,$$

$$\forall \omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^* , \Delta_\omega(\hat{\varphi}) = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_{\pm 1}; \dots; \varepsilon_{\pm(m-1)}) \in \{+1; -1\}^{m-1}} \frac{p(\varepsilon)! q(\varepsilon)!}{m!} \text{sing}_\omega(\text{cont}_{\gamma(\varepsilon)}\hat{\varphi}) .$$

Plus simplement, on définit $\Delta_\omega^+ : \text{RES} \longrightarrow \text{RES}$ en ne considérant que des contournements par la droite : ce n'est plus une dérivation.

Rappel : Les invariants de f , notés $(A_{2i\pi}^+(f))_{n \in \mathbb{Z}^*}$, sont les coefficients de Fourier de $\pi_f^+ - id_{\mathbb{C}}$.

Propriété : $\forall \omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^* , \Delta_\omega^+(*f) = A_\omega^+(f) \partial_z^* f + \mathcal{O}(\partial_z^2)^* f .$

Fixons-nous un germe de fonction holomorphe $a \in \frac{1}{z^2}\mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\}$ et étudions l'équation aux différences dont l'inconnue est la série formelle $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}(z+1) - \tilde{\varphi}(z) = a(z) .$$

- 1 La résolution de cette équation va produire des fonctions S-résurgentes, qui seront particulièrement simples
- 2 La méthode mise en oeuvre, convenablement itérée, nous sera à nouveau utile pour calculer les invariants holomorphes.

Par passage à la transformation de Borel, en notant $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$:

1 $e^{-\zeta} \hat{\varphi}(\zeta) - \hat{\varphi}(\zeta) = \hat{a}(\zeta)$, d'où $\hat{\varphi}(\zeta) = \frac{\hat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1}$.

2 $\hat{\varphi}$ définit une fonction méromorphe sur \mathbb{C} dont les pôles ne peuvent être situés qu'en $2i\pi\mathbb{Z}^*$, puisque \hat{a} est une fonction entière s'annulant à l'origine et de type exponentiel dans toutes les directions.

L'équation $\tilde{\varphi}(z+1) - \tilde{\varphi}(z) = a(z)$ possède donc une unique solution dans $\frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$:

$$\tilde{\varphi} = \mathcal{B}^{-1} \left(\frac{\hat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1} \right) .$$

Celle-ci est donc S-résurgente, et vérifie : $\Delta_{\omega} \hat{\varphi} = -\hat{a}(\omega) = (1 - e^{-\omega}) \hat{\varphi}(\omega)$, pour $\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$.

Ainsi, $\hat{\varphi}$ "resurgit" en la singularité ω .

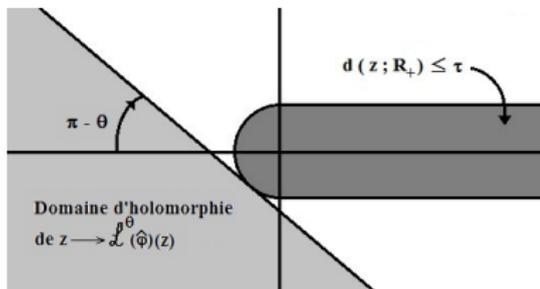
Resommation sectorielle des solutions.

$\tilde{\varphi}$ est sommable au sens de Borel dans les directions $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$.

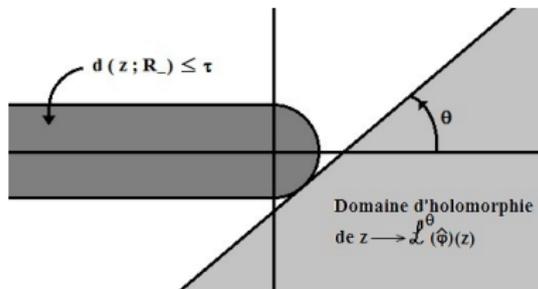
Le principe de resommation sectorielle donne deux solutions analytiques, φ^+ et φ^- , définies par :

$$\varphi^+ = \mathcal{L}^\theta \left(\frac{\hat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1} \right), \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{et} \quad \varphi^- = \mathcal{L}^\theta \left(\frac{\hat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1} \right), \theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[.$$

définies sur $\begin{cases} \mathcal{D}^+ = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} ; d(z; \mathbb{R}_-) \leq \tau\} . \\ \mathcal{D}^- = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} ; d(z; \mathbb{R}_+) \leq \tau\} . \end{cases}$



Domaine d'holomorphy de la resommée sectorielle φ^+ .



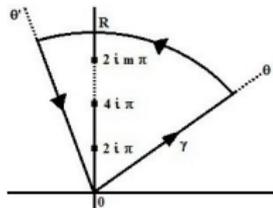
Domaine d'holomorphy de la resommée sectorielle φ^- .

Que vaut $\varphi_+ - \varphi_-$?

Calculons la différence $\varphi^+ - \varphi^-$ dans chacune des deux composantes connexes de $\mathcal{D}^+ \cap \mathcal{D}^-$.

Le théorème des résidus fournit alors, si γ est le chemin d'intégration ci-contre :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \widehat{\varphi}(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta &= \sum_{k=1}^m 2i\pi \operatorname{Res} \left(z \mapsto \frac{\widehat{a}(\zeta) e^{-\omega z}}{e^{-\zeta} - 1} ; 2ik\pi \right) \\ &= - \sum_{k=1}^m 2i\pi \widehat{a}(2ik\pi) e^{-2ik\pi z} . \end{aligned}$$



D'où : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\Im m z < -\tau$, $\varphi^+(z) - \varphi^-(z) = - \sum_{\omega \in 2i\pi\mathbb{N}^*} 2i\pi \widehat{a}(\omega) e^{-\omega z}$.

De même : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\Im m z > \tau$, $\varphi^+(z) - \varphi^-(z) = - \sum_{\omega \in -2i\pi\mathbb{N}^*} 2i\pi \widehat{a}(\omega) e^{-\omega z}$.

$$\text{On peut aussi remarquer que } \begin{cases} \varphi^+(z) = - \sum_{k=0}^{+\infty} a(z+k) . \\ \varphi^-(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a(z-k) . \end{cases}$$

Alors, si $a(z) = \frac{1}{z^p}$ pour $p \geq 2$, on retrouve une série d'Eisenstein et son développement en série de Fourier :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathcal{D}^+ \cap \mathcal{D}^-, \quad \mathcal{T}e^p(z) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+k)^p} = \varphi^-(z) - \varphi^+(z) \\ &= \begin{cases} -\frac{(-2i\pi)^p}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{p-1} e^{2ik\pi z} & , \text{ si } \Im m z > \tau . \\ \frac{(2i\pi)^p}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{p-1} e^{-2ik\pi z} & , \text{ si } \Im m z < -\tau . \end{cases} \end{aligned}$$

On s'intéresse aux difféomorphismes tangents à l'identité :

$$f(z) = z + 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

On pose aussi $l : z \mapsto z + 1$.

$$\blacksquare \exists f^* \in z + \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right], f^* \circ f = l \circ f^*.$$

$$\exists {}^*f \in z + \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right], f \circ {}^*f = {}^*f \circ l.$$

■ f^* et *f sont résurgentes.

■ $\pi_f^+ = f_+^* \circ {}^*f_-$ commute avec l et est invariante par conjugaison.

■ les coefficients de Fourier de $\pi^+ - id_{\mathbb{C}}$ sont les invariants $A_{2in\pi}^+(f)$.

Problématique : Calculer numériquement les $A_{2in\pi}^+(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$.
Comprendre comment sont construits ces invariants.

- **Méthode 0** : Analyse de Fourier dans le plan multiplicatif.

$$A_{2in\pi}^+(f) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{[z; z+1]} \left(I^{\circ(-\rho)} \circ f^{\circ(2\rho)} \circ I^{\circ(-\rho)}(z) - z \right) e^{-2in\pi z} dz .$$

Numériquement, c'est très mauvais.

- **Méthode 1** : Asymptotique des coefficients.
- **Méthode 2** : Analyse résurgente dans le plan de Borel et transformation conforme.
- **Méthode 3** : Méthode universelle.

Méthode 1 : Asymptotique des coefficients.

Soit $\hat{\varphi}$ un germe de fonction holomorphe en 0, prolongeable sur un disque de rayon $r = |\omega|$, où ω est une singularité de $\hat{\varphi}$ supposée unique.

Exprimons $\hat{\varphi}$ sous la forme :

$$\hat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} J(n) \zeta^n .$$

Supposons que les coefficients $J(n)$ admettent le développement asymptotique :

$$J(n) = e^{-n\nu_0} J_{\nu_0}(n) + o(e^{-n\nu_0} J_{\nu_0}(n)) \quad , \text{ où } J_{\nu_0}(n) \in \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{n} \right] \right] .$$

Alors :

$$\hat{\varphi}(\zeta) = \hat{J}_{\nu} \left(\log \left(1 + \frac{\zeta}{\zeta_0} \right) \right) .$$

■ Application :

Cela permet de calculer la première paire d'invariants holomorphes avec une excellente précision.

■ Exemple :

Pour $f(z) = z + 1 + \frac{1}{10z^2}$, on trouve :

$$A_{2i\pi}^+ \approx \begin{array}{l} -14.91351103557842215407015963733918802397 \dots \\ -7.429352270694850476346650109888076885387 \dots i . \end{array}$$

On obtient environ 60 décimales en 20 minutes de calculs, avec Maple.

Méthode 2 : Analyse résurgente dans le plan de Borel et transformation conforme.

- Les itérateurs direct et réciproque $f^*(z)$ et ${}^*f(z)$ ont des transformées de Borel $\widetilde{f^*}(\zeta)$ et $\widetilde{{}^*f}(\zeta)$ qui sont définies uniformes sur la surface de Riemann $\mathcal{R} = \mathbb{C} - 2\pi i \mathbb{Z}$.
- L'application remarquablement explicite :

$$w \mapsto -\log(1 - \lambda(w)) = 16 \sum_{\substack{n \text{ impair} \\ \geq 1}} u_n e^{2\pi i n w} \quad \text{avec}$$
$$\lambda = \text{fonction modulaire} \quad ; \quad u_n := \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d$$

envoie conformément le demi-plan de Poincaré $\mathcal{P} = \{\Im m(w) > 0\}$ sur \mathcal{R} .

Méthode 2 : Analyse résurgente dans le plan de Borel et transformation conforme (suite) .

- Sur \mathcal{P} les dérivations étrangères Δ_ω d'indice $\omega \in 2\pi i\mathbb{Z}^*$ revêtent une forme très simple:

$$\forall \varphi : \quad \Delta_\omega \cdot \varphi \equiv \sum_j \varphi \circ h_{\omega,j} \quad (\text{somme finie})$$

avec des homographies entières $h_{\omega,j} \in Sl_2(\mathbb{Z})$.

- Inconvénient : Si ω est grand, $\inf_{j,w} \Im(h_{\omega,j}(w))$ est petit, ce qui force à approcher la frontière de \mathcal{P} , où les calculs sont coûteux.
- Précision à escompter :

n		nombre de coeff de f^* ou $*f$		précision de $A_{\pm 2\pi in}$
1		200		80 décimales
2		400		70 décimales
3		600		65 décimales
...	

- Notons $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N}; n \geq k\}$, pour $k \in \mathbb{N}$.
- $\text{seq}(E)$ désigne l'ensemble des séquences finies dont les éléments sont dans l'ensemble E .
- La séquence vide est notée \emptyset .

- Notons f sous la forme $f(z) = z + 1 + \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{z^{n-1}}$.

- A_\bullet défini sur $\text{seq}(\mathbb{N}_3)$ par : $A_{\underline{s}} = a_{s_1} \cdots a_{s_r}$.

- \mathcal{A}_\bullet défini sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ par : $\mathcal{A}_{\underline{s}} = A_{s_1} \cdots A_{s_r}$.

Méthode 3 : Définitions des multizêtas et des multitangentes.

On note : $\mathcal{S}_d^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2\}$.

$\mathcal{S}_{df}^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2 \text{ et } s_r \geq 2\}$.

Définition des multizêtas.

Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*$.

On pose : $\mathcal{Z}e^{\underline{s}} = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}$.

Définition des multitangentes.

Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$.

On pose : $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}}$.

On note alors :
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{MZV} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*} . \\ \mathcal{MTGF} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*} . \end{array} \right.$$

On développe chaque $A_{2in\pi}^+(f)$ comme fonction entière de f , i.e. de l'infinité des coefficients de Taylor de f :

Théorème : Soit f un difféomorphisme tangent à l'identité, convergent, s'exprimant à l'infini sous la forme $f(z) = z + 1 + \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{z^{n-1}}$.

Alors :

- 1 Il existe des coefficients τ^\bullet , explicites, définis sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, à valeurs dans l'algèbre \mathcal{MTGF} tels que :

$$\pi_f^+ = \sum_{\underline{s} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \tau^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}}.$$

- 2 Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, il existe des coefficients $\hat{\tau}_n^\bullet$, explicites, définis sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ à valeurs dans l'algèbre \mathcal{MZV} tels que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, A_n^+(f) = \sum_{\underline{s} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \hat{\tau}_n^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}}.$$

- On vérifie que l'on peut écrire $\pi_f^+(z) - z = \sum_{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z})} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{\mathbf{n}} \cdot z$, où :

$$U^{\mathbf{n}} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } n_r < n_{r-1} < \dots < n_1 . \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_n \cdot \varphi(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{(\varphi(z+n) - z)^k}{k!} \partial_z^k \varphi(z) \\ \Gamma_{\mathbf{n}} = \Gamma_{n_r} \circ \dots \circ \Gamma_{n_1} \end{cases}$$

- On calcule $\Gamma_{\mathbf{n}} \cdot z$.
- On évalue les coefficients de Fourier de $\pi_f^+ - id$, en utilisant la convergence normale de $\sum_{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z})} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{\mathbf{n}} \cdot z$, sur tout compact d'un demi-plan supérieur ou inférieur.
- On en déduit les expressions précédentes de $\pi_f^+ - id$ et des invariants $A_n^+(f)$.

Remarque : réduction en monotangentes.

On a utilisé un lemme très important :

Remarque : Une monotangente est une multitangente de longueur 1 , c'est une série d'Eisenstein.

Rappelons que : $\mathcal{MZV} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}} (\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*}$.

$$m(\underline{s}) = \max(s_1; \dots; s_r), \text{ pour tout } \underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) .$$

Propriété : Réduction en monotangentes des multitangentes convergentes.

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^* , \exists (z_2; \dots; z_{m(\underline{s})}) \in \mathcal{MZV}^{m(\underline{s})-1} , \mathcal{T}e^{\underline{s}} = \sum_{\substack{k=1 \\ \cancel{k=2}}}^{m(\underline{s})} z_k \mathcal{T}e^k .$$

Eléments de preuves :

1. Décomposition en éléments simple de $\frac{1}{(n_1 + X)^{s_1} \dots (n_r + X)^{s_r}}$.

2. En utilisant un argument analytique :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R} , |\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq 4r \left(\frac{2}{|\Im m z|} \right)^{s_1 + \dots + s_r - r - 1} \frac{e^{-\pi |\Im m z|}}{1 - e^{-\pi |\Im m z|}} .$$

Poids 4

$$\mathcal{T}e^{2,2} = 2\zeta(2)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,3} = -3\zeta(3)\mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,2} = 3\zeta(3)\mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,2} = 0 .$$

Poids 5

Poids 6

$$\mathcal{T}e^{2,4} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - 2\zeta(3)\mathcal{T}e^3 + \zeta(2)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,3} = -\frac{12}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,2} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + 2\zeta(3)\mathcal{T}e^3 + \zeta(2)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,2} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,3} = -\frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + \zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,2} = -\frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - \zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,2} = \frac{4}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$$

- Choix d'une fonction d'épreuve à un paramètre : $f = l \circ g$, où :

$$l(z) = z + 1 .$$

$$g(z) = (\exp(\alpha z^{-2} \partial_z)) \cdot z = z(1 + 3\alpha z^{-3})^{1/3} .$$

Alors : $f(z) = z + 1 + \frac{\alpha}{z^2} + \mathcal{O}(z^{-3})$.

- Posant $\sigma : z \mapsto -z$, on voit qu'ici $\sigma \circ f \circ \sigma$ est conjugué à f^{-1} .
Donc $\pi_f^+ - id_{\mathbb{C}}$ est paire, i.e. π_f^+ s'exprimera en fonction des seules monotangentes *paires* :

$$\mathcal{T}e^{s_1}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^{s_1}} , \quad \text{avec } s_1 \text{ pair.}$$

- π_f^+ en fonction des multitangentes :

$$\begin{aligned}\pi_f^+ &= +\alpha \cdot \mathcal{T}a^2 \\ &\quad -\alpha^2 \cdot (2\mathcal{T}a^{3,2}) \\ &\quad +\alpha^3 \cdot (4\mathcal{T}a^{3,3,2} + 6\mathcal{T}a^{4,2,2}) \\ &\quad -\alpha^4 \cdot (8\mathcal{T}a^{3,3,3,2} + 12\mathcal{T}a^{3,4,2,2} + 12\mathcal{T}a^{4,2,3,2} + 24\mathcal{T}a^{4,3,2,2} + 24\mathcal{T}a^{5,2,2,2}) \\ &\quad +\mathcal{O}(\alpha^5)\end{aligned}$$

- π_f^+ en fonction des monotangentes et des multizêtas non réduits :

$$\begin{aligned}
 \pi_f^+ = & +\alpha \cdot \mathcal{T}e^2 && + \alpha^2 \mathcal{T}e^2 \cdot (-6\zeta(3)) \\
 & +\alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot (+26\zeta(6) + 2\zeta(4,2) - 16\zeta(2,4) + 36\zeta(3,3)) \\
 & +\alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^4 \cdot (+\zeta(4) - 2\zeta(2,2)) + \alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\zeta(2)\right) \\
 & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot (-86\zeta(9) + 52\zeta(5,4) + 68\zeta(7,2) - 34\zeta(4,5) \\
 & \quad - 156\zeta(3,6) + 224\zeta(2,7) - 246\zeta(6,3) - 16\zeta(4,3,2) \\
 & \quad + 56\zeta(5,2,2) - 216\zeta(3,3,3) + 96\zeta(3,2,4) - 12\zeta(4,2,3) \\
 & \quad + 64\zeta(2,3,4) - 12\zeta(3,4,2) + 64\zeta(2,5,2) + 96\zeta(2,4,3)) \\
 & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^4 \cdot (+2\zeta(7) + 34\zeta(2,5) + 30\zeta(5,2) - 10\zeta(3,4) - 18\zeta(4,3) \\
 & \quad + 12\zeta(2,2,3) + 16\zeta(2,3,2) + 20\zeta(3,2,2)) \\
 & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^6 \cdot \left(+\frac{13}{3}\zeta(5) + 4\zeta(2,3) + \frac{14}{3}\zeta(3,2)\right) \\
 & +\mathcal{O}(\alpha^5)
 \end{aligned}$$

- π_f^+ en fonction des monotangentes et des multizêtas réduits :

$$\begin{aligned}\pi_f^+ = & +\alpha \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot \quad \quad \quad +\alpha^2 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot (-6\zeta(3)) \\ & +\alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot \left(-\frac{32}{5}\zeta(2)^3 + 36\zeta(3)^2\right) + \alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\zeta(2)^2\right) \\ & +\alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\zeta(2)^2\right) \\ & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot \left(\frac{576}{5}\zeta(3)\zeta(2)^3 - 216\zeta(3)^3 - 210\zeta(9)\right) \\ & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^4 \cdot \left(14\zeta(7) + \frac{18}{5}\zeta(3)\zeta(2)^2\right) \\ & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^6 \cdot \left(6\zeta(2)\zeta(3) - \frac{10}{3}\zeta(5)\right) \\ & +\mathcal{O}(\alpha^5)\end{aligned}$$

Méthode 3 : Exemple de calculs d'invariants (fin) .

- Les invariants $A_{\pm 2\pi i}(f)$ comme fonctions entières du paramètre α :

$A_{\pm 2\pi i}(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c_n \alpha^n$ est une fonction entière de l'unique paramètre α , de type exponentiel en $\alpha^{1/2}$.

Ses 12 premiers coefficients, de signes alternés, valent :

$$\begin{aligned} c_1 &= -\mathbf{39.4784176043574344753...} \\ c_2 &= +\mathbf{284.7318264428106410205...} \\ c_3 &= -\mathbf{788.4456763395103611766...} \\ c_4 &= +\mathbf{1183.670897479215553310...} \\ c_5 &= -\mathbf{1124.013101882737214516...} \\ c_6 &= +\mathbf{738.577609773162031453...} \\ c_7 &= -\mathbf{356.388791016996809...} \\ c_8 &= +\mathbf{131.76870562724...} \\ c_9 &= -\mathbf{38.5440209553...} \\ c_{10} &= +\mathbf{9.1457604...} \\ c_{11} &= -\mathbf{1.796...} \\ c_{12} &= +\mathbf{0.3...} \end{aligned}$$

Comparaison des méthodes.

Calcul de $A_{2in\pi}^+(f)$	Dépendance en f .	Dépendance en n .	Paramètres ?
Méthode 0	\emptyset	\emptyset	\emptyset
Méthode 1	+	-	-
Méthode 2	+	-	-
Méthode 3	-	+	+

Calcul de $A_{2in\pi}^+(f)$	$\rho \neq 0.$	$\rho \geq 1.$
Méthode 0	\emptyset	\emptyset
Méthode 1	+	+
Méthode 2	+	+
Méthode 3	+	-

Pourquoi étudier les relations entre multitangentes ?

- Les *multitangentes* (resp. *multizêtas*) sont l'unique ingrédient transcendant entrant dans la construction des invariants holomorphes π_f^+ (resp. $A_\omega(f)$). Il s'agit donc de comprendre quelles sont précisément les propriétés des multitangentes et multizêtas qui sont responsables de cette invariance.
- Il existe des analogies manifestes entre multitangentes et multizêtas, qui sont définis par des sommes analogues et vérifient une même table de multiplication.

Multizêtas dynamiques.

Appelons **multizêtas dynamiques** toute famille de nombres qui, substitués aux '*vrais*' *multizêtas*, préservent l'invariance des $A_\omega(f)$.

Appelons **multizêtas dimorphiques** toute famille de nombres satisfaisant aux deux classiques familles de "relations quadratiques" qui sont vérifiées par les '*vrais*' *multizêtas* et qui, de l'avis général, paraissent épuiser la totalité de leur arithmétique.

Il se trouve:

- 1 que les propriétés des *multizêtas dynamiques* sont plus faibles que celles des *multizêtas dimorphiques*.
- 2 que les dites propriétés des *multizêtas dynamiques* sont précisément celles qui se déduisent de leurs analogues chez les multitangentes.
- 3 que les *multizêtas dynamiques* et les *multizêtas dimorphiques* constituent deux \mathbb{Q} -anneaux engendrés chacun par une famille dénombrable d'*irréductibles*, mais avec des *irréductibles dynamiques* plus 'nombreux' (car sujets à moins de contraintes) et plus faciles à décrire que les *irréductibles dimorphiques*.

- Les invariants holomorphes sont certes couteux mais parfaitement calculables.
- Ils suggèrent d'intéressantes questions arithmétiques, tant sur les multitangentes et sur les multizêtas que sur les relations des premiers aux seconds.