Introduction au calcul moulien :
l'exemple du théorème de linéarisation de Poincaré.

Olivier Bouillot

19 mai 2010

Séminaire des doctorants,
Université Paris-Sud

But ultime :

Trouver un changement de variables qui permetta de résoudre / simplifier le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & = & a_1(y_1(t), \cdots, y_n(t)) \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} & = & a_n(y_1(t), \cdots, y_n(t)) \end{array}\right. .$$

Rappels sur les champs de vecteurs (suite).

Définition : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On appelle **champ de vecteurs** de classe C^k, de $\mathbb{R}^n$, une application $X = (a_1, \cdots, a_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que toutes les fonctions $a_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ soient de classe C^k sur $\mathcal{U}$.

Définition : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On appelle **champ de vecteurs** holomorphe, de $\mathbb{C}^n$, une application $X = (a_1, \cdots, a_n) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ leque toutes les fonctions $a_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ soient holomorphes sur $\mathcal{U}$.

Notation : Un tel champ sera noté : $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Rappels sur les champs de vecteurs (suite).

A un système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & = & a_1(y_1(t), \cdots, y_n(t)) \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} & = & a_n(y_1(t), \cdots, y_n(t)) \end{array} \right.$$

on associe un champ de vecteurs $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Et réciproquement.

Expérimentation.

Si $X(x_0) \neq 0$, on sait que les courbes intégrales sont sensiblements parallèle au voisinage de x_0.

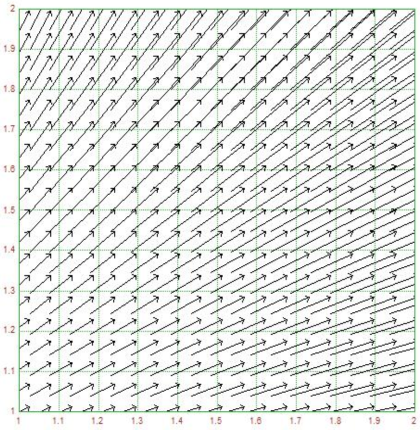

Figure: Un champ ne s'annulant pas.

Expérimentation (suite).

Si $X(x_0) = 0$, il est facile de constater que plusieurs configurations sont possibles.

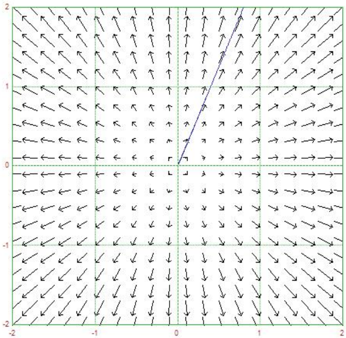

Figure: Le champ $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

$(0, 0)$ est un noeud instable.

Expérimentation (suite).

Si $X(x_0) = 0$, il est facile de constater que plusieurs configurations sont possibles.

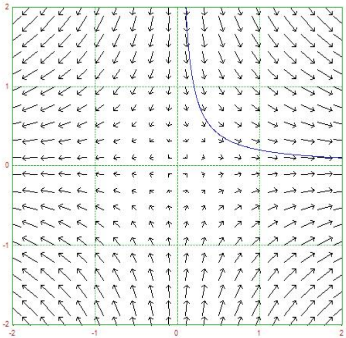

Figure: Le champ $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} - y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

$(0, 0)$ est un col (toujours instable).

Expérimentation (suite).

Si $X(x_0) = 0$, il est facile de constater que plusieurs configurations sont possibles.

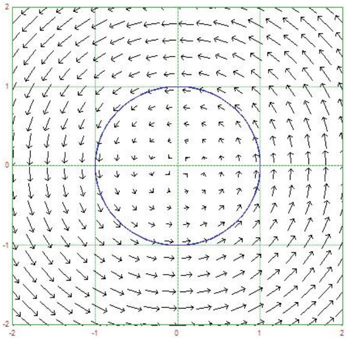

Figure: Le champ $X = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.

$(0,0)$ est un centre.

Expérimentation (suite).

Si $X(x_0) = 0$, il est facile de constater que plusieurs configurations sont possibles.

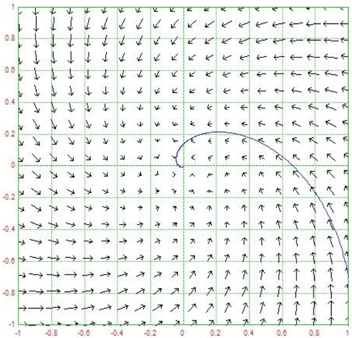

Figure: Le champ $X = -(x+y)\dfrac{\partial}{\partial x} + (x-y)\dfrac{\partial}{\partial y}$.

$(0, 0)$ est un foyer stable.

Expérimentation (suite).

Il est faux, en toute généralité, qu'un champ de vecteurs se comporte au voisinage d'un point singulier comme sa partie linéaire :

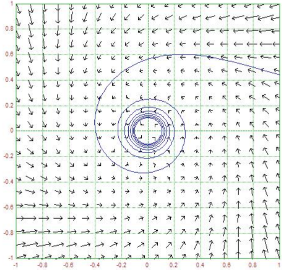

Figure: $(0,0)$ est un foyer stable.

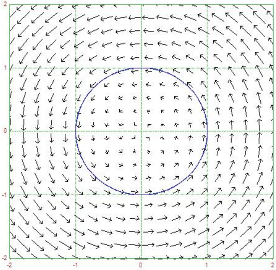

Figure: $(0,0)$ est un centre.

$$\text{Le champ } X = \left(-y + x(x^2+y^2)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(x - y(x^2+y^2)\right)\frac{\partial}{\partial y} \text{ (à gauche),}$$

et sa partie linéaire (à droite).

Problème...

<u>**Définition :**</u> Un point x_0 d'un champ de vecteurs X est dit <u>**singulier**</u> lorsque $X(x_0) = 0$.
Il est dit <u>**régulier**</u> dans le cas contraire.

But :

Classifier les champ de vecteurs entres eux, au voisinage d'un point singulier (par conjugaison).

Un changement de cartes, permettra (peut-être ?) de simplifier l'écriture de X, et ne changera pas l'allure des courbes intégrales.

Problème... (suite).

Définition : Soit θ un changement de variables formel ou analytique. On appelle **opérateur de substitution** l'application Θ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & \mathbb{C}[\![x]\!] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\![x]\!] \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ \theta \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Theta : & \mathbb{C}\{x\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{x\} \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ \theta \end{array}$$

Cadre formel **Cadre analytique**

Définition : Deux champ vecteurs X et Y sont dit conjugués analytiquement (resp. formellement) s'il existe un changement de variable θ analytique (resp. formel) tel que : $Y = \Theta.X.\Theta^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\{x\} \arrow[r, "X"] & \mathbb{C}\{x\} \\ \mathbb{C}\{y\} \arrow[u, "\Theta"] \arrow[r, "Y"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{C}\{y\} \arrow[u, "\Theta"'] \end{tikzcd}$$

Problème... (suite).

Objectif :

Déterminer des conditions pour qu'un champ de vecteurs singulier soit conjugué à sa partie linéaire.

Réponse la plus simple : Une condition formelle est :
lorsque le champ de vecteurs est non résonnant.

Notion de champ de vecteurs résonnant.

Définition : Un vecteur $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ est dit **résonant** s'il existe une relation entre ses composantes de la forme :

$$\lambda_i = < \lambda, k >, \text{ où } k \in \mathbb{N}^n \text{ vérifie } k_1 + \cdots k_n \geq 2.$$

Un vecteur est dit **non-résonant** dans le cas contraire.

Exemples : Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.
1. $\lambda_1 = 2\lambda_2$ est une résonance.
2. $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ est une résonance, car $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$.
3. $3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ n'est pas une résonance.

Définition : Un champ de vecteurs X est dit **non résonant** si son spectre, c'est à dire l'ensemble des valeurs propres de sa partie linéaire, est non résonant.

Théorème de Poincaré de linéarisation d'un champ de vecteurs.

Théorème : (H. Poincaré)

Soit X un champ de vecteurs holomorphe de C^n, défini localement et singulier en 0, et X^{lin} sa partie linéaire.

Si X est non résonant et X^{lin} est diagonalisable, alors X est formellement conjugué à X^{lin} :

il existe un changement de variable formel θ tel que : $\Theta.X.\Theta^{-1} = X^{\text{lin}}$

Contexte et “forme préparée” d’un champ de vecteurs.

- Soit $X = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteurs local de $\mathbb{C}^n$, singulier en 0 :

$$\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!], \; \begin{cases} X_i \in \mathbb{C}\{x\}. \\ X_i(0) = 0. \end{cases}$$

  dont la partie linéaire X^{lin} est diagonalisable.

- Quitte à effectuer un changement de variables complètement explicite, on peut supposer que X^{lin} est diagonal :

$$X^{\text{lin}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Contexte et “forme préparée” d’un champ de vecteurs (suite).

On écrit :

$$X = X^{\mathrm{lin}} + \sum_{p \in \Omega} B_p$$

où :

- X^{lin} est diagonal :

$$X^{\mathrm{lin}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

- Ω désigne l’ensemble des n-uplets $(p_1, \cdots, p_n)$ d’entiers positifs, sauf au plus un, qui peut valoir -1, tels que $|p| = \sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1$.
- B_p est un opérateur homogène de degré $p \in \Omega$:

$$\forall q \in \mathbb{N}^n,\ \exists C_{p,q} \in \mathbb{C},\ B_p(x^q) = C_{p,q} x^{p+q}$$

On dit qu’on a mis sous **forme préparée** le champ de vecteurs X.

Grande idée du calcul moulien.

Grande idée du calcul moulien :

Chercher Θ sous la forme d'une somme (formelle) du type :

$$\Theta = Id + \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{(\omega_1,\cdots,\omega_r)\in\Omega^r} S^{\omega_1,\cdots,\omega_r} B_{\omega_r} \circ \cdots \circ B_{\omega_1}$$

avec une collection de scalaires $\left(S^{\omega_1,\cdots,\omega_r}\right)_{\substack{r\in\mathbb{N}^* \\ (\omega_1,\cdots,\omega_r)\in\Omega^r}}$ à déterminer.

Notion d'alphabet.

Dans tout ce qui suit $(\Omega, +)$ désignera un semi-groupe, appelé **alphabet**.
Le monoïde libre construit sur Ω, noté $\Omega^\bullet$, désigne l'ensemble de tous les mots construits à partir des "lettres" de l'alphabet Ω.

$$\Omega^\bullet = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega^n$$

La loi est la concaténation des mots, notée (si nécessaire) "." .

Exemples :

$\Omega = \{i; m; n\}$: mini $= (m, i, n, i) \in \Omega^\bullet$

$\Omega = \{0; 1\}$: $101 = (1, 0, 1) \in \Omega^\bullet$

Notion d'alphabet (suite).

Notations : $\rightarrow$ Un mot de $\Omega^\bullet$ sera toujours noté en gras et souligné : $\underline{\boldsymbol{\omega}}$.

$\rightarrow$ Le mot vide sera noté $\emptyset$.

$\rightarrow$ $r = l(\underline{\boldsymbol{\omega}})$ désigne la longueur du mot $\underline{\boldsymbol{\omega}}$

$\rightarrow$ Dans le cas d'une suite de mots, ceux ci serons “indiciés” en haut, leurs lettres seront bien indiciées en bas

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \text{mini} = \underline{\boldsymbol{\omega}}^1.\underline{\boldsymbol{\omega}}^2 \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \underline{\boldsymbol{\omega}}^1 = \text{mi} = (\omega_1^1, \omega_2^1) \\ \underline{\boldsymbol{\omega}}^2 = \text{ni} = (\omega_1^1, \omega_2^1) \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{\leq i} = (\omega_1, \cdots, \omega_i)$ et $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{>i} = (\omega_{i+1}, \cdots, \omega_r)$.

$\rightarrow$ $||\underline{\boldsymbol{\omega}}|| = \omega_1 + \cdots + \omega_r$.

<u>**Définition :**</u> Soit Ω un alphabet et $\mathbb{A}$ une algèbre (commutative).
On appelle <u>**moule**</u> sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{A}$, une application définie sur le monoïde libre $\Omega^{\bullet}$, à valeurs dans $\mathbb{A}$.

<u>**Notations :**</u>

$\rightarrow$ $M^{\bullet}$ désigne un moule $M : \Omega^{\bullet} \longrightarrow \mathbb{A}$.

$\rightarrow$ $M^{\underline{\omega}}$ désigne l'évaluation du moule $M^{\bullet}$ sur $\underline{\omega} \in \Omega^{\bullet}$.

$\rightarrow$ L'ensemble des moules sur Ω à valeurs dans $\mathbb{A}$ est noté :

$$\mathcal{M}^{\bullet}_{\mathbb{A}}(\Omega)$$

Donnons nous, dans toute cette section un alphabet Ω et une algèbre (commutative) $\mathbb{A}$.

Opérations sur les moules et structure d'algèbre.

Soit $\lambda \in \mathbb{A}$ et $(M^\bullet, N^\bullet) \in \mathcal{M}^\bullet_{\mathbb{A}}(\Omega)$.
On définit trois opérations sur les moules :

- **Somme :**

$$S^\bullet = M^\bullet + N^\bullet \iff \forall \underline{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega^\bullet, S^{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = M^{\underline{\boldsymbol{\omega}}} + N^{\underline{\boldsymbol{\omega}}}.$$

- **Multiplication externe :**

$$M_e^\bullet = \lambda.M^\bullet \iff \forall \underline{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega^\bullet, M_e^{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = \lambda.M^{\underline{\boldsymbol{\omega}}}.$$

- **Multiplication :**

$$P^\bullet = M^\bullet \times N^\bullet \iff \forall \underline{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega^\bullet, P^{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = \sum_{\substack{(\underline{\boldsymbol{\omega}}^1, \underline{\boldsymbol{\omega}}^2) \in (\Omega^\bullet)^2 \\ \underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\boldsymbol{\omega}}^1 . \underline{\boldsymbol{\omega}}^2}} M^{\underline{\boldsymbol{\omega}}^1} N^{\underline{\boldsymbol{\omega}}^2} = \sum_{i=0}^{l(\underline{\boldsymbol{\omega}})} M^{\underline{\boldsymbol{\omega}}^{\leq i}} N^{\underline{\boldsymbol{\omega}}^{> i}}.$$

Algèbre des moules (suite).

Propriété 1 :

$(\mathcal{M}^{\bullet}_{\mathbb{A}}(\Omega), +, ., \times)$ est une algèbre associative, unitaire, non commutative.

Lemme :

L'application moulienne $\nabla : \mathcal{M}^{\bullet}_{\mathbb{A}}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}^{\bullet}_{\mathbb{A}}(\Omega)$ définie par :

$$\forall M^{\bullet} \in \mathcal{M}^{\bullet}_{\mathbb{A}}(\Omega),\ \nabla M^{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = ||\underline{\boldsymbol{\omega}}||M^{\underline{\boldsymbol{\omega}}}$$

est une dérivation moulienne :

$$\forall (M^{\bullet}, N^{\bullet}) \in \left(\mathcal{M}^{\bullet}_{\mathbb{A}}(\Omega)\right)^2,\ \nabla(M^{\bullet} \times N^{\bullet}) = M^{\bullet} \times (\nabla\ N^{\bullet}) + (\nabla\ M^{\bullet}) \times N^{\bullet}.$$

Symétrie des moules : produit de battage de deux séquences.

Définition : On appelle **produit de battage** des séquences $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ et $\underline{\boldsymbol{\beta}}$ de $\Omega^\bullet$ l'ensemble (disjoint), noté $sh(\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \underline{\boldsymbol{\beta}})$, des séquences obtenues en mélangeant les éléments de $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ et de $\underline{\boldsymbol{\beta}}$ en respectant leur ordre.

- **Image visuelle :** mélange de deux jeux de cartes.

- **Codage en terme de polynôme non commutatif sur Ω :**

$$\begin{cases} \text{pour } \underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \Omega^\bullet, \emptyset \sqcup\!\sqcup \underline{\boldsymbol{\alpha}} = \underline{\boldsymbol{\alpha}} \sqcup\!\sqcup \emptyset = \underline{\boldsymbol{\alpha}} \\ \text{pour } (\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \underline{\boldsymbol{\beta}}) \in (\Omega^\bullet)^2, \underline{\boldsymbol{\alpha}} \sqcup\!\sqcup \underline{\boldsymbol{\beta}} = \alpha_1.(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\geq 2} \sqcup\!\sqcup \underline{\boldsymbol{\beta}}) + \beta_1.(\underline{\boldsymbol{\alpha}} \sqcup\!\sqcup \underline{\boldsymbol{\beta}}^{\geq 2}) \end{cases}$$

Symétrie des moules : SymétrAlité et alternAlité.

Rappelons que l'on note $< P|\underline{\omega} >$ le coefficient du mot $\underline{\omega} \in \Omega^\bullet$ dans le polynôme non-commutatif P.

Définition : $M^\bullet \in \mathcal{M}^\bullet_{\mathbb{A}}(\Omega)$ est dit :

- **symétrAl** lorsque

$$\begin{cases} M^{\emptyset} = 1 \\ \forall(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in (\Omega^\bullet)^2, \displaystyle\sum_{\underline{\omega} \in \Omega^\bullet} < \underline{\alpha} \sqcup\!\sqcup \underline{\beta} | \underline{\omega} > M^{\underline{\omega}} = M^{\underline{\alpha}} M^{\underline{\beta}} \end{cases}$$

- **alternAl** lorsque

$$\begin{cases} M^{\emptyset} = 0 \\ \forall(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in (\Omega^\bullet - \{\emptyset\})^2, \displaystyle\sum_{\underline{\omega} \in \Omega^\bullet} < \underline{\alpha} \sqcup\!\sqcup \underline{\beta} | \underline{\omega} > M^{\underline{\omega}} = 0 \end{cases}$$

Exemples :

- Le moule $I^\bullet$ est alternAl.
- Un moule $M^\bullet$ symétrAl vérifie :

$$M^{\omega_1} M^{\omega_2} = M^{\omega_1, \omega_2} + M^{\omega_2, \omega_1}$$

$$M^{\omega_1} M^{\omega_2, \omega_3} = M^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_1, \omega_3} + M^{\omega_2, \omega_3, \omega_1}$$

Symétrie des moules : comment montrer simplement des symétries ?

Propriété 2 :

Soit $Der : \mathcal{M}^{\bullet}_{\mathbb{A}}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}^{\bullet}_{\mathbb{A}}(\Omega)$ une dérivation moulienne préservant l'alternalité et $(S^{\bullet}, A^{\bullet}, B^{\bullet}) \in \left(\mathcal{M}^{\bullet}_{\mathbb{A}}(\Omega)\right)^3$.
Si $Der(S^{\bullet}) = S^{\bullet} \times A^{\bullet} + S^{\bullet} \times M^{\bullet}$ alors, deux des trois propriétés suivantes entrainent la troisième :

1. $S^{\bullet}$ est symétrAl.
2. $A^{\bullet}$ est alternAl.
3. $B^{\bullet}$ est alternAl.

Application : $S_0^{\bullet}$ et $(S_0^{\bullet})^{-1}$ sont symétrAux.

Notion de co-moule.

Définition : Soit Ω un alphabet.
$\mathbb{A}$ une algèbre commutative.
$\mathcal{F}$ une $\mathbb{A}$-algèbre (possiblement non commutative).
On appelle **co-moule** sur un alphabet Ω, à valeurs dans $\mathcal{F}$, une application définie sur le monoïde libre $\Omega^\bullet$ (à valeurs dans $\mathcal{F}$).

Notations :

- $\rightarrow$ $\Gamma_\bullet$ désigne un co-moule $\Gamma : \Omega^\bullet \longrightarrow \mathbb{F}$.
- $\rightarrow$ $\Gamma_{\underline{\omega}}$ désigne l'évaluation du co-moule $\Gamma_\bullet$ sur $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega^\bullet$.
- $\rightarrow$ L'ensemble des co-moules sur Ω à valeurs dans $\mathcal{F}$ est noté :

$$\mathcal{CM}^\bullet_{\mathcal{F}}(\Omega)$$

Dans toute cette section, donnons nous Ω, $\mathbb{A}$ et $\mathcal{F}$ comme ci-dessus.

Exemples de co-moules.

- **Cas fréquents :** Les co-moules sont des opérateurs différentiels.
  On choisit alors $\mathcal{F}$ comme une sous-algèbre de $End_{\mathbb{A}}(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{A}$-algèbre.

- **Co-moules multiplicatifs :** $\Gamma_\bullet \in \mathcal{CM}_\bullet^{\mathbb{F}}$ est dit multiplicatif lorsque :

$$\forall (\underline{\boldsymbol{\omega}}^1, \underline{\boldsymbol{\omega}}^2) \in (\Omega^\bullet)^2,\ \Gamma_{\underline{\boldsymbol{\omega}}^1 . \underline{\boldsymbol{\omega}}^2} = \Gamma_{\underline{\boldsymbol{\omega}}^2} . \Gamma_{\underline{\boldsymbol{\omega}}^2} .$$

Algèbre des co-moules et symétrie.

On définit, de la même façon que sur les moules, une addition, une multiplication externe, et une multiplication.

Propriété 3 :

$(\mathcal{CM}_\bullet^{\mathbb{F}}(\Omega), +, ., \times)$ est une algèbre associative, unitaire, non commutative.

Définition : Un co-moule $\Gamma_\bullet$ de $\mathcal{CM}_\bullet^{\mathbb{F}}(\Omega)$ est dit **co-symétrAl** lorsque :

$$\begin{cases} \Gamma_\emptyset = \mathit{Id} \\ \Gamma_\omega(\varphi.\psi) = \displaystyle\sum_{(\underline{\boldsymbol{\alpha}},\underline{\boldsymbol{\beta}})\in(\Omega^\bullet)^2} < \mathit{sha}(\underline{\boldsymbol{\alpha}},\underline{\boldsymbol{\beta}})|\omega > \Gamma_\alpha(\varphi)\Gamma_\alpha(\psi) \\ (\forall(\varphi,\psi)\in\mathcal{F}^2,\ \forall\underline{\boldsymbol{\omega}}\in\Omega^\bullet) \end{cases}$$

Cadre général pour les contractions moules/co-moule.

- Moules et co-moules sont des objets duaux.
  $\rightarrow$ On va les "contracter" en des sommes $\displaystyle\sum_{\underline{\boldsymbol{\omega}}\in\Omega^\bullet} M^{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\Gamma_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}$.

- Quid de l'existence de telles sommes ?

  On supposera désormais que l'algèbre $\mathcal{A}$ est valuée complète ; $\mathcal{F}$ est l'algèbre des opérateurs admettant une valuation, pour la valuation subordonnée.

  $\rightarrow$ Cela permettra de parler de convergence formelle.

Cadre général pour les contractions moules/co-moules (suite).

Dans tout ce qui suit, on se donne :

- un alphabet Ω, qui est un semi-groupe.
- une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{A}$, d'unité noté 1, commutative, dans laquelle les moules prendront leurs valeurs.
- une $\mathbb{A}$-algèbre $\mathcal{F}$, valuée complète, d'unité noté Id, non nécessairement commutative, dans laquelle les co-moules prendront leurs valeurs.

Définition : Soit $M^\bullet \in \mathcal{M}_{\mathbb{A}}^\bullet(\Omega)$ vérifiant $M^\emptyset = 1$ et $\Gamma_\bullet \in \mathcal{CM}_\bullet^{\mathcal{F}}(\Omega)$.
Si la famille $(M^{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\Gamma_{\underline{\boldsymbol{\omega}}})_{\underline{\boldsymbol{\omega}}\in\Omega^\bullet}$ est sommable, alors on appelle **contraction moule/co-moule** la somme $\Theta = \displaystyle\sum_{\underline{\boldsymbol{\omega}}\in\Omega^\bullet} M^{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\Gamma_{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \in \mathcal{F}$

Notation : On note aussi la contraction précédente $\displaystyle\sum_\bullet M^\bullet\Gamma_\bullet$.

Propriétés générales des contractions moules/co-moules.

Propriété 4 :

Soit $(M^\bullet, N^\bullet) \in \mathcal{M}^\bullet_{\mathbb{A}}(\Omega)^2$ et $\Gamma_\bullet \in \mathcal{CM}^{\mathcal{F}}_\bullet(\Omega)$.
On suppose que :

- $\Gamma_\bullet$ est un comoule multiplicatif.
- les familles $\left(M^{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\Gamma_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\right)_{\underline{\boldsymbol{\omega}}\in\Omega^\bullet}$ et $\left(N^{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\Gamma_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\right)_{\underline{\boldsymbol{\omega}}\in\Omega^\bullet}$ sont sommables.

Alors :

- la famille $\left((N^\bullet \times M^\bullet)^{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\Gamma_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\right)_{\underline{\boldsymbol{\omega}}\in\Omega^\bullet}$ est sommable.
- $\left(\sum_\bullet M^\bullet \Gamma_\bullet\right)\left(\sum_\bullet N^\bullet \Gamma_\bullet\right) = \left(\sum_\bullet (N^\bullet \times M^\bullet)\Gamma_\bullet\right)$

Propriété 5 :

Soient $M^\bullet \in \mathcal{M}^\bullet_{\mathbb{A}}(\Omega)$ et $\Gamma_\bullet \in \mathcal{CM}^{\mathcal{F}}_\bullet(\Omega)$ tels que la famille $\left(M^{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\Gamma_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\right)_{\underline{\boldsymbol{\omega}}\in\Omega^\bullet}$ soit sommable.
Si $M^\bullet$ est symétrAl et $\Gamma_\bullet$ co-symétrAl, alors $\sum_\bullet M^\bullet \Gamma_\bullet$ est un automorphisme de $\mathcal{A}$.

Rappel du contexte.

- Soit $X = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ un **champ de vecteurs local** de $\mathbb{C}^n$, singulier en 0 :

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \; \left\{ \begin{array}{l} X_i \in \mathbb{C}\{x\}. \\ X_i(0) = 0. \end{array} \right. .$$

  On suppose que la partie linéaire X^{lin} est diagonale : $X^{\text{lin}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

- On écrit X sous forme préparée :

$$X = X^{\text{lin}} + \sum_{\omega \in \Omega} B_\omega$$

  où les opérateurs B_ω sont homogènes de degré ω.

Grande idée du calcul moulien :

On cherche à conjuguer explicitement X à X^{lin} à l'aide d'un changement de variables formel $x = \theta(y)$, c'est à dire expliciter l'opérateur de substitution associé à Θ.
On va chercher Θ sous la forme d'une contraction moule/co-moule :

$$\Theta = \sum_{\bullet} S^{\bullet} B_{\bullet}$$

Rappel du contexte (suite).

On suppose que :

- Ω désigne l'ensemble des n-uplets d'entiers positifs $(p_1, \cdots, p_n)$, sauf au plus un, qui peut valoir -1, tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1$.
- $\mathbb{A} = \mathbb{C}$.
- $\mathcal{A} = \mathbb{C}[\![x]\!]$.
- $\mathcal{F}$ est la sous-algèbre des endomorphismes de $\mathcal{A}$ ayant une valuation (subordonnée à la valuation usuelle de $\mathcal{A}$).

Objectifs :

Trouver $S \in \mathcal{M}^{\bullet}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ tel que :

1. $S^{\emptyset} = 1$.
2. la famille $\left(S^{\underline{\omega}} B_{\underline{\omega}}\right)_{\underline{\omega} \in \Omega^{\bullet}}$ soit formellement sommable.
3. $\Theta = \sum_{\bullet} S^{\bullet} B_{\bullet}$ vérifie $\Theta.X = X^{\text{lin}}.\Theta$.
4. Θ soit un opérateur de substitution.

Condition suffisante sur $\mathcal{S}^\bullet$ pour satisfaire l'équation de conjugaison.

Lemme :

Soit X le champ de vecteurs de $\mathbb{C}^n$ diagonal défini par $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$

Alors, $\left[X, \sum_\bullet S^\bullet B_\bullet\right] = \sum_\bullet \left(D_{(.,\lambda)} S^\bullet\right) B_\bullet$ où $D_{(.,\lambda)} M^\bullet$ est le moule défini pour tout $\underline{\omega} \in \Omega^\bullet$ par : $D_{(.,\lambda)} M^{\underline{\omega}} = (||\underline{\omega}||, \lambda) M^{\underline{\omega}}$

Conséquence : On trouve qu'il est suffisant de choisir $S^\bullet$ vérifiant : $D_{(.,\lambda)} S^\bullet = I^\bullet \times S^\bullet$.

Condition suffisante sur $\mathcal{S}^\bullet$ pour que Θ soit un opérateur de substitution.

Lemme : Représentation des opérateurs de substitution formels.

$\Theta \in \mathcal{F}$ est un opérateur de substitution formel si et seulement Θ est un automorphisme formel de $\mathcal{F}$, séquentiellement formellement continu.

- pour $\omega \in \Omega$, B_ω est une dérivation ; donc $B_\bullet$ est co-symétrAl.
- La sommabilité formelle de la famille $\left(M^{\underline{\omega}}\Gamma_{\underline{\omega}}\right)_{\underline{\omega}\in\Omega^\bullet}$ entraine automatiquement la continuité séquentielle formelle de Θ.

Conséquence : Il suffit de chercher $S^\bullet$ symétrAl pour que Θ soit un opérateur de substitution.

Bilan.

Condition suffisante pour que Θ conjugue X à X^{lin}.

Il suffit de trouver un moule $S^\bullet$ vérifiant :

1. $S^\emptyset = 1$.
2. $D_{(.,\lambda)} S^\bullet = I^\bullet \times S^\bullet$.
3. $S^\bullet$ est symétral.

Les conditions 1. et 2. amènent directement à un moule unique :

$$\forall \underline{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega^\bullet,\ S^{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = \frac{1}{<\lambda, \omega_r >< \lambda, \omega_{r-1} + \omega_r > \cdots < \lambda, \omega_1 + \cdots + \omega_r >}$$

Autrement dit, si $I : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ \omega & \longmapsto & <\lambda, \omega> \end{array}$, on a :

$$S^{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = \left(S_0^{I(\omega_1), \cdots, I(\omega_r)}\right)$$

Ainsi, 3. est automatiquement vérifiée, par symétralité de $S_0^\bullet$.

Version moulienne du théorème de Poincaré.

Théorème : (Version moulienne du théorème de linéarisation formelle.)

Soit $X = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteurs holomorphe de $\mathbb{C}^n$, défini localement et singulier en 0. Notons, si $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, $X_i(x) = \sum_{p \in \mathbb{N}^n} a_i(p) x^p$.

On suppose que X est non résonant et que la partie linéaire de X, notée X^{lin}, est diagonale : $X^{\text{lin}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Notons : $\star$ $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^n$.

$\star$ Ω l'ensemble des n-uplets $(p_1, \cdots, p_n)$ d'entiers positifs , sauf au plus un, qui peut valoir -1, tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1$.

$\star$ $\forall \underline{\omega} \in \Omega$, $S^{\underline{\omega}} = \dfrac{1}{< \lambda, \omega_1 > \cdots < \lambda, \omega_1 + \cdots + \omega_r >}$.

$\star$ $B_{\underline{\omega}}$ le co-moule engendré par les $B_\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(\omega + e_i) x^{\omega} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Alors, l'automorphisme formel $\Theta = \sum_{\bullet} S^{\bullet} B_{\bullet}$ conjugue formellement le champ de vecteurs X à sa partie linéaire X^{lin} : $\Theta . X . \Theta^{-1} = X^{\text{lin}}$.

Bibliographie succinte.

- J. ECALLE : *Singularités non abordable par la géométrie*, annales de l'institut Fourier, tome 42, n°1-2 (1992), p 73-164.
- D. SAUZIN : *Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials*, in Renormalisation and Galois theories, Eds. A. Connes, F. Fauvet, J.-P. Ramis, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, 2008, p 83-161.