Olivier Bouillot
Université Paris Sud , Orsay.

Mémoire de mathématiques.

Master 2 de mathématiques.
Théorie des nombres.

Propriétés différentielles de formes modulaires.

Sous la direction de

M. Daniel Bertrand.
Institut de Mathématiques de Chevaleret.

Table des matières

Introduction.

Nous savons que les fonctions G_{2k}, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$, définissent des formes modulaires classiques ; il n'en est pas de même de la fonction G_2. Nous allons donc commencer par construire une fonction ${\mathrm{G}_2}^*$ (chapitre 1), à partir de la fonction G_2 qui vérifiera la condition de modularité de poids 2.

A partir de là, nous allons essayer de comprendre les enjeux d'un problème posé par Nicholas Katz[1]en 1976 (chapitre 6) : « *si un réseau* $\mathrm{L} \subset \mathbb{C}$ *est tel que les quantités* ${\mathrm{G}_2}^*(\mathrm{L})$*,* $\mathrm{G}_4(\mathrm{L})$ *et* $\mathrm{G}_6(\mathrm{L})$ *soient algébriques, le réseau* L *est-il nécessairement à multiplication complexe ?* »

Cette question correspond à la réciproque d'un théorème bien connu : « *si* $\mathrm{L} \subset \mathbb{C}$ *est un réseau à multiplication complexe tel que les quantités* $\mathrm{G}_4(\mathrm{L})$ *et* $\mathrm{G}_6(\mathrm{L})$ *soient algébriques, alors* ${\mathrm{G}_2}^*(\mathrm{L}) \in \overline{\mathbb{Q}}$ » , théorème que nous démontrerons au chapitre 6.

Ce problème de Katz, toujours ouvert aujourd'hui, est intéressant, car il s'agit d'un analogue au second problème de Schneider. La problématique qu'il soulève est de même nature que celle du problème de Schneider : ***comment une preuve modulaire peut elle distinguer si la variable complexe utilisée est un point de multiplication complexe ou non ?*** Mais ce qui est surtout intéressant ici, c'est qu'il s'agit d'un problème ouvert, contrairement au théorème de Schneider sur $(\tau, j(\tau))$.

Il n'est donc plus question de distinguer problème modulaire et problème elliptique, mais d'arriver à construire une preuve, si la réponse est positive, probablement modulaire, prenant en compte le fait que $\tau = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ si $\mathrm{L} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ puisse être un point de multiplication complexe, ou non.

Pour comprendre l'origine de cette question posée par Katz, nous allons poursuivre, après l'étude de la fonction ${\mathrm{G}_2}^*$, par l'étude des deux généralisations des formes modulaires dues essentiellement à G. Shimura et D. Zagier (chapitre 3).

L'une d'elle, l'étude des formes modulaires presque holomorphes, nous sera particulièrement utile pour démontrer le théorème de base concernant l'algébricité de ${\mathrm{G}_2}^*(\mathcal{L})$ si $\mathcal{L}$ est à multiplication complexe (chapitre 5) .

Plusieurs démonstrations de ce fait existent ; elles sont de natures différentes[2], puisque modulaire, elliptique ou cohomologique. Nous exposerons ici la version modulaire, qui nécessite, elle, la démonstration d'un théorème de Shimura (chapitre 4, §4.2, théorème

[1]Voir [9], §4.0.8. p 501.

[2]Voir [9], §4 p 499 ; [1].
Pour le point de vue elliptique, voir aussi [4] et [34]

et §4.3.2) : « *toute fonction méromorphe modulaire presque holomorphe arithmétique est à valeurs dans le corps des nombres algébriques en des points de multiplication complexes différents de ses pôles.* » La preuve (§4.3.2.) passe par l'étude d'opérateurs différentiels qui reflête en partie les propriétés des équations différentielles algébriques satisfaites par les formes modulaires.

Le chapitre 5 est consacré au problème de Katz, à la lumière du résultat d'algèbricité établi plus haut. Nous verrons qu'une des difficultés du problème de Katz est que l'absence d'holomorphie interdit l'utilisation des lemmes de Schwarz qui est l'un des outils principaux de transcendance. Nous illustrerons leurs utilisations dans l'appendice autour du théorème de Nesterenko. Ainsi, nous remarquerons que les formes quasi - modulaires se prêtent à de la transcendance, alors que les formes modulaires presques holomorphes résistent.

Au chapitre 6, enfin, nous décrirons quelques aspects de la théorie de Eichler - Shimura, qui met en jeu des équations différentielles linéaires satisfaites par les formes modulaires.

Nous renvoyons le lecteur à [20] et [22] pour l'étude de groupes modulaires plus généraux que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

La fonction G_2*.*

On sait que[1] pour $\sigma \in \mathbb{C}$, $\Re e\ \sigma > 2$ et tout $\tau \in \mathcal{H}$, $\left(\dfrac{1}{(m+n\tau)^{\sigma}}\right)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}$ est une famille sommable, et qu'alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, la fonction $\mathrm{G}_{2k}(\tau) = \displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}$ définit sur $\mathcal{H}$ une forme modulaire de poids $2k$, de développement de Fourier donné par $\mathrm{G}_{2k}(z) = 2\zeta(2k) + \dfrac{2(2i\pi)^{2k}}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n$

Par ailleurs, d'après le théorème de sommation par paquets des séries doubles à termes positifs, pour $q \in \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a successivement :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sigma_{2k-1}(n)|q|^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{\substack{d\in\mathbb{N}\\ d|n}} d^{2k-1}|q|^n = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} m^{2k-1}|q|^{mn} = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{m^{2k-1}|q|^m}{1-|q|^m} < +\infty$$

Ainsi, pour $q \in \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $\left(d^{2k-1}q^n\right)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d|n}}$ est une famille sommable. En particulier, pour $k = 1$, on en déduit que $\forall z \in \mathcal{H}$, $(de^{2in\pi z})_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d|n}}$ est une famille sommable, d'où $z \longmapsto \dfrac{\pi^2}{3} - 8\pi^2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_1(n)e^{2in\pi z}$ est parfaitement définit sur $\mathcal{H}$

Ceci nous invite donc à vouloir tout de même considérer la fonction G_2, définie sur $\mathcal{H}$, bien que la somme, pour $\tau \in \mathcal{H}$, $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\frac{1}{(m+n\tau)^2}$ ne soit pas absolument convergente, mais convergente.

2.1 Définition et propriété de la fonction G_2.

2.1.1 Définition

Nous allons commencer par montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m+n\tau)^2}$, pour tout $\tau \in \mathcal{H}$. Pour cela, nous allons utiliser la formule sommatoire de Poisson[2] afin de pouvoir calculer la somme sur m.

D'après ce qui a été dit ci dessus, la définition, ainsi qu'une expression, de la fonction G_2 en découlera facilement.

[1]Voir [26], chap. 7, §2.3 et §4.2

Lemme : $\forall z \in \mathcal{H}, \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+z)^2} = -4\pi^2 \sum_{m=1}^{+\infty} m e^{2im\pi z}.$

Démonstration : Soit $z \in \mathcal{H}$, $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$.

Notons $\Phi_y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(x+iy)^2} \end{array}$

Alors : • $\Phi_y \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

• $\exists \mathrm{M} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\Phi_y(x)| = \dfrac{1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{\mathrm{M}}{(1+|x|)^{\frac{3}{2}}}$

Calculons la transformée de Fourier $\widehat{\Phi_y}$ de Φ_y :

Le théorème des résidus, appliqué au lacet $\Gamma_{\mathrm{R}} = \{\mathrm{R}e^{i\theta}; \theta \in [0;\pi]\} \cup [-\mathrm{R};\mathrm{R}]$, orienté dans le sens trigonométrique, puis un passge à la limite lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow +\infty$, permet de démontrer le lemme suivant[3]:

Lemme : Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
On suppose que la fonction f admet un prolongement $\widetilde{f}$, holomorphe sur $\overline{\mathcal{H}} - \mathrm{A}$, où A est une partie finie de $\mathcal{H}$, vérifiant $\displaystyle\lim_{|z|\longrightarrow+\infty} |\widetilde{f}(z)| = 0$.
Alors, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2i\pi xt}\,dt = 2i\pi \sum_{a\in\mathrm{A}} \mathrm{Res}\left(z \longmapsto \widetilde{f}(z)e^{2i\pi az}, a\right)$
pour tout $x > 0$.

Dans l'optique d'utiliser la formule ci dessus, considérons la fonction $\widetilde{\Phi_y}$ définie par $\widetilde{\Phi_y} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}-\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{(z+iy)^2} \end{array}$.

Alors, les fonctions $\widetilde{\Phi_y}$ et $z \longmapsto \widetilde{\Phi_y}(-z))$ prolongent holomorphiquement Φ_y et $t \longmapsto \Phi_y(-t))$ sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H} - \{iy\})$ respectivement, et $\displaystyle\lim_{|z|\longrightarrow+\infty} |\widetilde{\Phi_y}(z)| = 0$.

Ainsi, si $x < 0$, $\displaystyle\widehat{\Phi_y}(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_y(t)e^{-2i\pi xt}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \Phi_y(t)e^{2i\pi|x|t}\,dt = 2i\pi \times 0 = 0$

si $x > 0$, $\displaystyle\widehat{\Phi_y}(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_y(-t)e^{2i\pi xt}\,dt = 2i\pi\mathrm{Res}\left(z \longmapsto \widetilde{\Phi_y}(-z)e^{2i\pi xz}, iy\right)$
$= 2i\pi\left(e^{2i\pi xz}\right)'(iy) = (2i\pi)^2 x e^{-2\pi xy} = -4\pi^2 x e^{-2\pi xy}$

---

[2] **Lemme :** (*Formule sommatoire de Poisson.*)
On utilisera comme définition de la transformée de Fourier de $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ la formule $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi xt}\,dt$.
Soit $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ telle que • $\exists \mathrm{M} > 0$, $\exists \alpha > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \dfrac{\mathrm{M}}{(1+|x|)^\alpha}$
• $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$
Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2in\pi x}$.
Pour la démonstration. voir H. Queffélec, C. Zuily : *Eléments d'analyse*, Éd Dunod , p 93-94.

[3] Voir par exemple, Amar - Matheron : *Analyse complexe*, Éd Cassini , p 248-249.

De plus, pour $x=0$, on a $\widehat{\Phi_y}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t+iy)^2}\ dt = \left[-\frac{1}{t+iy}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$

On a donc $\widehat{\Phi_y}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -4\pi^2 x e^{-2\pi x y} & \text{si } x > 0 \end{array} \right. .$

Par conséquent, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\Phi_y}(n)\right| = 4\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-2n\pi y} < +\infty$, car $y > 0$.

D'après la formule de Poisson, appliqué à la fonction Φ_y, on a donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n+iy)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi_y(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\Phi_y}(n) e^{2in\pi x}$$

$$= -4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n e^{-2n\pi y} e^{2in\pi x} = -4\pi^2 \sum_{1}^{+\infty} n e^{2in\pi(iy+x)}$$

$$= -4\pi^2 \sum_{1}^{+\infty} n e^{2in\pi z}$$

□

Il ne reste plus qu'à regrouper les ingrédients pour obtenir la propriété suivante :

Propriété : La fonction $\mathrm{G}_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ \tau & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ m\neq 0 \text{ si } n=0}} \frac{1}{(m+n\tau)^2} \end{array}$ est correctement définie, et vérifie $\forall \tau \in \mathcal{H}$, $\mathrm{G}_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sigma_1(p) e^{2ip\pi\tau}$.

Démonstration : • En appliquant le lemme précédent, on a :

$\forall \tau \in \mathcal{H}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} m e^{2imn\pi\tau} = -4\pi^2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sigma_1(p) e^{2ip\pi\tau}$,

car $\left(m e^{2imn\pi\tau}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est une famille sommable.

• De plus, en effectuant successivement les changements d'indices $m' = -m$ et $n' = -n$, on a :

$\forall \tau \in \mathcal{H}$, $\sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^2} = \sum_{n'=1}^{+\infty} \sum_{m'\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m'+n'\tau)^2} = -4\pi^2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sigma_1(p) e^{2ip\pi\tau}$

• Ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ m\neq 0 \text{ si } n=0}} \frac{1}{(m+n\tau)^2}$ est convergente pour tout $\tau \in \mathcal{H}$, de somme $\sum_{n=0} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ m\neq 0 \text{ si } n=0}} \frac{1}{(m+n\tau)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^2}$, ie $2\zeta(2) - 8\pi^2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sigma_1(p) e^{2ip\pi\tau}$, ce qui démontre la propriété.

□

2.1.2 Perte du caractère modulaire.

Maintenant que nous avons la définition de G_2, nous allons voir la différence essentielle entre cette série d'Eisenstein et les deux séries G_4 et G_6 : il s'agit de la perte du caractère modulaire. Bien sur, cela provient du fait que pour $\tau \in \mathcal{H}$, $\left(\dfrac{1}{(m+n\tau)2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}$ n'est pas une famille sommable.

Pour démontrer que G_2 n'est pas invariante par l'action du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, nous allons utiliser l'étude de fonctions elliptiques, et notamment les deux formules suivantes liant la fonction de réseaux $\widetilde{G}_2$, définie par $\widetilde{G}_2(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2) = \dfrac{1}{{\omega_1}^2} G_2\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, aux quasi - périodes d'une fonction zeta de Weiertrass de même réseau $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$:

Propriété : Soit • $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ de $\mathbb{C}$.
• ρ_Λ et ζ_Λ respectivement la fonction elliptique de Weierstrass et la fonction zeta de Weiertrass de réseau Λ.
• $\eta_1(\Lambda)$ et $\eta_2(\Lambda)$ les quasi-périodes de ζ_Λ associées respectivement aux périodes ω_1 et ω_2.

Alors, $\begin{cases} \eta_1(\Lambda) = \omega_1 \widetilde{G_2}\left(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2\right) \\ \eta_2(\Lambda) = \omega_2 \widetilde{G_2}\left(\mathbb{Z}(-\omega_2) \oplus \mathbb{Z}\omega_1\right) \end{cases}$

Démonstration : Les calculs suivant étant identiques pour les deux quasi - périodes, nous ne les effectuerons que pour la quasi - période $\eta_1(\Lambda)$, quasi - période définie par : $\forall z \in \mathbb{C} - \Lambda$, $\eta_1(\Lambda) = \zeta_\Lambda(z+\omega_1) - \zeta_\Lambda(z)$, où pour tout $z \in \mathbb{C} - \Lambda$, $\zeta(z) = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \left(\dfrac{1}{z+\omega} + \dfrac{z}{\omega^2} - \dfrac{1}{\omega}\right)$.

Puisque, pour tout $z \in \mathbb{C} - \Lambda$, $\left(\dfrac{1}{z+\omega_1+\omega} - \dfrac{1}{z+\omega} + \dfrac{\omega_1}{\omega^2}\right)_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}$ est une famille sommable, on a successivement, pour $z \in \mathbb{C} - \Lambda$:

$$\begin{aligned}
\eta_1(\Lambda) &= \zeta(z+\omega_1) - \zeta(z) \\
&= \frac{1}{z+\omega_1} - \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \left(\frac{1}{z+\omega_1+\omega} - \frac{1}{z+\omega} + \frac{\omega_1}{\omega^2}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z+(m+1)\omega_1+n\omega_2} - \frac{1}{z+m\omega_1+n\omega_2} + \frac{\omega_1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\right) \\
&\quad + \sum_{m\in\mathbb{Z}^*} \left(\frac{1}{z+(m+1)\omega_1} - \frac{1}{z+m\omega_1} + \frac{\omega_1}{(m\omega_1)^2}\right) + \frac{1}{z+\omega_1} - \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

Or, en écrivant $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} = \lim_{M\longrightarrow+\infty} \sum_{m=-M}^{M}$ et $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}^*} = \lim_{M\longrightarrow+\infty} \left(\sum_{m=-M}^{-1} + \sum_{m=1}^{M}\right)$, puis en simplifiant les sommes télescopiques présentes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\eta_1(\Lambda) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\omega_1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^*} \frac{\omega_1}{(m\omega_1)^2} \\
&= \frac{1}{\omega_1} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(m+n\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} + \frac{1}{\omega_1} \sum_{m\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{m^2} \\
&= \frac{1}{\omega_1} G_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \omega_1 \widetilde{G}_2(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2)
\end{aligned}$$

□

Désormais, il n'est plus difficile de démontrer que, bien qu'étant holomorphe, G_2 ne vérifie pas la condition de modularité de poids 2 sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Propriété : 1. La fonction G_2 est holomorphe sur $\mathcal{H}$.
2. La fonction G_2 n'est pas une forme modulaire.

Démonstration : 1. Soit K un compact de $\mathcal{H}$.

Alors : $\exists \mathrm{R} > 0,\ \exists a > 0,\ \forall z \in \mathcal{H},\ \begin{cases} -\mathrm{R} \leq \Re e\ z \leq \mathrm{R} \\ a \leq \Im m\ z \leq \dfrac{1}{a} \end{cases}$.

Donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall \tau \in \mathrm{K},\ \left|\sigma_1(p)e^{2ip\pi\tau}\right| = \sigma_1(p)e^{-2p\pi\Im m\ \tau} \leq \sigma_1(p)e^{-2ap\pi}$. Cette majoration prouve que la série de fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ $\left(\tau \longmapsto \sigma_1(p)e^{2ip\pi\tau}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge normalement sur tout compact de $\mathcal{H}$.

Ainsi, d'après le théorème de Weiertrass, la fonction G_2 est holomorphe sur $\mathcal{H}$.

2. Montrons que : $\forall \tau \in \mathcal{H},\ \mathrm{G}_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) \neq \tau^2\mathrm{G}_2(\tau)$.

Soit $\tau \in \mathcal{H}$.

Notons η_1 et η_2 les quasi - périodes de la fonction zeta de Weiertrass de réseau $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$, associées aux périodes 1 et τ de la fonction elliptique de Weiertrass de même réseau.

La relation de Legendre[4] liant périodes et quasi - périodes d'une fonction elliptique s'écrit ici : $\tau\eta_1 - \eta_2 = 2i\pi$, c'est - à - dire d'après la propriété précédente $2i\pi = \tau\widetilde{\mathrm{G}}_2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau) - \tau\widetilde{\mathrm{G}}_2(\mathbb{Z}(-\tau) \oplus \mathbb{Z}) = \tau\mathrm{G}_2(\tau) - \dfrac{1}{\tau}\mathrm{G}_2\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)$.

Ainsi, on a : $\forall \tau \in \mathcal{H},\ \mathrm{G}_2\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) = \tau^2\mathrm{G}_2(\tau) - 2i\tau\pi$.

Ceci montre que G_2 n'est pas une forme modulaire, car sinon, elle serait de poids 2.

□

2.2 Fonction G_2^*.

Pour compenser la perte de modularité de G_2, nous allons maintenant définir une fonction G_2^*, proche de G_2, qui sera invariante par l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Evidemment, ce que l'on gagne d'un côté va être perdu de l'autre, car sinon, on obtiendrait une forme modulaire de poids 2 sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors qu'il n'en existe pas !

Pour cela, nous allons suivre l'idée de Hecke , qui se déroule en deux temps :

[4] **Propriété :** (*Relation de Legendre*)
Les quasi - périodes η_1 et η_2 d'une fonction zeta de Weiertrass de réseau Λ, associées aux périodes ω_1 et ω_2 de la fonction elliptique ρ de Weiertrass de même réseau Λ sont liées par la relation $\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{vmatrix} = \omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = 2i\pi$.

(1) rajouter un facteur de convergence à la somme définissant G_2, en considérant la fonction définie sur $\mathcal{H} \times \{z \in \mathbb{C}; \Re e\ z > 0$ par : $\Phi(z,s) = \displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s}$,

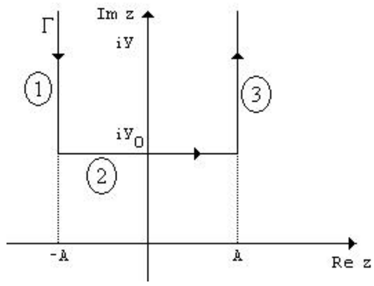
(2) pouvoir définir $G_2^*(z) = \displaystyle\lim_{\substack{s\longrightarrow 0\\ \Re e\ s>0}} \Phi(z,s)$ pour $z \in \mathcal{H}$.

Nous allons suivre la même démarche que lors de la définition de G_2, modulo quelques complications techniques : à savoir le calcul d'une transformée de Fourier pour pouvoir appliquer la formule de Poisson et obtenir le développement de Fourier de $\Phi(.,s)$ pour $\Re e\ s > 0$.

2.2.1 Estimation de l'intégrale de Fourier $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(t+iy)^{2+\frac{s}{2}}(t-iy)^{\frac{s}{2}}}\, dt$

Notons Log la détermination principale du logarithme, défini sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, par Log $z = \log|z| + i\mathrm{Arg}\ z$, où Arg $z \in]-\pi;\pi[$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}^*$, $(z+it)^s$ est défini par $(z+it)^s = e^{s\mathrm{Log}(z+it)}$ et on a la minoration $|(z+it)^s| \geq e^{-\pi\Im m\ s}|z+it|^{\Re e\ s}$.

A partir de cette considération simple, nous allons pouvoir démontrer le lemme suivant, dont le but est de changer le domaine d'intégration de la transformée de Fourier de $H_{s,y}$: $t \longmapsto \dfrac{1}{(t+iy)^{2+\frac{s}{2}}(t-iy)^{\frac{s}{2}}}$ avec $s \in \mathbb{C}$, $\Re e\ s > 0$ et $y > 0$, afin de pouvoir en obtenir une estimation.



Lemme : Soit $y > 0$.
$(\alpha,\beta)^2 \in \mathbb{C}^2$, $\Re e\ (\alpha+\beta) > 1$.
Si Γ désigne le contour ci contre, avec $\begin{cases} A > 0 \\ 0 < y_0 < y \end{cases}$, et Γ' le contour symétrique de Γ par rapport à $\Re e\ z = 0$, on a alors :

$$\forall x > 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(t+iy)^\alpha(t-iy)^\beta}\, dt = \int_\Gamma \frac{e^{ixz}}{(z+iy)^\alpha(z-iy)^\beta}\, dz.$$
$$\forall x < 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(t+iy)^\alpha(t-iy)^\beta}\, dt = \int_{\Gamma'} \frac{e^{ixz}}{(z+iy)^\alpha(z-iy)^\beta}\, dz.$$

La démonstration est une adaptation du lemme page 10 utilisé pour calculer une transformée de Fourier lors de la démonstration de l'égalité, valable pour $z \in \mathcal{H}$: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} = -4\pi^2 \sum_{m=1}^{+\infty} m e^{2im\pi z}$.

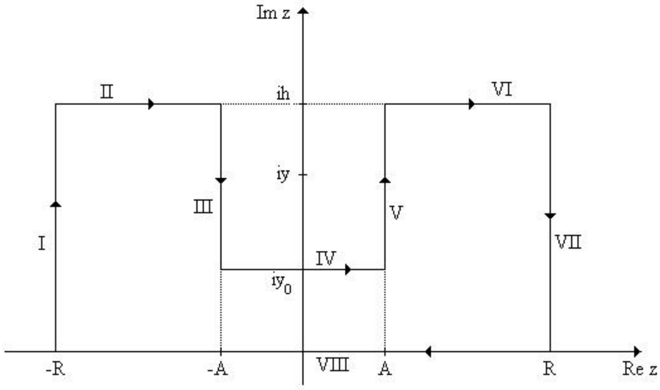
En effet, on ne peut pas utiliser ce lemme, puisque l'on devrait calculer Res $\left(z \longmapsto \frac{e^{ixz}}{(z+iy)^\alpha(z-iy)^\beta}\ ;\ iy\right)$, ce que les techniques de calculs usuelles de résidus ne permettent pas de faire, puisque α et β ne sont pas nécessairement des entiers.

L'idée est alors de modifier le contour utilisé dans ce lemme page 10 afin que ce contour soit le bord orienté d'un compact K à bord régulier ne contenant pas iy.

Démonstration : Le lemme se démontre de la même facon, que x soit positif ou négatif.
Nous supposerons donc $x > 0$.
Soit $(A,R) \in \mathbb{R}^{+2}$ tel que $0 < A < R$.
$(y_0,h) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < y_0 < y < h$.

Notons $h_{\alpha,\beta}: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}-\{iy;-iy\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{(z+iy)^{\alpha}(z-iy)^{\beta}} \end{array}$.

Considérons aussi le contour $\Gamma_{\mathrm{R},h}$ suivant :



• La fonction $z \longmapsto h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}-\{iy;-iy\}$, donc, d'après le théorème des résidus,

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{R},h}} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz} = 0 \qquad (2.1)$$

• En utilisant la minoration $|(z+it)^s| \geq e^{-\pi\Im m\ s}|z+it|^{\Re e\ s}$ pour $t \in \mathbb{R}$, $(s,z) \in \mathbb{C}^2$ avec $z+it \neq 0$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \max\left(\left|\displaystyle\int_{\mathrm{I}} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz\right|, \left|\displaystyle\int_{\mathrm{VII}} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz\right|\right) \leq \dfrac{he^{\pi\Im m\ (\alpha+\beta)}}{\mathrm{R}^{\Re e\ (\alpha+\beta)}} \\ \max\left(\left|\displaystyle\int_{\mathrm{II}} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz\right|, \left|\displaystyle\int_{\mathrm{VI}} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz\right|\right) \leq \dfrac{e^{\pi\Im m\ (\alpha+\beta)}}{\Re e\ (\alpha+\beta)-1}\dfrac{e^{-hx}}{\mathrm{A}^{\Re e\ (\alpha+\beta)-1}} \end{array}\right.,$$

d'où $\displaystyle\lim_{h\longrightarrow+\infty}\lim_{\mathrm{R}\longrightarrow+\infty}\int_{\mathrm{I}\cup\mathrm{II}\cup\mathrm{VI}\cup\mathrm{VII}} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz = 0.$

De plus, $t \longrightarrow \dfrac{e^{-xt+i\varepsilon\mathrm{A}x}}{(\varepsilon\mathrm{A}+i(t+y))^{\alpha}\,(\varepsilon\mathrm{A}+i(t-y))^{\beta}}$ est intégrable sur $[y_0;+\infty[$ pour $\varepsilon \in \{-1;+1\}$, car pour $t \geq y_0$, $\left|\dfrac{e^{-xt+i\varepsilon\mathrm{A}x}}{(\varepsilon\mathrm{A}+i(t+y))^{\alpha}\,(\varepsilon\mathrm{A}+i(t-y))^{\beta}}\right| \leq \dfrac{e^{\pi\Im m\ (\alpha+\beta)}}{\mathrm{A}^{\Re e\ (\alpha+\beta)}}e^{-xt}$,

d'où $\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{h\longrightarrow+\infty}\lim_{\mathrm{R}\longrightarrow+\infty}\int_{\mathrm{III}} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz = \int_{①} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz\ . \\ \displaystyle\lim_{h\longrightarrow+\infty}\lim_{\mathrm{R}\longrightarrow+\infty}\int_{\mathrm{V}} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz = \int_{③} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz\ . \end{array}\right.$

Enfin, $\displaystyle\lim_{h\longrightarrow+\infty}\lim_{\mathrm{R}\longrightarrow+\infty}\int_{\mathrm{VIII}} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz = -\int_{-\infty}^{+\infty} h_{\alpha,\beta}(t)e^{ixt}\ dt,$ car $\left|\mathrm{H}_{\alpha,\beta}(t)e^{ixt}\right| \geq \dfrac{e^{\pi\Im m\ (\alpha+\beta)}}{(t^2+y^2)^{\frac{\Re e\ (\alpha+\beta)}{2}}}$ prouve l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto h_{\alpha,\beta}(t)e^{ixt}$.

• En conclusion, lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow +\infty$, puis $h \longrightarrow +\infty$ dans l'égalité (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixz}}{(z+iy)^{\alpha}(z-iy)^{\beta}}\ dt &= \int_{①\cup③} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz + \int_{\mathrm{IV}} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz \\ &= \int_{\Gamma} h_{\alpha,\beta}(z)e^{ixz}\ dz\ . \end{aligned}$$

□

Ainsi, nous allons pouvoir estimer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(t+iy)^{2+\frac{s}{2}}(t-iy)^{\frac{s}{2}}}\,dt$ pour tout réel x.

Corollaire : Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0;+\infty[$, et pour tout $s \in \mathbb{C}$, avec $\Re e\ s > -1$, on a :

$$|\widehat{\mathrm{H}_{s,y}}(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(t+iy)^{2+\frac{s}{2}}(t-iy)^{\frac{s}{2}}}\,dt\right|$$

$$\leq \begin{cases} 4\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}\Im m\ s}e^{-\pi|x|y}}{y^{1+\frac{\Re e\ s}{2}}}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1+\frac{\Re e\ s}{2}} & ,\ \text{si}\quad x \neq 0. \\ \dfrac{\pi}{y^{1+\Re e\ s}} & ,\ \text{si}\quad x = 0. \end{cases}$$

Démonstration : • Pour $x = 0$, on a successivement :

$$\left|\widehat{\mathrm{H}_{s,y}}(0)\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t+iy)^2(t^2+y^2)^{\frac{s}{2}}}\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2+y^2)^{1+\frac{\Re e\ s}{2}}} \leq \frac{1}{y^{\Re e\ s}}\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2+y^2},$$

d'où le résultat.

• Puisque changer x en $-x$ revient, dans le lemme précédent, à changer le chemin Γ en Γ', ce qui n'a d'autre contribution que de changer x en $|x|$ dans les majorations suivantes, nous supposerons $x > 0$ pour le reste de la démonstration.

On a, d'après le lemme précédent : $\displaystyle\widehat{\mathrm{H}_{s,y}}(0) = \int_{\Gamma} \frac{e^{-2i\pi xz}}{(z+iy)^2(z^2+y^2)^{\frac{s}{2}}}\,dz.$

En découpant Γ comme dans le lemme précédent, on a, pour $\mathrm{A} = 1$, $y_0 = \dfrac{y}{2}$:

$$\begin{cases} \left|\displaystyle\int_{①\cup③} \frac{e^{ixz}}{(z+iy)^{2+\frac{s}{2}}(z-iy)^{\frac{s}{2}}}\,dz\right| & \leq \dfrac{4}{y^{1+\frac{\Re e\ s}{2}}}e^{\frac{\pi}{2}\Im m\ s}e^{-\frac{|x|y}{2}}. \\ \left|\displaystyle\int_{②} \frac{e^{ixz}}{(z+iy)^{2+\frac{s}{2}}(z-iy)^{\frac{s}{2}}}\,dz\right| & \leq \dfrac{4}{y^{1+\frac{\Re e\ s}{2}}}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1+\frac{\Re e\ s}{2}} e^{\frac{\pi}{2}\Im m\ s}e^{-\frac{|x|y}{2}}. \end{cases}$$

Donc, $\displaystyle\left|\widehat{\mathrm{H}_{s,y}}(x)\right| \leq 4\frac{e^{\frac{\pi}{2}\Im m\ s}e^{-\pi|x|y}}{y^{1+\frac{\Re e\ s}{2}}}\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{\Re e\ s}{2}}.$

□

2.2.2 Calcul de $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s}$ pour $z \in \mathcal{H}$ et $s \in \mathbb{C}$, $\Re e\ s > 0$.

Pour effectuer ce calcul, nous allons, comme annoncé, appliquer la formule de Poisson. Ceci donne le lemme suivant :

Lemme : Pour tout $z = x + iy \in \mathcal{H}$, et $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e\ s > 0$, on a :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s} = 2\zeta(2+s) - \frac{2\sqrt{\pi}}{2+s}\frac{s\zeta(1+s)}{y^{1+s}}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)} + 2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2in\pi(mx-t)}}{(t+imy)^{2+\frac{s}{2}}(t-imy)^{\frac{s}{2}}}\,dt\right) \tag{2.2}$$

où Γ et ζ désignent les fonctions gamma d'Euler et zeta de Riemann.

Rappelons que la transformée de Fourier de $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est donnée par la formule $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi xt}\, dt$. On note aussi, pour $y > 0$, $z \in \mathcal{H}$ et $s \in \mathbb{C}$, $\Re e\ s > 0$, $\mathrm{H}_{s,y}(t) = \dfrac{1}{(t+iy)^{2+\frac{s}{2}}(t-iy)^{\frac{s}{2}}}$ et $\Phi(z,s) = \displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s}$.

Démonstration : Soit $z = x+iy \in \mathcal{H}$ et $s \in \mathbb{C}$, $\Re e\ s > 0$.
Alors, si $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\mathrm{H}_{s,my} \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
- $\exists \mathrm{M} > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{H}_{s,my}(t)| \leq \dfrac{e^{\pi \Im m\ s}}{(t^2+m^2y^2)^{2+\Re e\ s}} \leq \dfrac{\mathrm{M}}{(1+|t|)^3}$.
- $$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)| &\leq \frac{\pi e^{\pi\Im m\ s}}{(my)^{1+\Re e\ s}} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} 4e^{\pi\Im m\ s}\left(\frac{1}{|n|}+\frac{1}{my}\right)e^{-\pi m|n|y} \\ &\leq e^{\pi\Im m\ s}\left(\frac{\pi}{(my)^{1+\Re e\ s}} + 8\frac{my+1}{my}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi m|n|y}\right) \\ &< +\infty\ .\end{aligned}$$

On en déduit alors, d'après la formule de Poisson, que : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}_{s,my}(mx+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x}$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi,}\quad \Phi(z,s) &= 2\zeta(2+s) + 2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x} \\ &= 2\zeta(2+s) + 2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x} + 2\sum_{m=1}^{+\infty}\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(0).\end{aligned}$$

Or, en effectuant successivement les changements de variables $t = mu$, puis $v = -u$ sur la partie où l'on intègre sur $]-\infty;0]$, on obtient $\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(0) = \dfrac{2}{m^{1+s}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-y^2}{(t^2+y^2)^{2+\frac{s}{2}}}\, dt$.

De même, en effectuant successivement les changements de variables $t = yu$, $v = u^2$, $w = v+1$, et $x = \dfrac{1}{w}$, on obtient :

$$\begin{aligned}2\int_0^{+\infty} \frac{t^2-y^2}{(t^2+y^2)^{2+\frac{s}{2}}}\, dt &= \frac{1}{y^{1+s}}\int_0^1 \frac{1-2x}{\sqrt{1-x}}x^{\frac{s-1}{2}}\, dx \\ &= \frac{1}{y^{1+s}}\left(\beta\left(\frac{s+1}{2},\frac{1}{2}\right) - 2\beta\left(\frac{s+3}{2},\frac{1}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

où β est la fonction béta d'Euler définie pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, avec $\begin{cases}\Re e\ a > 0\\ \Re e\ b > 0\end{cases}$, par $\beta(a,b) = \displaystyle\int_0^1 x^{a-1}x^{b-1}\, dx$.

En utilisant les relations[5] $\beta(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, et $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$, valables respectivement pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, avec $\begin{cases}\Re e\ a > 0\\ \Re e\ b > 0\end{cases}$ et pour $u \in \mathbb{C}$, $\Re e\ u > 0$, ainsi que l'égalité $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, on obtient alors : $\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(my)^{1+s}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\dfrac{s}{s+2}$.

D'où :

$$\Phi(z,s) = 2\zeta(2+s) + 2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x} + \frac{\sqrt{\pi}}{y^{1+s}}\frac{2s\zeta(1+s)}{s+2}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}.$$

□

[5] Une preuve probabiliste est donné dans J. Y. Ouvrard : *Probabilité 2*, Éd Cassini , p 64 - 65.

2.2.3 Définition de la fonction G_2^*, et propriété.

On sait que[6] la fonction ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}-\{1\}$, admettant un pôle simple en 1 de résidu 1. Ainsi, les deux premiers termes du membre de droite de l'égalité (2.2) admettent une limite lorsque $s \longrightarrow 0$, avec $\Re e\ s>0$, à savoir $\dfrac{\pi^2}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{\Im m\ z}$ respectivement.

Pour montrer que la fonction $\mathrm{G}_2^* = \lim\limits_{\substack{s\longrightarrow 0\\ \Re e\ s>0}} \Phi(.,s)$ est correctement définie, il ne reste plus qu'à montrer que, pour tout $z\in\mathcal{H}$, $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2in\pi(mx-t)}}{(t+imy)^{2+\frac{s}{2}}(t-imy)^{\frac{s}{2}}}\,dt$ admet une limite lorsque $s\longrightarrow 0$ avec $\Re e\ s>0$.

Lemme : Pour tout $z=x+iy\in\mathcal{H}$, on a :

$$\lim_{\substack{s\longrightarrow 0\\ \Re e\ s>0}}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2in\pi(mx-t)}}{(t+imy)^{2+\frac{s}{2}}(t-imy)^{\frac{s}{2}}}\,dt=-4\pi^2\sum_{p=1}^{+\infty}\sigma_1(p)e^{2ip\pi x}.$$

La démonstration va s'articuler en trois temps.

En premier lieu, nous montrerons que $s\longmapsto\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)$ définit une fonction holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C};\Re e\ z>-1\}$ pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}^*$ et tout $y>0$; ceci permettra d'affirmer que $\lim\limits_{\substack{s\longrightarrow 0\\ \Re e\ s>0}}\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)=\widehat{\mathrm{H}_{0,my}}(n)$. Dans un second temps, nous montrerons la convergence uniforme de la somme double, grâce à l'estimation donnée par le corollaire de la page 16, d'où la permutation de la limite avec la somme double. Il ne restera plus qu'à conclure, grâce au calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{2i\pi xt}}{(t+iy)^2}\,dt$ effectué page 10.

Démonstration : • Soient $m\in\mathbb{N}^*$, $n\in\mathbb{Z}$ et $y>0$, et notons $\Omega=\{z\in\mathbb{C};\Re e\ z>-1\}$.

Alors : ♦ $\forall s\in\Omega,\ t\longmapsto\dfrac{e^{-2in\pi t}}{(t-imy)^2(t^2+m^2y^2)^{\frac{s}{2}}}$ est mesurable.

♦ $\forall t\in\mathbb{R},\ t\longmapsto\dfrac{e^{-2in\pi t}}{(t-imy)^2(t^2+m^2y^2)^{\frac{s}{2}}}\in\mathcal{H}(\Omega)$.

♦ $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2+m^2y^2}\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

♦ si K désigne un compact de Ω, on a pour tout $s\in\Omega$: $\left|\dfrac{e^{-2in\pi t}}{(t-imy)^2(t^2+m^2y^2)^{\frac{s}{2}}}\right|=\dfrac{1}{(t^2+m^2y^2)^{\frac{s}{2}}}\le\dfrac{1}{t^2+m^2y^2}$.

Ainsi, d'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, $s\longmapsto\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)\in\mathcal{H}(\Omega)$.

En particulier : $\forall(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}^*,\ \forall y>0,\ \lim\limits_{\substack{s\longrightarrow 0\\ \Re e\ s>0}}\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)=\widehat{\mathrm{H}_{0,my}}(n)$.

• De plus, d'après l'estimation donnée par le corollaire page 2.2.1, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, $z=x+iy\in\mathcal{H}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $s\in\mathbb{C}$, $\begin{cases}\Re e\ s>0\\ |s|\le 1\end{cases}$, on a :

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}-[\![-\mathrm{N}\,;\,\mathrm{N}]\!]}\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x}\right|\le\frac{16e^{\pi}}{my}\frac{e^{-\mathrm{N}m\pi y}}{1-e^{-\mathrm{N}m\pi y}}\ .$$

[6] Pour une démonstration voir [7], p 15 - 16.

Ceci prouve la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général $\left(\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x}\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ sur $\{z \in \mathbb{C}; \Re e\ z > 0, |z| \leq 1\}$.

En particulier, d'après le théorème de limite termes à termes d'une série de fonctions, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{s\longrightarrow 0\\ \Re e\ s>0}} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \lim_{\substack{s\longrightarrow 0\\ \Re e\ s>0}} \left(\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x}\right)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \widehat{\mathrm{H}_{0,my}}(n)e^{2imn\pi x}\ .\end{aligned}$$

De même, l'estimation $\left|\sum_{m=\mathrm{M}}^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x}\right| \leq \frac{16e^{\pi}}{y}\sum_{m=\mathrm{M}}^{+\infty}\frac{1}{e^{m\pi y}-1}$, valable pour $\mathrm{M} \in \mathbb{N}^*$ et $z = x+iy \in \mathcal{H}$ montre la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sur $\{z \in \mathbb{C}; \Re e\ z > 0, |z| \leq 1\}$, d'où en particulier :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{s\longrightarrow 0\\ \Re e\ s>0}} \sum_{m\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x} &= \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \lim_{\substack{s\longrightarrow 0\\ \Re e\ s>0}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\widehat{\mathrm{H}_{s,my}}(n)e^{2imn\pi x}\right)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \widehat{\mathrm{H}_{0,my}}(n)e^{2imn\pi x}\ .\end{aligned}$$

• Enfin, pour conclure, calculons $\widehat{\mathrm{H}_{0,my}}(n)$ pour $y > 0$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*$.

D'après le calcul de la transformée de Fourier effectué page 10, on a :
$\forall y > 0,\ \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(t+iy)^2}\ dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\\ -4\pi^2 x e^{-2\pi xy} & \text{si } x > 0\end{cases}$.

Donc :

$$\widehat{\mathrm{H}_{0,my}}(n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi nt}}{(t-imy)^2}\ dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi(-n)t}}{(t+imy)^2}\ dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0.\\ 4\pi^2 n e^{-2mn\pi y} & \text{si } x < 0.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi : } \sum_{m\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \widehat{\mathrm{H}_{0,my}}(n)e^{2imn\pi x} &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{-1} 4\pi^2 n e^{-2mn\pi y}e^{2imn\pi x}\\ &= -4\pi^2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-2imn\pi z}\\ &= -4\pi^2\sum_{p=1}^{+\infty}\sigma_1(p)e^{-2ip\pi z}\ .\end{aligned}$$

Ceci finit de démontrer le lemme.

□

En rassemblant tous les résultats intermédiaires de ce paragraphe, on en déduit donc que pour tout $z \in \mathcal{H}$, $\lim_{\substack{s\longrightarrow 0\\ \Re e\ s>0}} \Phi(z,s)$ existe, et vaut $\frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2\sum_{p=1}^{+\infty}\sigma_1(p)e^{-2ip\pi z} - \frac{\pi}{\Im m\ z}$, d'où la définition - propriété suivante :

Définition - Propriété : La fonction ${G_2}^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $z \in \mathcal{H}$ par : ${G_2}^*(z) = \lim_{\substack{s \longrightarrow 0 \\ \Re e\ s>0}} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s}$ est correctement définie, et vérifie pour tout $z \in \mathcal{H}$:

$$G_2^*(z) = G_2(z) - \frac{\pi}{\Im m\ z}\ .$$

Désormais, nous allons pouvoir constater ce que l'on a gagné et perdu, par rapport à la définition de G_2 : G_2^* n'est pas holomorphe, mais vérifie la condition de modularité de poids 2 sous l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Propriété :
1. G_2^* n'est pas une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}$.
2. $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),\ \forall z \in \mathcal{H},\ G_2^*\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 G_2^*(z).$

Démonstration :
1. On a vu que G_2 est holomorphe sur $\mathcal{H}$.
Seulement $z \longmapsto \Im m\ z$ ne l'est pas, puisque $\frac{\partial\ \mathrm{Im} z}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2} \neq 0$.

2. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.
Alors, pour tout $z \in \mathcal{H}$ et tout $s \in \mathbb{C}$ tels que $\Re e\ s > 0$, on a successivement, en notant toujours $\Phi(z,s) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s}$:

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma.z, s) &= \Phi\left(\frac{az+b}{cz+d}, s\right) \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{(cz+d)^2|cz+d|^s}{(m(az+b)+n(cz+d))^2|m(az+b)+n(cz+d)|^s}\ . \end{aligned}$$

Or, $\left(\frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s}\right)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}$ est une famille sommable pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e\ s > 0$.

Donc, par la transformation $\left\{\begin{array}{l} m'{=}ma+nc \\ n'{=}mb+nd \end{array}\right.$, ie $\left\{\begin{array}{l} m{=}m'd-n'c \\ n{=}m'a+n'b \end{array}\right.$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi(z,s) &= \sum_{(m',n')\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(m'z+n')^2|m'z+n'|^s} \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{((ma+nc)z+(mb+nd))^2|(ma+nc)z+(mb+nd)|^s}\ , \end{aligned}$$

d'où $\Phi(\gamma.z,s) = (cz+d)^{2+s}\phi(z,s)$.

Ainsi, par passage à la limite, on obtient $G_2^*(\gamma.z) = (cz+d)^2 G_2^*(z)$.

□

De la condition de modularité de poids 2, sous l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$, appliquée à la fonction G_2^*, on déduit la transformation de G_2 sous l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$:

Corollaire : $\forall \gamma \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \forall z \in \mathcal{H},\ G_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 G_2(z) - 2i\pi c(cz+d).$

Démonstration : Soit $z \in \mathcal{H}$, et $\forall \gamma \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On a alors : $\Im m\ (\gamma . z) = \dfrac{\Im m\ z}{|cz+d|^2}$.

Les deux relations $\begin{cases} G_2^*(\gamma . z) = (cz+d)^2 G_2^*(z) \\ G_2^*(z) = G_2(z) - \dfrac{\pi}{\Im m\ z} \end{cases}$ conduisent alors au résultat.

□

2.3 Fonctions E_2 et $E_2{}^*$.

De même que nous divisons G_{2k} par $2\zeta(2k)$, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, afin d'avoir un developpement à l'infini commençant par le terme 1, nous allons aussi diviser $G_2{}^*$ par $2\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{3}$:

Notations :

- Pour $k \in \{2;3;4\}$, notons $E_{2k} = \dfrac{G_{2k}}{2\zeta(2k)}$
- $E_2{}^* = \dfrac{G_2}{2\zeta(2)} = \dfrac{3G_2}{\pi^2}$

On peut donc résumer les résultats établis dans ce chapitre, en terme de fonctions E_2 et $E_2{}^*$ comme suit :

Propriété : • La fonction E_2 vérifie :

♦ $\forall \tau \in \mathcal{H}$, $E_2(\tau) = 1 - 24 \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \sigma_1(p) e^{2ip\pi\tau}$.

♦ $\forall \gamma \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\forall z \in \mathcal{H}$, $\left(E_2 \underset{2}{|} \gamma\right)(z) = E_2(z) - \dfrac{6i}{\pi} \dfrac{c}{cz+d}$.

• La fonction $E_2{}^*$ définie par $\displaystyle\lim_{\substack{s \longrightarrow 0 \\ \Re e\ s > 0}} \frac{3}{\pi^2} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2 |mz+n|^s}$

vérifie : ♦ $\forall z \in \mathcal{H}$, $E_2{}^*(z) = E_2(z) - \dfrac{3}{\pi \Im m\ z}$.

♦ $\forall \gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\left(E_2{}^* \underset{2}{|} \gamma\right) = E_2{}^*(z)$.

Formes modulaires presque holomorphes et formes quasi-modulaires.

Nous avons vu au chapitre précédent qu'il était naturel de considérer les fonctions E_2 et E_2^*. Malheureusement, celles-ci ne répondent pas à tous les axiomes vérifiés par les formes modulaires classiques, à savoir la condition de modularité[1] et holomorphie sur $\mathcal{H}$.

Nous allons voir comment il est possible d'affaiblir la définition d'une forme modulaire afin que les fonctions E_2 et E_2^* soient les exemples typiques des «formes modulaires affaiblies».

3.1 Introduction des formes quasi-modulaires et des formes modulaires presques holomorphes.

3.1.1 Motivations.

Lorsque l'on regarde différentes démonstrations[2]de transcendance du nombre e, on voit que le fait que $\exp' = \exp$ est très important, puisqu'il montre que l'ensemble des exponentielles polynômes est stable par dérivation.

Dans le même ordre d'idée, on aimerait bien avoir un opérateur différentiel laissant stable l'ensemble $\mathcal{M}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_k(\Gamma)$ des formes modulaires, où Γ est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Or, un calcul simple montre que si $f \in \mathcal{M}_k$ et $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a

$$(f' \underset{k+2}{|} \alpha)(z) = f'(z) + \frac{kc}{cz+d} f(z) \tag{3.1}$$

Ceci empêche alors f' d'être une forme modulaire dès que $f \notin \mathcal{M}_0$: dans le cas contraire, on aurait, pour un certain $l \in \mathbb{N}$, $(f' \underset{l}{|} \alpha) = f'$ pour tout $\alpha \in \Gamma$, ce qui impliquerait que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, le polynôme $\left((z+\mathrm{X})^l - (z+\mathrm{X})^{k+2}\right) f'(z) - k(z+\mathrm{X})^{k+1} f(z)$ serait le polynôme nul, ie f serait constante, ce qui n'est pas.

Ainsi, la dérivation usuelle ne laisse pas stable l'ensemble des formes modulaires.

---

[1] <u>**Définition :**</u> Etant donné $k \in \mathbb{N}$ et H un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on dira qu'une fonction $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifie la <u>**condition de modularité de poids k relativement à** H</u> lorsque $\forall \alpha \in \mathcal{H}$, $(f \underset{k}{|} \alpha) = f$.
Si $\mathrm{H} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on parlera plus simplement de condition de modularité de poids k.

[2] T. Schneider : *Introduction aux nombres transcendants*, chap. 2, §2, Ed Gauthier-Villars, 1959.

De plus, la formule (3.1) fait penser à la relation de transformation de E_2 : $\forall z \in \mathcal{H},\ \forall \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ (\mathrm{E}_2 \underset{k}{|} \alpha)(z) = \mathrm{E}_2(z) + \dfrac{6}{i\pi}\dfrac{c}{cz+d}$. On veut évidemment grossir l'algèbre des formes modulaires de manière à ce qu'elle reste une algèbre, d'où l'idée d'affaiblir la condition de modularité en $(f \underset{k}{|} \alpha)(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} f_i(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^i$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$, certaines fonctions $f_0, \cdots, f_r$ holomorphes sur $\mathcal{H}$ et pour tout $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et tout $z \in \mathcal{H}$.

Ceci donne les formes quasi-modulaires introduite par D. Zagier.

D'un autre coté, on peut aussi affaiblir la condition d'holomorphie plutôt que la condition de modularité. La définition de E_2^* et le cahier des charges suggèrent alors d'affaiblir la condition d'holomorphie ainsi : il existe $r \in \mathbb{N}$, il existe des fonctions $f_0, \cdots,$ f_r holomorphes sur $\mathcal{H}$ tels que pour tout $z \in \mathcal{H}$, $f(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} \frac{f_i(z)}{(z-\overline{z})^i}$.

Ceci donne les formes modulaires presques holomorphes, considérées par G. Shimura.

3.1.2 Définitions et premiers exemples.

Commençons par rappeler la définition d'une forme modulaire, afin de pouvoir constater plus facilement l'affaiblissement des deux définitions suivantes :

Définition 0 :

Soit $k \in \mathbb{N}$ et Γ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Une fonction $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée une **forme modulaire, de poids *k*, relativement à Γ** lorsque :

- f est holomoprhe sur $\mathcal{H}$
- $\forall \gamma \in \Gamma,\ \left(f \underset{k}{|} \gamma\right) = f.$
- si $h = \inf\left\{ n \in \mathbb{N};\ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \right\}$, alors $\left(f \underset{k}{|} \alpha\right)$ admet un développement de Fourier du type :
$$\forall z \in \mathcal{H},\ \left(f \underset{k}{|} \alpha\right)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{\frac{2in\pi}{h} z}$$
(f est holomorphe aux pointes.)

On a les définitions suivantes de formes quasi-modulaires, et de formes modulaires presque holomorphes.

Définition 1 : Soit $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et Γ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Une fonction $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée une **forme quasi-modulaire, de poids *k*, relativement à Γ** s'il existe des fonction $f_0, \cdots, f_l$ holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que :

1. f est holomorphe sur $\mathcal{H}$.

2. $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall z \in \mathcal{H}$, $(f \underset{k}{|} \gamma)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{l} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$.

3. $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists c > 0$, $\forall i \in [\![0\,;\, l]\!]$, $\forall z \in \mathcal{H}$, $|f_i(z)| \leq c \left(\dfrac{1+|z|^2}{\Im m\ z}\right)^p$.

Si $f_l \neq 0$, on dit que f est une forme quasi-modulaire, de poids k et de profondeur l relativement à Γ.

<u>Définition 2 :</u> Soit $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et Γ un sous groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Une fonction $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée une **<u>forme modulaire presque holomorphe, de poids *k*, relativement à Γ</u>** s'il existe des fonction $f_0, \cdots, f_l$ holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que :

1. $\forall z \in \mathcal{H}$, $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{l} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$.

2. $\forall \gamma \in \Gamma$, $(f \underset{k}{|} \gamma) = f$.

3. $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists c > 0$, $\forall i \in [\![0\,;\, l]\!]$, $\forall z \in \mathcal{H}$, $|f_i(z)| \leq c \left(\dfrac{1+|z|^2}{\Im m\ z}\right)^p$.

Si $f_l \neq 0$, on dit que f est une forme modulaire presque holomorphe, de poids k et de profondeur l relativement à Γ.

On note désormais $\widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq l}(\Gamma)$ (resp. $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq l}(\Gamma)$) l'ensemble des formes quasi-modulaire (resp. formes modulaires presque holomorphes) de poids k et de profondeur l, relativement à Γ.

On constate que la condition d'holomorphie à l'infini d'une forme modulaire s'est transformée en une condition de croissance (hypothèse iii. des deux définitions ci-dessus)

Justifions alors que si $f \in \mathcal{M}_k(\mathrm{S}l_2(\mathbb{Z}))$, f vérifie bien cette condition de croissance :

On sait[3] que $\mathcal{M}_k(\mathrm{S}l_2(\mathbb{Z})) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad k \text{ est impair ou } k = 2 \\ \mathbb{C} & \text{si} \quad k = 0 \\ \mathrm{S}_k(\mathrm{S}l_2(\mathbb{Z})) \oplus \mathbb{C}\mathrm{G}_k & \text{si} \quad k \text{ est pair ou } k \geq 4 \end{cases}$

Soit alors $f \in \mathcal{M}_k(\mathrm{S}l_2(\mathbb{Z}))$.

♦ Si $k \in \{0; 2\}$ ou si k est impair, le résultat est clair.

♦ Si k est pair et vérifie $k \geq 4$, alors $f = g + \lambda \mathrm{E}_k$ où $g \in \mathrm{S}_k(\mathrm{S}l_2(\mathbb{Z}))$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. La fonction $\varphi = g \times (\Im m\ )^{\frac{k}{2}}$ vérifie $\displaystyle\lim_{|z| \longrightarrow +\infty} \varphi(z) = 0$ et est aussi continue sur le domaine fondamental $\mathrm{D} = \{z \in \mathcal{H}; |\Re e\ z| < \dfrac{1}{2} \text{ et } |z| > 1\}$. Donc elle est bornée sur D, et puisqu'elle est invariante par l'action du groupe Γ sur le demi-plan de Poincaré, elle est bornée sur $\mathcal{H}$ tout entier : $\exists \mathrm{C}_0 > 0$, $\forall z \in \mathcal{H}$, $|g(z)| \leq \dfrac{\mathrm{C}_0}{(\Im m\ z)^{\frac{k}{2}}}$.

[3] Voir [26], chap. 7, §3.2, p 143.

Par ailleurs, dans la base $\big(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}(\mathrm{X}-1), \cdots, \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-2k+1)\big)$ de $\mathbb{C}_{2k}[\mathrm{X}]$, il existe des complexes $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{2k-1}) \in \mathbb{C}^{2k}$ tels que $\mathrm{X}^{2k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{2k} \alpha_1 \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-i+1)$.

On a ainsi successivement :

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathcal{H},\ |\mathrm{E}_{2k}(z)| &\leq 1 + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{-2n\pi \Im m\ z} \text{ où } \beta \in \mathbb{R}_+ \\
&\leq 1 + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k} \mathrm{Y}^n \text{ où } \mathrm{Y} = e^{-2\pi \Im m\ z} \in [0;1[\\
&\leq 1 + \beta \sum_{i=0}^{2k-1} \alpha_i \mathrm{Y}^{i+1} \left(\sum_{n=i}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-i)\mathrm{Y}^{n-i-1} \right) \\
&\leq 1 + \beta \sum_{i=0}^{2k-1} \alpha_i \frac{(i+1)!\mathrm{Y}^{i+1}}{(1-\mathrm{Y})^{i+2}} \\
&\leq 1 + \beta (2k)! \sum_{i=0}^{2k-1} \alpha_i \frac{\mathrm{Y}^{i+1}}{(1-\mathrm{Y})^{i+2}}
\end{aligned}$$

On a alors $\forall z \in \mathcal{H},\ |f(z)| \leq \dfrac{\mathrm{C}_0}{(\Im m\ z)^{k/2}} + 1 + \beta \displaystyle\sum_{i=0}^{2k-1} \alpha_i \frac{e^{-2(i+1)\pi \Im m\ z}}{(1-e^{-2\pi \Im m\ z})^{i+2}}$ d'où $\forall z \in \mathcal{H},\ \left(\dfrac{\Im m\ z}{1+|z|^2}\right)^{2k+1} |f(z)| \leq 1 + \mathrm{C}_0 + \beta \displaystyle\sum_{i=0}^{2k-1} \alpha_i \left(\frac{\Im m\ z}{1+|z|^2}\right)^{2k+1} \frac{e^{-2(i+1)\pi \Im m\ z}}{(1-e^{-2\pi \Im m\ z})^{i+2}}$.

Or $\forall i \in [\![\, 0\,;\, 2k-1 \,]\!]$, $\psi_i : z \longmapsto \alpha_i \left(\dfrac{\Im m\ z}{1+|z|^2}\right)^{2k+1} \dfrac{e^{-2(i+1)\pi \Im m\ z}}{(1-e^{-2\pi \Im m\ z})^{i+2}}$ est bornée sur $\mathcal{H}$ car

$$\left\{\begin{array}{l}
\psi_i \text{ est continue sur } \mathcal{H}. \\[2ex]
\psi_i(z) \underset{z \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{(\Im m\ z)^{2k-i-1}}{(2\pi)^{i+2}} \text{ d'où } \psi_i(z) \underset{z \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \\[2ex]
\psi_i(z) \underset{|z| \longrightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{(1+|z|^2)^{2k+1}} \dfrac{(\Im m\ z)^{2k+1}}{(1-e^{-2\pi \Im m\ z})^{i+2}} \right) \text{ d'où } \psi_i(z) \underset{|z| \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{array}\right.$$

Ceci prouve donc que : $\exists \mathrm{C} > 0,\ \forall z \in \mathcal{H},\ |f(z)| \leq \mathrm{C} \left(\dfrac{1+|z|^2}{\Im m\ z} \right)^{2k+1}$, et donc que si f est une forme modulaire classique, f vérifie la condition de croissance.

Essentiellement, nous avons démontré au chapitre précédent la propriété suivante :

Propriété :

1. Pour tout groupe de congruence Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a : $\mathcal{M}_k(\Gamma) = \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq 0}(\Gamma) = \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq 0}(\Gamma)$
2. $\mathrm{E}_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq 1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$
3. $\mathrm{E}_2^* \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq 1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$

Pour finir, voici quelques notations :

Notation :

- $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma) = \displaystyle\bigcup_{s \in \mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ $\qquad$ $\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma) = \displaystyle\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$
- $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma) = \displaystyle\bigcup_{s \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ $\qquad$ $\widehat{\mathcal{M}}(\Gamma) = \displaystyle\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$

3.2 Premières propriétés des formes quasi-modulaires et des formes modulaires presque holomorphes.

Nous allons voir dans ce paragraphe trois propriétés semblables pour les deux extensions de formes modulaires. Pour cela, nous adapterons les arguments de Martin et Royer[4] pour les deux extensions possibles au cas de niveau supérieurs.

3.2.1 Utilité de la profondeur.

Avant de justifier les sommes directes définissant $\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma)$ et $\widehat{\mathcal{M}}(\Gamma)$, nous allons voir qu'il n'y a pas de perte de renseignements sur la profondeur dans les notations $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ et $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$.

Propriété : *(Unicité de la profondeur.)*
Soit Γ un sous - groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel qu'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ avec $c \neq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$.

1. Si $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ est non nulle, alors $\exists! s \in \mathbb{N}$, $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$.
2. Si $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ est non nulle, alors $\exists! s \in \mathbb{N}$, $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$.

Remarquons que si f est nulle, une adaptation de l'argument qui suit montre que dans les deux cas, on a nécessairement $s = 0$; par contre le poids ne peut être déterminé uniquement.

Démonstration : Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\Gamma(\mathrm{N}) \subset \Gamma$.

1. Soit $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma) \cap \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s'}(\Gamma)$.
Quitte à renommer s et s', on peut supposer que $s \leq s'$.
Alors il existe des fonctions $g_0, \cdots, g_s, h_0, \cdots, h_{s'}$ holomorphes sur $\mathcal{H}$, avec $g_s \not\equiv 0$ et $h_{s'} \not\equiv 0$ telles que :

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,\ \forall z \in \mathcal{H},\ \begin{cases} (f \underset{k}{|} \gamma)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} g_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \\ (f \underset{k}{|} \gamma)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s'} h_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \end{cases}$$

Or $\exists z_0 \in \mathcal{H}$, $\begin{cases} g_s(z_0) \neq 0 \\ h_{s'}(z_0) \neq 0 \end{cases}$, car les zéros de g_s et $h_{s'}$ sont isolés.

Ainsi $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{s} g_j(z_0) c^j (cz_0 + d)^{k+s'-j} = \sum_{j=0}^{s'} h_j(z_0) c^j (cz_0 + d)^{k+s'-j}$.

Puisque $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\begin{pmatrix} 1 - p\mathrm{N} & -p^2\mathrm{N} \\ \mathrm{N} & 1 + p\mathrm{N} \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathrm{N}) \subset \Gamma$, on obtient, pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{j=0}^{s} g_j(z_0) \mathrm{N}^j (\mathrm{N}z_0 + 1 + p\mathrm{N})^{k+s-j} = \sum_{j=0}^{s'} h_j(z_0) \mathrm{N}^j (\mathrm{N}z_0 + 1 + p\mathrm{N})^{k+s'-j}.$$

[4] Voir [15], chap. 17, p 67.

On a ainsi l'égalité polynomiale :

$$\sum_{j=0}^{s} \mathrm{N}^j g_j(z_0)\mathrm{X}^{k+s-j} = \sum_{j=0}^{s'} \mathrm{N}^j h_j(z_0)\mathrm{X}^{k+s'-j}$$

Par égalité des termes de degré inférieur à k et du degré de ce polynôme, on obtient $\begin{cases} s' = s \\ \forall j \in [\![0\,;\,s]\!],\ g_j(z_0) = h_j(z_0) \end{cases}$

2. Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma) \cap \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s'}(\Gamma)$.

De même que précédemment, on peut supposer que $s \leq s'$.
De plus, il existe des fonctions $g_0, \cdots, g_s, h_0, \cdots, h_{s'}$ holomorphes sur $\mathcal{H}$, avec $g_s \not\equiv 0$ et $h_{s'} \not\equiv 0$ telles que :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \sum_{j=0}^{s} \frac{g_j(z)}{(z-\overline{z})^j} = \sum_{j=0}^{s'} \frac{h_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$$

En appliquant p fois, pour $p \in \mathbb{N}$, l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ à la dernière égalité et en multipliant à chaque étape par $(z-\overline{z})^2$, on obtient, puisque les fonctions $g_0, \cdots, g_s, h_0, \cdots, h_{s'}$ sont holomorphes :
$\forall p \in [\![0\,;\,s]\!],\ \displaystyle\sum_{j=0}^{s-p} \frac{(j+p)!}{j!} \frac{g_{j+p}(z)}{(z-\overline{z})^j} = \sum_{j=0}^{s'-p} \frac{(j+p)!}{j!} \frac{h_{j+p}(z)}{(z-\overline{z})^j}$.

En particulier, lorsque $p = s$, $s! g_s(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s'-p} \frac{(j+p)!}{j!} \frac{h_{j+p}(z)}{(z-\overline{z})^j}$.

Si $s < s'$, alors $s'-s$ nouvelles applications de $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ et multiplication par $(z-\overline{z})^2$ fournirai $s'! h_{s'} = 0$, d'où $h_{s'} = 0$, ce qui n'est pas.

Ainsi $s = s'$.

□

3.2.2 Structure d'algèbre graduée sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$.

Si Γ est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on sait[5] que l'ensemble $\mathcal{M}(\Gamma) = \displaystyle\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(\Gamma)$ est muni d'une structure d'algèbre graduée[6].

Nous allons montrer que les ensembles des formes quasi-modulaires et des formes modulaires presque holomorphes, relativement à Γ peuvent aussi être munis d'une structure d'algèbre graduée.

[5] Pour le cas des formes modulaires classique, voir [26], chap. 7, §3.2, remarque p 145.

[6] **Définition :** Une algèbre A est dite **graduée** s'il existe une famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de A tels que : $\mathrm{A} = \displaystyle\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_i$
$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j \subset \mathrm{A}_{i+j}$

Propriété : Soit Γ un sous - groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

1. Les sous espaces vectoriels $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ (resp. $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$), pour $k \in \mathbb{Z}$, sont en sommes directes.
2. $\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ et $\widehat{\mathcal{M}}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ sont des algèbres graduées.

Démonstration : 1. • Pour montrer qu'un nombre infini dénombrable de sous-espaces vectoriels sont en somme directe, il suffit de vérifier qu'un nombre quelconque d'entre eux sont en somme directe. Montrons donc que l'injectivité de l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & \widetilde{\mathcal{M}}_{k_1}(\Gamma)\times\cdots\times\widetilde{\mathcal{M}}_{k_n}(\Gamma) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}}_{k_1}(\Gamma)+\cdots+\widetilde{\mathcal{M}}_{k_n}(\Gamma) \\ & (f_1,\cdots,f_n) & \longmapsto & f_1+\cdots+f_n \end{array}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(k_1,\cdots,k_n) \in \mathbb{N}^n$.

♦ Pour $n = 1$, le résultat est clair.
♦ Supposons le résultat établià l'ordre $n-1$.

Soit alors $(f_1,\cdots,f_n) \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\leq s_1}_{k_1}(\Gamma)\times\cdots\times\widetilde{\mathcal{M}}^{\leq s_n}_{k_n}(\Gamma)$ telles que $\sum_{i=1}^{n} f_i = 0$.

Notons $(f_i \underset{k_i}{|} \alpha)(z) = \sum_{j=0}^{s_i} f_{ij}(z)\left(\dfrac{c}{cz+d}\right)^j$, l'équation de transformation de f_i pour tout $z \in \mathcal{H}$, $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$ et $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Alors, puisque $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\begin{pmatrix} 1-p\mathrm{N} & -p^2\mathrm{N} \\ \mathrm{N} & 1+p\mathrm{N} \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathrm{N}) \subset \Gamma$, cette même équation de transformation implique que pour tout $z \in \mathcal{H}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{s_i} f_{ij}(z)(\mathrm{N}z+1+p\mathrm{N})^{k_i+\max\limits_{1\leq i\leq n} s_i - j}$, d'où en notant $s = \max\limits_{1\leq i\leq n} s_i$, pour tout $z \in \mathcal{H}$, le polynôme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{s_i} f_{ij}(z)\mathrm{X}^{k_i+s-j}$ est nul.

En particulier, son coefficient dominant est nul, c'est-à-dire $f_{i_0 0} = 0$ où i_0 est tel que $k_{i_0} = \max\limits_{i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]} k_i$. Or $(f_{i_0} \underset{k}{|} \mathrm{I}_2) = f_{i_0} = f_{i_0 0}$, d'où $f_{i_0} = 0$, et l'hypothèse de récurrence permet de conclure que $f_1 = \cdots = f_n = 0$, d'où φ_n est injective.

Ainsi, les sous-espaces vectoriels $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ sont en somme directe.

• Soit $(f_1,\cdots,f_n) \in \widehat{\mathcal{M}}^{\leq s_1}_{k_1}(\Gamma)\times\cdots\times\widehat{\mathcal{M}}^{\leq s_n}_{k_n}(\Gamma)$ telles que $\sum_{i=1}^{n} f_i = 0$.

Par le même raisonnement que précédemment, l'équation de transformation appliquée à $\sum_{i=1}^{n-1} f_i \in \widehat{\mathcal{M}}_{k_n}(\Gamma)$ montre que le polynôme $\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\mathrm{X}^i$ est nul pour tout $z \in \mathcal{H}$, d'où en particulier $f_{i_0} = 0$ avec $i_0 \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$ tel que $k_{i_0} = \max\limits_{i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]} k_i$.

Ceci permet de conclure, d'après le principe de récurrence, que les sous-espaces vectoriels $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ sont en somme directe.

2. Notons alors $\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ et $\widehat{\mathcal{M}}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$.

$\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma)$ et $\widehat{\mathcal{M}}(\Gamma)$ sont évidemment munis d'une structure d'espace vectoriel. De plus si $(f,g) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k_1}^{\leq s_1}(\Gamma) \times \widetilde{\mathcal{M}}_{k_2}^{\leq s_2}(\Gamma)$ $\Big($resp. $(f,g) \in \widehat{\mathcal{M}}_{k_1}^{\leq s_1}(\Gamma) \times \widehat{\mathcal{M}}_{k_2}^{\leq s_2}(\Gamma)\Big)$, un calcul immédiat montre alors que $fg \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k_1+k_2}^{\leq s_1+s_2}(\Gamma) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{k_1+k_2}(\Gamma) \subset \widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma)$ $\Big($resp. $fg \in \widehat{\mathcal{M}}_{k_1+k_2}^{\leq s_1+s_2}(\Gamma) \subset \widehat{\mathcal{M}}_{k_1+k_2}(\Gamma) \subset \widehat{\mathcal{M}}(\Gamma)\Big)$.

Ainsi, $\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma)$ et $\widehat{\mathcal{M}}(\Gamma)$ sont aussi des algèbres graduées par le poids.

□

3.2.3 Opérateurs différentiels sur $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$.

On a voulu généraliser la notion de forme modulaire de manière à connaitre des opérateurs différentiels laissant stables les algèbres $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$, où Γ est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

L'équation de transformation des formes quasi-modulaires a été choisie de façon à avoir la propriété suivante :

Propriété : Soit $(k,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et Γ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
On a alors : $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)\right) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{k+2}^{\leq s+1}(\Gamma)$.

Démonstration : Soit $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$.

Alors, il existe des fonctions $f_0, \cdots, f_s$ holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que l'équation de transformation de f s'écrive : $\forall \gamma \in \Gamma, \forall z \in \mathcal{H}$, $(f\underset{k}{|}\gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z)\left(\dfrac{c}{cz+d}\right)^j$.

Ainsi, si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $z \in \mathcal{H}$, un calcul simple montre que :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\underset{k+2}{|}\gamma\right)(z) &= f_0'(z) + \sum_{j=1}^{s}\Big(f_j'(z) + (k-j)f_{j-1}(z)\Big)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \\ &\quad + (k-s)f_s(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{s+1}.\end{aligned}$$

Ceci montre donc le second point de la définition 1 , le premier et le troisième point étant clair par l'expression précédente.

□

Il nous reste à trouver un opérateur similaire pour les formes modulaires presque holomorphes. Or, au cours de la démonstration de la somme directe des espaces vectoriels $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$, nous avons naturellement appliqué l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, afin d'annuler le «coefficient constant» du polynôme en $\dfrac{1}{z-\overline{z}}$, qui est une fonction holomorphe, puis on a multiplié par $(z-\overline{z})^2$ pour simplifier l'expression obtenue.

Ceci invite donc à considérer l'opérateur, noté ε par Shimura[7], défini sur $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ par $(\varepsilon f)(z) = (z-\overline{z})^2 \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)$ pour tout $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ et $z \in \mathcal{H}$.

Nous avons alors une propriété analogue à la précédente :

[7]Voir [31], §7.

Propriété : Soit $(k,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$
Γ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
On a alors : $\epsilon\left(\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)\right) \subset \widehat{\mathcal{M}}_{k-2}^{\leq s-1}(\Gamma)$.

Démonstration : Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$.
Alors, il existe des fonctions $f_0, \cdots, f_s$ holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que f s'écrive :
$\forall z \in \mathcal{H},\ f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$.
Un calcul simple montre alors que : $\forall z \in \mathcal{H},\ (\varepsilon f)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s-1} \frac{(j+1)f_{j+1}(z)}{(z-\overline{z})^j}$.
Ceci prouve le premier point de la définition 2, ainsi que le troisième.
Pour le second point, on a pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $z \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\left(\varepsilon f \underset{k-2}{|} \gamma\right)(z) &= \frac{(\gamma.z - \overline{\gamma.z})^2}{(cz+d)^{k-2}} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\gamma.z) \\
&= \frac{(z-\overline{z})^2}{|cz+d|^4} \frac{(c\overline{z}+d)^2}{(cz+d)^{k-2}} \frac{\partial f \circ \gamma}{\partial \overline{z}}(z) \\
&= \frac{(z-\overline{z})^2}{(cz+d)^k} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left((cz+d)^k f(z)\right) \\
&= (z-\overline{z})^2 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) \\
&= (\varepsilon f)(z)
\end{aligned}$$

□

Le fait d'avoir un opérateur qui augmente le poids de 2 pour une approche, et un autre opérateur qui diminue le poids de 2 pour l'autre approche, semble rompre la similitude entre les deux extensions possibles. Pour étudier cela, calculons l'adjoint de l'opérateur ε pour le produit scalaire de Peterson, puisqu'alors son adjoint augmentera de 2 le poids.

Rappelons[8] que si f et g sont deux formes paraboliques de poids k relativement au sous - groupe de congruence Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors, $\displaystyle\int_{\mathrm{D}} f(x+iy)\overline{g(x+iy)}y^k \frac{dxdy}{y^2}$, où D est un domaine fondamental de Γ, est convergente et indépendante de D. L'application $< .,. >$ définie sur $(\mathrm{S}_k(\Gamma))^2$ par $< f,g >= \displaystyle\frac{1}{\lambda}\int_{\mathrm{D}} f(x+iy)\overline{g(x+iy)}y^k \frac{dxdy}{y^2}$, avec $\lambda = \displaystyle\int_{\mathrm{D}} \frac{dxdy}{y^2}$, est alors un produit scalaire.

En effet, ceci vient des trois faits suivant : $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$ vérifie $f \in \mathrm{S}_k(\Gamma)$ si et seulement si $z \longmapsto (\Im m\ z)^{\frac{k}{2}} f(z)$ est bornée sur $\mathcal{H}$, un domaine fondamental est de volume fini, et enfin f et g vérifient les conditions de modularité.

Par analogie à $\mathrm{S}_k(\Gamma)$ pour un sous-groupe Γ de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, notons $\widehat{\mathrm{S}}_k(\Gamma)$ l'ensemble des formes paraboliques presque holomorphes, ie l'ensemble des formes

[8] Voir [13], chap. 3, §4.

modulaires presque holomorphes dont le coefficient constant dans le développement de Fourier à l'infini est nul.

Par ailleurs, si $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$, on peut toujours écrire que $f \in \widehat{\mathrm{S}}_k(\Gamma)$ si et seulement si $z \longmapsto (\Im m\ z)^{\frac{k}{2}} f(z)$ est bornée ; néanmoins la condition de modularité n'est plus vraie, ce qui empêche l'indépendance par rapport à D de l'intégrale, mais l'application $< .,. >: \left(\widehat{\mathrm{S}}_k(\Gamma)\right)^2 \longmapsto \mathbb{C}$ définit toujours un produit scalaire.

Il est donc bien légitime de vouloir déterminer les adjoints de $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et ε pour le produit scalaire de Pëtersonn.

Pour cela, considérant $\langle \varepsilon f, g\rangle$, l'idée est d'arriver à faire porter sur g l'opérateur $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$, opérant à l'origine sur f.

Nous allons donc faire une intégration par parties. La difficulté technique provient du calcul des termes de bord, ce qui est fait dans le lemme suivant :

<u>**Lemme :**</u> Soit • $\mathrm{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| \geq 1, -\dfrac{1}{2} \leq \Re e\ z \leq \dfrac{1}{2} \right\}$ un domaine fondamental de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
• $f \in \widehat{\mathcal{M}}^0_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ et $g \in \widehat{\mathcal{M}}^0_{k-2}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.
Alors, $\displaystyle\int_{\mathrm{D}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(f(x+iy)\overline{g(x+iy)} y^{k-2} \right) dxdy = 0.$

Remarquons que dans ce lemme, nous réduisons l'étude au seul groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. En effet, pour pouvoir calculer les deux intégrales, il est de bon augure que l'intégrande soit 1 - périodique. Le résultat reste vrai sur un sous-groupe de congruences contenant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; néanmoins, nous ne calculerons l'adjoint de opérateur ε que dans le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Mais nous vérifierons la propriété attendue pour tout sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Pour la démonstration de ce lemme, nous utiliserons la formule de Green-Riemann[9], afin d'avoir à calculer une intégrale curviligne, puis nous concluerons en invoquant l'invariance par $z \longmapsto -\dfrac{1}{z}$ de l'arc de cercle $\left\{e^{i\theta}; \theta \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]\right\}$, l'orientation étant changée. L'application de la formule de Green-Riemann nécessite de se restreindre à un compact, un passage à la limite sera donc aussi nécessaire.

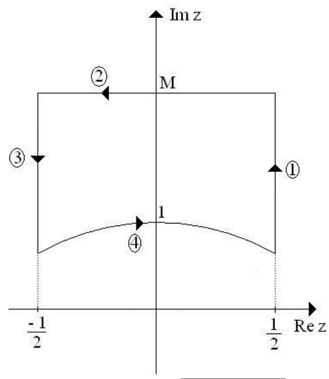
[9] <u>**Lemme :**</u> (<u>Formule de Green - Riemann</u>)
Soit Δ un compact de R^2.
$\partial^+\Delta$ la frontière de Δ orienté dans le sens positif.
$\omega = \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy$ une forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert contenant Δ.
Alors, $\displaystyle\int\int_{\Delta} \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial^+\Delta} \omega.$
Voir L. SCHWARTZ : *Analyse IV*, chap. 6, §10 p 361 - 362 , Ed Hermann

Démonstration : Notons pour $\mathrm{M} > 1$, $\mathrm{D(M)} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \Re e\ z \leq \frac{1}{2}, 0 < \Im m\ z \leq \mathrm{M} \right\}$.

Alors, d'après l'égalité de Green-Riemann, on a, car $-\frac{i}{2} f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} dz$ est une forme différentielle de classe C^1 sur $\mathcal{H}$, ouvert contenant $\mathrm{D(M)}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{D(M)}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} \right) dxdy &= \frac{1}{2} \int_{\mathrm{D(M)}} \frac{\partial}{\partial x} \left(f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} \right) dxdy \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathrm{D(M)}} \frac{\partial}{\partial y} \left(-i f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} \right) dxdy \\
&= -\frac{i}{2} \int_{\partial^+ \mathrm{D(M)}} f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} (dx + idy) \\
&= -\frac{i}{2} \int_{\partial^+ \mathrm{D(M)}} f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} dz
\end{aligned}$$

Orientons le contour de $\partial^+\mathrm{D(M)}$ de la manière suivante :



Par 1 - périodicité de $x \longmapsto f(x+iy)\overline{g(x+iy)} y^k$ pour tout $y > 0$, on a $\int_{①} f(z)\overline{g(z)} y^k dz + \int_{③} f(z)\overline{g(z)} y^k dz = 0$.

De plus, ④ est sa propre image par $z \longmapsto -\frac{1}{z}$, l'orientation étant changée, ce qui prouve que $\int_{④} f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} dz = 0$, car :

$$\begin{aligned}
\int_{④} f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} dz &= -\int_{\mathrm{S}④} f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} dz \text{ , où } \mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\int_{④} f\left(\frac{-1}{z}\right) \overline{g\left(\frac{-1}{z}\right)} \left(\frac{-\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}}}{2i} \right)^{k-2} \frac{dz}{z^2} \\
&= -\int_{④} f(z)\overline{g(z)} z^k \overline{z}^{k-2} \frac{1}{z^2 |z|^{2k-4}} \left(\frac{z - \overline{z}}{2i} \right)^{k-2} dz \\
&= -\int_{④} f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} dz.
\end{aligned}$$

Enfin, on utilise le lemme suivant pour estimer la contribution le long de ② :

Lemme[11]: Soit $f \in \widehat{\mathrm{S}}_k(\Gamma)$ où Γ est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Alors : $\exists c > 0$, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(\gamma.(x+iy))| \underset{y \longrightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-cy})$.

Ainsi, il existe $c > 0$, tel que $\displaystyle\int_{②} f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}dz \underset{\mathrm{M}\longrightarrow+\infty}{=} \mathcal{O}(\mathrm{M}^{k-2}e^{-c\mathrm{M}})$, d'où $\displaystyle\lim_{\mathrm{M}\longrightarrow+\infty} \int_{\mathrm{D(M)}} \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}\right) dz = 0.$

Or, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et d'après ce même lemme précédent, on a l'égalité :

$$\lim_{\mathrm{M}\longrightarrow+\infty} \int_{\mathrm{D(M)}} \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}\right) dxdy = \int_{\mathrm{D}} \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}\right) dxdy.$$

D'où :: $\displaystyle\int_{\mathrm{D}} \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}\right) dxdy = 0$, ce qui prouve la propriété.

□

Nous pouvons désormais effectuer nos deux intégrations par parties :

Propriété : Si $f \in \widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, alors

$$\begin{aligned}(\varepsilon^* f)(z) &= \frac{4}{(\Im m\ z)^{k-2}} \frac{\partial(f \times \Im m\ ^{k-2})}{\partial z}(z) \\ &= 4\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{k-2}{z-\overline{z}} f(z)\right).\end{aligned}$$

Démonstration : Puisque $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}$ est une dérivation, on a, si $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ et $g \in \widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$:

$$\begin{aligned}< \varepsilon f, g > &= -\frac{4}{\lambda} \int_{\mathrm{D}} y^2 \frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z)\overline{g(z)}y^{k-4}\ dxdy \\ &= -\frac{4}{\lambda} \int_{\mathrm{D}} \frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z)\left(\overline{g(z)}y^{k-2}\right)\ dxdy \\ &= -\frac{4}{\lambda} \int_{\mathrm{D}} \frac{\partial}{\partial\overline{z}}(z)\left(f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}\right)\ dxdy + \frac{4}{\lambda}\int_{\mathrm{D}} f(z)\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\overline{g(z)}y^{k-2}\right)\ dxdy \\ &= \frac{4}{\lambda}\int_{\mathrm{D}} f(z)\overline{\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(g(z)y^{k-2}\right)\ dxdy} \\ &= \left\langle f; \frac{4}{(\Im m\ )^{k-2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(g \times \Im m\ ^{k-2}\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

Ceci prouve la propriété, car $\varepsilon^* f = 4\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{i(k-2)}{2\Im m}f\right)$.

Ceci nous invite à considérer l'opérateur δ_k défini sur $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$, où Γ est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, par $\delta_k f = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{k-2}{2i\Im m} f$ pour tout $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$.

De même que pour les propositions des pages 30 et 30, on a :

Propriété : Soit $(k, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
Γ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
On a alors : $\delta_k\left(\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)\right) \subset \widehat{\mathcal{M}}_{k+2}^{\leq s+1}(\Gamma)$.

[11] La démonstration est identique à celle du lemme 1 p 36 de [13].

Démonstration : Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$.

Alors, il existe $f_0, \cdots, f_s$ des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que $\forall z \in \mathcal{H},\ f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$.

Un calcul simple montre que :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ (\delta_k f)(z) = f_0'(z) + \sum_{j=1}^{s} \frac{f_j'(z) + (k-j+1)f_{j-1}(z)}{(z-\overline{z})^j} + \frac{k-s}{(z-\overline{z})^{s+1}} f_s(z).$$

Ceci prouve le premier et le troisième point de la définition 2.

Pour le second point, on a $\dfrac{\partial f}{\partial z}(\gamma.z) = (cz+d)^2 \dfrac{\partial\big((cz+d)^k f(z)\big)}{\partial z}$ et $2i\Im m\ (\gamma.z) = \dfrac{2i\Im m\ z}{|cz+d|^2}$, si $z \in \mathcal{H}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, d'où :

$$\begin{aligned}
(\delta_k f \underset{k+2}{|} \gamma)(z) &= \frac{1}{(cz+d)^{k+2}} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma.z) + \frac{kf(\gamma.z)}{2i\Im m\ (\gamma.z)} \right) \\
&= \frac{1}{(cz+d)^k} \frac{\partial f \circ \gamma}{\partial z}(z) + \frac{k|cz+d|^2}{2i\Im m\ z} \frac{1}{(cz+d)^2} (f \underset{k}{|} \gamma)(z) \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{kc}{cz+d} + \frac{k(c\overline{z}+d)}{2i\Im m\ z(cz+d)} f(z) \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{kf(z)}{2i\Im m\ z} \\
&= (\delta_k f)(z).
\end{aligned}$$

□

3.2.4 Etude des coefficients des formes quasi-modulaires et des formes modulaires presque-holomorphes.

Soit Γ un sous groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Si $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ s'écrit pour tout $z \in \mathcal{H}$ $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$, de la condition de modularité de poids k relativement à Γ, associée à l'unicité du poids et de la profondeur, en remplacant $\overline{z}$ par $z - (z-\overline{z})$ dans l'expression de $\gamma.z - \overline{\gamma.z}$ si $\gamma \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $l \in [\![\, 0\,;\, s \,]\!]$, on obtient alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{s-l} c^j \begin{pmatrix} j+l \\ l \end{pmatrix} \left(f_{j+l} \underset{k-j-2l}{|} \gamma \right) = f_l$.

Ceci permet d'affirmer que $f_l \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-2l}^{\leq s-l}(\Gamma)$.

De même, si $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme quasi-modulaire de poids k et de profondeur inférieure à s, dont la condition de quasi-modularité s'écrit $(f \underset{k}{|} \gamma) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d} \right)^j$, en comparant la condition de quasi-modularité de f appliquée à $\gamma_1\gamma_2$, et celle de $(f\underset{k}{|}\gamma_1)$ appliquée à γ_2, où $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $\gamma_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$, on obtient, puisque les espaces $\widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ sont en somme directe : si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $l \in [\![0\,;\, s]\!]$ et $z \in \mathcal{H}$, alors $f_l(z) = \displaystyle\sum_{j=l}^{s} \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} (-c)^{j-l}(cz+d)^{j+l-k} f_j(\gamma.z)$.

Ceci permet aussi d'affirmer que $f_l \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-2l}^{\leq s-l}(\Gamma)$.

On a donc la propriété suivante :

Propriété : Soit Γ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

1. Soit $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$, de condition de quasi-modularité s'écrivant sous la forme $(f\underset{k}{|}\gamma)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$ pour tout $z \in \mathcal{H}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, avec pour tout $j \in [\![0\,;\, s]\!]$, f_j holomorphe sur $\mathcal{H}$.

   Alors : $\forall j \in [\![0\,;\, s]\!]$, $f_j \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-2j}^{\leq s-j}(\Gamma)$.

2. Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$, définie sur $\mathcal{H}$ par $\forall z \in \mathcal{H}$, $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$, avec pour tout $j \in [\![0\,;\, s]\!]$, f_j holomorphe sur $\mathcal{H}$.

   Alors : $\forall j \in [\![0\,;\, s]\!]$, $f_j \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-2j}^{\leq s-j}(\Gamma)$.

Ceci est le premier résultat où la transcription quasi-modulaire en modulaire presque holomorphe n'est pas exacte.

Démonstration : 1. Soit $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$.

Alors, il existe des fonctions $f_0, \cdots, f_s$ holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que : $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $\forall z \in \mathcal{H}$, $(f\underset{k}{|}\gamma)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$.

• Soit alors $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $\gamma_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$.

Ainsi : $\forall z \in \mathcal{H}$,
$$\begin{aligned} (f\underset{k}{|}\gamma_1\gamma_2)(z) &= \frac{1}{(c_2z+d_2)^k}(f\underset{k}{|}\gamma_1)(\gamma_2.z) \\ &= \frac{1}{(c_2z+d_2)^k} \sum_{j=0}^{s} f_j(\gamma_2.z)\left(\frac{c_1}{c_1\gamma_2.z+d_1}\right)^j. \end{aligned}$$

Notons $\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} * & * \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

De $a_2d_2 - b_2c_2 = 1$, on obtient $d_2\gamma - c_2\delta = c_1$, ce qui implique que :

$$
\begin{aligned}
\frac{c_1}{c_1\gamma_2.z+d_1} &= \frac{c_1(c_2z+d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+d_1d_2)} \\
&= (c_2z+d_2)\frac{d_2\gamma-c_2\delta}{\gamma z+\delta} \\
&= (c_2z+d_2)\left(\frac{(c_2z+d_2)\gamma-c_2(\gamma z+\delta)}{\gamma z+\delta}\right) \\
&= (c_2z+d_2)^2\left(\frac{\gamma}{\gamma z+\delta}-\frac{c_2}{c_2z+d_2}\right).
\end{aligned}
$$

Donc, d'après la formule du binôme de Newton, puis en inversant l'ordre de sommation, on obtient :

$$
\begin{aligned}
(f\underset{k}{|}\gamma_1\gamma_2)(z) &= \sum_{j=0}^{s}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{j-l}\begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} {c_2}^{j-l}(c_2z+d_2)^{l+j-k}f_j(\gamma_2.z)\left(\frac{\gamma}{\gamma z+\delta}\right)^l \\
&= \sum_{l=0}^{s}\sum_{j=l}^{s}(-1)^{j-l}\begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} {c_2}^{j-l}(c_2z+d_2)^{l+j-k}f_j(\gamma_2.z)\left(\frac{\gamma}{\gamma z+\delta}\right)^l
\end{aligned}
$$

Or, la condition de quasi-modularité appliquée à f et $\gamma_1\gamma_2$ donne : $(f\underset{k}{|}\gamma_1\gamma_2)(z) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z)\left(\frac{\gamma}{\gamma z+\delta}\right)^j$ pour tout $z \in \mathcal{H}$.
D'où par unicité du poids et de la profondeur des formes quasi-modulaires, on en déduit que :
$\forall l \in [\![\, 0\,;\, s\,]\!]$, $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $f_l = \sum_{j=0}^{s-l}(-1)^j \begin{pmatrix} j+l \\ l \end{pmatrix} c^j (f_{j+l}\underset{k-2l-j}{|}\gamma)$.

• <u>Montrons alors par récurrence sur $l \in [\![\, 0\,;\, s\,]\!]$ que $f_{s-l} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\leq l}_{k-2s+2l}(\Gamma)$.</u>

♦ L'égalité précédente appliquée à $l = s$ impose : $\forall \gamma \in \Gamma$, $f_s = (f\underset{k-2s}{|}\gamma)$. Ainsi, l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang 0.

♦ Supposons que : $\forall l \in [\![\, 0\,;\, l_0-1\,]\!]$, $f_{s-l} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\leq l}_{k-2s+2l}(\Gamma)$ pour un certain $l_0 \in [\![\, 1\,;\, s\,]\!]$. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe des fonctions $f_{s,0}$, $f_{s-1,0}$, $f_{s-1,1}$, $f_{s-2,0}$, $\cdots$, f_{s-l_0+1,l_0-1} holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $l \in [\![\, 0\,;\, l_0-1\,]\!]$, et $z \in \mathcal{H}$, $\Big(f_{s-l}\underset{k-2s+2l}{|}\gamma\Big)(z) = \sum_{j=0}^{l} f_{s-l,j}(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$.

Or, d'après l'égalité précédente appliqué à $s-l_0$, pour tout $z \in \mathcal{H}$, et $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, on a successivement :

$$
\begin{aligned}
f_{s-l_0}(z) &= \sum_{j=0}^{l_0}(-1)^j\begin{pmatrix} j+s-l_0 \\ s-l_0 \end{pmatrix} c^j\Big(f_{j+s-l_0}\underset{k+2l_0-j-2s}{|}\gamma\Big)(z) \\
&= \sum_{j=1}^{l_0}\left((-1)^j\begin{pmatrix} j+l \\ l \end{pmatrix}\sum_{i=0}^{l_0-j} f_{s+j-l_0,i}(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{i+j}\right) . \\
&\quad +\Big(f_{s-l_0}\underset{k+2l_0-2s}{|}\gamma\Big)(z)
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left(f_{s-l_0}\underset{k+2l_0-2s}{|}\gamma\right)(z) &= \sum_{j=1}^{l_0}\left(\sum_{i=0}^{l_0-j}(-1)^{j+1}\begin{pmatrix} j+l \\ l \end{pmatrix} f_{s+j-l_0,i}\right)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{i+j} \\
&\quad + f_{s-l_0}(z) \\
&= \sum_{j=0}^{l_0-1}\sum_{i=0}^{l_0-j-1}(-1)^j\begin{pmatrix} j+1-l \\ l \end{pmatrix} f_{s+j+1-l_0,i}(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{i+j+1} \\
&\quad + f_{s-l_0}(z) \\
&= \sum_{p=0}^{l_0-1}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\begin{pmatrix} j+1-l \\ l \end{pmatrix} f_{s+j+1-l_0,i}(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{p+1} \\
&\quad + f_{s-l_0}(z).
\end{aligned}$$

Notons : $\begin{cases} g_0 = f_{s-l_0} \\ g_p = \displaystyle\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\begin{pmatrix} j+1+l \\ l \end{pmatrix} f_{s+j+1-l_0,i} \text{ si } p \in [\![\, 1\,;\, l_0 \,]\!] \end{cases}$.

On obtient alors $\left(f_{s-l_0}\underset{k+2l_0-2s}{|}\gamma\right)(z)\displaystyle\sum_{p=0}^{l_0} g_p(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^p$ d'où :

$$f_{s-l_0} \in \widehat{\mathcal{M}}^{\leq l_0}_{k+2l_0-2s}(\Gamma).$$

Ceci prouve l'hérédité de l'hypothèse de récurrence, et donc la première partie de la proposition.

2. Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}^{\leq s}_k(\Gamma)$.

Alors, il existe des fonctions $f_0, \cdots, f_s$ holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que $\forall z \in \mathcal{H},\ f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s}\frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$ et $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,\ (f\underset{k}{|}\gamma) = f$.

- Or, d'après la formule de binôme, et en permutant les deux sommes simples, on a successivement, pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, et tout $z \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\left(f\underset{k}{|}\gamma\right)(z) &= \frac{1}{(cz+d)^k}\sum_{j=0}^{s}\frac{f_j(\gamma.z)}{(\gamma.z-\overline{\gamma.z})^j} \\
&= \frac{1}{(cz+d)^k}\sum_{j=0}^{s}\frac{|cz+d|^{2j}}{(z-\overline{z})^j}f_j(\gamma.z) \\
&= \frac{1}{(cz+d)^k}\sum_{j=0}^{s}\left(\frac{(cz+d)}{(z-\overline{z})^j}-c\right)^j(cz+d)^j f_j(\gamma.z) \\
&= \sum_{j=0}^{s}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} c^{j-i}\left(\frac{(cz+d)}{(z-\overline{z})^j}\right)^i(cz+d)^{j-k}f_j(\gamma.z) \\
&= \sum_{i=0}^{s}\left(\sum_{j=i}^{s}(-1)^{j-i}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} c^{j-i}(cz+d)^{i+j-k}f_j(\gamma.z)\right)\frac{1}{(z-\overline{z})^i}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par unicité du poids et de la profondeur des formes modulaires presque holomorphes, on en déduit que, pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, pour tout $l \in [\![0\,;\, s]\!]$, pour tout $z \in \mathcal{H}$: $f_l(z) = \displaystyle\sum_{j=l}^{s} (-1)^{j-l} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \left(f_j \underset{k-2j}{|} \gamma \right)(z) \left(\frac{c}{cz+d} \right)^{j-l}$.

- <u>Montrons alors par récurrence sur $l \in [\![0\,;\, s]\!]$ que $f_{s-l} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\leq l}_{k-2s+2l}(\Gamma)$.</u>

♦ L'égalité précédente appliquée à $l = s$ impose : $\forall \gamma \in \Gamma$, $f_s = (f \underset{k-2s}{|} \gamma)$. Ainsi, l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang 0.
♦ Supposons que : $\forall l \in [\![0\,;\, l_0 - 1]\!]$, $f_{s-l} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\leq l}_{k-2s+2l}(\Gamma)$ pour un certain $l_0 \in [\![1\,;\, s]\!]$. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe des fonctions $f_{s,0}$, $f_{s-1,0}$, $f_{s-1,1}$, $f_{s-2,0}$, $\cdots$, f_{s-l_0+1,l_0-1} holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $l \in [\![0\,;\, l_0 - 1]\!]$, et $z \in \mathcal{H}$: $\left(f_{s-l} \underset{k-2s+2l}{|} \gamma \right)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{l} f_{s-l,j}(z) \left(\frac{c}{cz+d} \right)^{j}$.

Or, d'après l'égalité précédente appliquée à $s - l_0$, pour tout $z \in \mathcal{H}$, et $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, on a successivement :

$$\begin{aligned}
f_{s-l_0}(z) &= \sum_{j=s-l_0}^{s} (-1)^{j+l_0-s} \begin{pmatrix} j \\ s-l_0 \end{pmatrix} \left(f_j \underset{k-2j}{|} \gamma \right)(z) \left(\frac{c}{cz+d} \right)^{j+l_0-s} \\
&= \sum_{j=0}^{l_0-1} (-1)^{l_0-j} \begin{pmatrix} s-j \\ s-l_0 \end{pmatrix} \left(f_{s-j} \underset{k-2s+2j}{|} \gamma \right)(z) \left(\frac{c}{cz+d} \right)^{l_0-j} \\
&\quad + \left(f_{s-l_0} \underset{k-2s+2l_0}{|} \gamma \right)(z) \\
&= \sum_{j=0}^{l_0-1} \left((-1)^{l_0-j} \begin{pmatrix} s-j \\ s-l_0 \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{j} f_{s-j,i}(z) \left(\frac{c}{cz+d} \right)^{l_0-j+i} \right) \\
&\quad + \left(f_{s-l_0} \underset{k-2s+2l_0}{|} \gamma \right)(z) \\
&= \sum_{i=0}^{l_0} \sum_{j=i}^{l_0} (-1)^{l_0-j} \begin{pmatrix} s-j \\ s-l_0 \end{pmatrix} \left(\frac{c}{cz+d} \right)^{l_0-j+i} f_{s-j,i}(z) \\
&\quad + \left(f_{s-l_0} \underset{k-2s+2l_0}{|} \gamma \right)(z) \\
&= \sum_{i=0}^{l_0} \sum_{j=0}^{l_0-i} (-1)^{i} \begin{pmatrix} s-l_0+j \\ s-l_0 \end{pmatrix} \left(\frac{c}{cz+d} \right)^{s-l_0+i+j} f_{s-l_0+j,i}(z) \\
&\quad + \left(f_{s-l_0} \underset{k-2s+2l_0}{|} \gamma \right)(z) \\
&= \sum_{p=0}^{l_0} \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i} \begin{pmatrix} s-l_0+p-i \\ s-l_0 \end{pmatrix} \left(\frac{c}{cz+d} \right)^{s-l_0+p} f_{s-l_0+p-i,i}(z) \\
&\quad + \left(f_{s-l_0} \underset{k-2s+2l_0}{|} \gamma \right)(z)
\end{aligned}$$

Ainsi, $f_{s-l_0} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\leq l_0}_{k+2l_0-2s}(\Gamma)$.

Ceci prouve l'hérédité de l'hypothèse de récurrence, et donc la fin de la proposition. □

Nous obtenons alors naturellement le corollaire suivant, donnant une majoration simple de la profondeur :

Corollaire : Soit Γ un sous - groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Si $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$, où $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$, alors nécessairement, on a $k \geq 2s$.

Remarquons que si $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ où Γ est un sous - groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, de l'égalité $f_l(z) = \sum_{j=l}^{s}(-1)^{j-l}\begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix}\left(f_j \underset{k-2j}{|} \gamma\right)(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j-l}$, prouvée pour tout $l \in [\![\, 0\,;\, s \,]\!]$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $z \in \mathcal{H}$, il n'est pas difficile de voir que l'on a alors

$$\left(f_l \underset{k-2l}{|} \gamma\right)(z) = \sum_{j=0}^{s-l}\begin{pmatrix} l+j \\ j \end{pmatrix} f_{l+j}(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j}.$$

En effet, pour $l=0$, on a : $f_s = \left(f_s \underset{k-2s}{|} \gamma\right)$, pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Si l'égalité est vérifiée pour tout $l \in [\![\, 0\,;\, l_0 - 1 \,]\!]$, on obtient successivement pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et tout $z \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\left(f_l \underset{k-2l_0}{|} \gamma\right) &= \sum_{j=0}^{s-l_0-1}(-1)^j\begin{pmatrix} j+l_0+1 \\ l_0 \end{pmatrix}\left(f_{j+l_0+1} \underset{k-2j-2l_0-2}{|} \gamma\right)(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j+1} \\
&\quad + f_{l_0}(z) \\
&= f_{l_0}(z) + \sum_{j=0}^{s-l_0-1}\sum_{i=0}^{s-j-l_0-1}\left((-1)^j\begin{pmatrix} j+l_0+1 \\ l_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j+l_0+i+1 \\ i \end{pmatrix}\right) \\
&\qquad \times f_{j+l_0+1+i}(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{i+j+1} \\
&= f_{l_0}(z) + \sum_{p=0}^{s-l_0-1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}\begin{pmatrix} p+l_0+1-i \\ l_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p+l_0+1 \\ i \end{pmatrix} \\
&\qquad f_{p+l_0+1}(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{p+1} \\
&= f_{l_0}(z) + \sum_{p=0}^{s-l_0-1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}\frac{(p+l_0+1)!}{(p+1-i)!l_0!i!}f_{p+l_0+1}(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{p+1} \\
&= f_{l_0}(z) + \sum_{p=0}^{s-l_0-1}\left(\frac{(p+l_0+1)!}{(p+1)!l_0!}f_{p+l_0+1}(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{p+1}\right) \\
&\qquad \left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}\frac{(p+1)!}{(p+1-i)!i!}\right)
\end{aligned}$$

$$= f_{l_0}(z) + \sum_{p=0}^{s-l_0-1} \left(\frac{(p+l_0+1)!}{(p+1)!l_0!} f_{p+l_0+1}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{p+1} \right)$$

$$= f_{l_0}(z) + \sum_{p=1}^{s-l_0} \left(\frac{(p+l_0)!}{p!l_0!} f_{p+l_0}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{p} \right)$$

$$= \sum_{p=0}^{s-l_0} \binom{p+l_0}{p} f_{p+l_0}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{p}.$$

Ceci démontre bien,par récurrence, la formule voulue.

3.3 Isomorphisme entre $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ et $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$.

Jusque là, toutes les propiétés établies sur $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ et $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ sont identiques, ou s'écrivent de manière similaire. Cecla suggère une structure très proche entre ces deux espaces.

Par ailleurs, la condition de modularité des formes modulaires presque holomorphes impose des symètries nombreuses, ce qui laisse penser qu'étant donnée $f_0 : \mathcal{H} \longmapsto \mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathcal{H}$, il y aura peu de formes modulaires presques holomorphes f s'écrivant sous la forme $f(z) = \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$ pour tout $z \in \mathcal{H}$, avec $s \in \mathbb{N}$ et $f_1, \cdots f_s$ d'autres fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$.

Ceci est précisé dans le lemme suivant :

Lemme : Soit $(k,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
Γ un sous - groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Pour tout $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$, notons $f(z) = \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$ pour tout $z \in \mathcal{H}$, son l'expression développée.
Alors, l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma) & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma) \\ f & \longmapsto & f_0 \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
De plus, Φ définit aussi un isomorphisme d'algèbre graduéees filtrées de $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ sur $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$.

Démonstration : • $\Phi : \widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma) \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ est correctement définie, d'après la propriété de la page 36.

• Φ est bien un morphisme d'algèbre, par linéarité des sommes finies, et puisque le terme constant d'un produit de deux polynômes est le produit de leurs termes constants.

• <u>Φ est injective :</u>

Si $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq q}(\Gamma)$ est telle que $f_0 \equiv 0$, alors, d'après l'égalité établie juste après la démonstration de la propriété de la page 36, appliquée à $l = 0$, on a :
$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $\forall z \in \mathcal{H}$, $0 = f_0(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \left(f_j \underset{k-2j}{|} \gamma\right)(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$.

Or, de même que dans les propriétés démontrées ci dessus, on en déduit que : $\forall j \in [\![0\,;s]\!]$, $f_j \equiv 0$, car il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\begin{pmatrix} 1+p\mathrm{N} & -p^2\mathrm{N} \\ \mathrm{N} & 1-p\mathrm{N} \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathrm{N}) \subset \Gamma$. D'où pour tout $p \in \mathbb{Z}$, et $z \in \mathcal{H}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{s} f_j(z)\mathrm{N}^j(\mathrm{N}z+1-p\mathrm{N})^{s-j} = 0$, ie le polynôme $\displaystyle\sum_{j=0}^{s} f_j(z)\mathrm{N}^j\mathrm{X}^j$ est nul.

Dons Φ est injective.

• <u>Φ est surjective :</u>

Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$, dont la condition de quasi-modularité s'écrit $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $\forall z \in \mathcal{H}$, $\left(f \underset{k}{|} \gamma\right) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$.

Considérons alors $\mathrm{F} : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j} \end{array}$.

<u>Montrons que $\mathrm{F} \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$, avec $\Phi(\mathrm{F}) = f$.</u>

Les premier et troisième points de la définition d'une forme modulaire presque holomorphe sont clairs. Puisque, si $\mathrm{F} \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$, on a $\Phi(\mathrm{F}) = f_0$, et puisque $f_0 = f$, il suffit de vérifier que $\forall \gamma \in \Gamma$, $\left(\mathrm{F} \underset{k}{|} \gamma\right) = \mathrm{F}$.

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

On a successivement pour tout $z \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{F} \underset{k}{|} \gamma\right)(z) &= \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(\gamma.z)}{(cz+d)^k} \frac{|cz+d|^{2j}}{(z-\overline{z})^j} \\
&= \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(\gamma.z)}{(cz+d)^k} \left(\frac{(cz+d)^2}{z-\overline{z}} - c(cz+d)\right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{s}\sum_{i=0}^{j} \frac{f_j(\gamma.z)}{(cz+d)^k} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} (-1)^{j-i}c^{j-i}(cz+d)^{j-i} \frac{(cz+d)^{2i}}{(z-\overline{z})^i} \\
&= \sum_{i=0}^{s} \left(\sum_{j=i}^{s} (-1)^{j-i} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \frac{f_j(\gamma.z)}{(cz+d)^{k-2j}} \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j-i}\right) \frac{1}{(z-\overline{z})^i} \\
&= \sum_{i=0}^{s} \left(\sum_{j=0}^{s-i} (-1)^{j} \begin{pmatrix} j+i \\ i \end{pmatrix} \left(f_{i+j} \underset{k-2j-2i}{|} \gamma\right)(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^{j}\right) \frac{1}{(z-\overline{z})^i} \\
&= \sum_{i=0}^{s} \left(\sum_{j=0}^{s-i} (-c)^{j} \begin{pmatrix} j+i \\ i \end{pmatrix} \left(f_{i+j} \underset{k-2i-j}{|} \gamma\right)(z)\right) \frac{1}{(z-\overline{z})^i}.
\end{aligned}$$

Or, toujours d'après la démonstration de la propriété de la page 36, on a : $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $\forall l \in [\![0\,;\, s]\!]$, $f_l = \sum_{j=0}^{s-l} (-1)^j c^j \begin{pmatrix} j+l \\ l \end{pmatrix} \Big(f_{j+l} \underset{k-2l-j}{|} \gamma \Big)$. D'où $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall z \in \mathcal{H}$, $(\mathrm{F} \underset{k}{|} \gamma)(z) = \sum_{i=0}^{s} \frac{f_i(z)}{(z-\overline{z})^i} = \mathrm{F}(z)$, ce qui démontre que $\mathrm{F} \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$, d'où la surjectivité de Φ.

□

Ainsi, on a donc les application suivantes, où $k \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ et Γ est un sous - groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$
\begin{array}{rccc}
\varepsilon : & \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma) & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{M}}_{k-2}^{\leq s-1}(\Gamma) \\[2ex]
\delta_k : & \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma) & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{M}}_{k+2}^{\leq s+1}(\Gamma) \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial z} : & \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}}_{k+2}^{\leq s+1}(\Gamma) \\[2ex]
\Phi : & \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)
\end{array}
$$

Ceci pose la question de savoir si le diagramme suivant est commutatif[12]:

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\delta_k"'] & \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma) \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial z}"] \\
\widehat{\mathcal{M}}_{k+2}^{\leq s+1}(\Gamma) \arrow[r, "\Phi"] & \widetilde{\mathcal{M}}_{k+2}^{\leq s+1}(\Gamma)
\end{tikzcd}
$$

Propriété : Le diagramme ci dessus est commutatif, c'est à dire que $\frac{\partial}{\partial z} \circ \Phi = \Phi \circ \delta_k$.

Démonstration : Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ définie par : $\forall z \in \mathcal{H}$, $f(z) = \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$, où $f_0, \cdots, f_s$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$.

Alors,
- ♦ $\left(\frac{\partial}{\partial z} \circ \Phi \right)(f) = \frac{\partial}{\partial z}(f_0) = {f_0}'$.
- ♦ $\forall z \in \mathcal{H}$, $(\delta_k\ f)(z) = {f_0}'(z) + \sum_{j=1}^{s} \frac{{f_j}'(z) + (k-j+1) f_{j-1}(z)}{(z-\overline{z})^j} + \frac{k-s}{(z-\overline{z})^{s+1}} f_s(z)$.

 d'où $(\Phi \circ \delta_k)(f) = \Phi(\delta_k\ f) = {f_0}'$.

Ainsi, $\frac{\partial}{\partial z} \circ \Phi = \Phi \circ \delta_k$.

□

[12]Voir [15], chap. 17, propriété 132 p 76.

3.4 Structure de $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ où Γ est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

La propriété de la page 36 affirme que si $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ s'écrit sous la forme $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$ pour tout $z \in \mathcal{H}$, alors $f_j \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-2j}^{\leq s-j}(\Gamma)$. Son corollaire affirme que nécessairement $k \geq 2s$. Ceci va permettre de donner une description précise de $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ à l'aide de l'opérateur δ_r.

3.4.1 Structure de $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$.

Nous noterons D_k^p l'opérateur défini par $\mathrm{D}_k^p = \delta_{k+2p-2} \circ \cdots \circ \delta_k$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, avec $\mathrm{D}_k^0 = id$, et nous allons démontrer la propriété suivante, version affaiblie d'une propriété démontrée par G. Shimura[13].

Propriété : Soit $(k,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et Γ un sous - groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Alors $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ s'écrit, pour tout $z \in \mathcal{H}$ sous la forme :

$$f(z) = \sum_{0 \leq p \leq \frac{k}{2}} \mathrm{D}_{k-2p}^p\ g_p + \begin{cases} c\mathrm{D}_2^{\frac{k}{2}-1}\ \mathrm{E}_2{}^* & \text{si } k \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } k \notin 2\mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{avec } g_p \in \mathcal{M}_{k-2p}(\Gamma)$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq p \leq \dfrac{k}{2}$ et $c \in \mathbb{C}$.

Démonstration : Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ s'écrivant pour tout $z \in \mathcal{H}$ sous la forme $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$.

- La propriété de la page 36 et son corollaire imposent que $f_s \in \widehat{\mathcal{M}}_{k-2s}(\Gamma)$ et $k \geq 2s$.

- Si $k = 0$, alors nécéssairement $s = 0$, et $f = f_0 \in \mathcal{M}_0(\Gamma)$ est constante, d'où l'écriture voulue.

- Supposons désormais que $k \geq 1$.

Premier cas : $k > 2s$.

Commençons par vérifier le lemme suivant, par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$:

Lemme : Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ s'écrivant pour tout $z \in \mathcal{H}$ sous la forme $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$.
Alors, $\exists \lambda \in \mathbb{N}^*$, $f - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{D}_{k-2s}^s\ f_s \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s-1}(\Gamma)$.

[13]Voir [30], théorème 5.2 p 24 - 25.

Démonstration : • Démontrons, par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$, que si $g \in \mathcal{M}_{k-2r}(\Gamma)$, vérifiant nécessairement $\mathrm{D}_{k-2s}^{r}\ g \in \widehat{\mathcal{M}}_{k}^{\leq r}(\Gamma)$ s'écrivant, pour tout $z \in \mathcal{H}$, $\left(\mathrm{D}_{k-2s}^{r}\ g\right)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{r} \frac{g_j^{(r)}(z)}{(z-\overline{z})^j}$, alors $\exists \lambda_r \in \mathbb{N}^*$, $g_r^{(r)} = \lambda_r g$.

♦ Pour $r = 0$, on a $\mathrm{D}_{k-2s}^{r}\ g = \mathrm{D}_{k-2s}^{0}\ g = g$, d'où le résultat.

♦ Supposons le résultat établi au rang r.

Alors, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{D}_{k-2s}^{r+1}\ g\right)(z) &= \delta_{k-2s+2r} \circ \mathrm{D}_{k-2s}^{r}(g)(z) \\ &= \left(\delta_{k-2s+2r}\left(\textstyle\sum_{j=0}^{r} \frac{g_j^{(r)}}{(2i\Im m\ )^j}\right)\right)(z) \\ &= {g_0^{(r)}}' + \sum_{j=0}^{r} \frac{(k-2s+2r-j+1)g_{j-1}^{(r)}(z)}{(z-\overline{z})^j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{r} \frac{{g_j^{(r)}}'(z)}{(z-\overline{z})^j} + \frac{k-2s+r}{(z-\overline{z})^{r+1}} g_r^{(r)}(z).\end{aligned},$$

d'où, avec les notation introduites : $g_{r+1}^{(r+1)} = (k-2s+r)g_r^{(r)}$. Ce qui donne, d'après l'hypothèse de récurrence : $g_{r+1}^{(r+1)} = \lambda_r(k-2s+r)g$.

Or, $k > 2s$ impose que $k-2s+r \neq 0$. Donc en posant $\lambda_{r+1} = \lambda_r(k-2s+r)$, on démontre l'hérédité de l'hypothèse de récurrence.

• Pour $r = s$, on obtient, en particulier,que si $f_s \in \mathcal{M}_{k-2s}(\Gamma)$, alors en écrivant $\left(\mathrm{D}_{k-2s}^{s}\ f_s\right)(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{(z-\overline{z})^j}{g_j(z)}$ on a : $g_s = \lambda f_s$ pour $\lambda \in \mathbb{N}^*$.*

Ainsi, si $f \in \widehat{\mathcal{M}}_{k}^{\leq s}(\Gamma)$ s'écrit : $\forall z \in \mathcal{H}$, $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{N}^*$, $f - \frac{1}{\lambda}\mathrm{D}_{k-2s}^{s}\ f_s \in \widehat{\mathcal{M}}_{k}^{\leq s-1}(\Gamma)$.

□

Montrons que $\forall i \in [\![\, 0\,;\, s-1 \,]\!]$, $\exists\left(\lambda_1^{(i)}, \cdots, \lambda_{i+1}^{(i)}\right) \in (\mathbb{N}^*)^{i+1}$, $\exists f_1^{(i)} \in \mathcal{M}_{k-2s}(\Gamma), \cdots$, $\exists f_{s-i}(i) \in \mathcal{M}_{k-2s+2i}(\Gamma)$ tels que $f - \displaystyle\sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{\lambda_j^{(i)}} \mathrm{D}_{k-2s+2j-2}^{s+1-j}\ f_{s-j+1}^{(i)} \in \widehat{\mathcal{M}}_{k}^{\leq s-i-1}(\Gamma)$.

Essentiellement, tout à été effectué dans le lemme précédent.

♦ Pour $i = 0$, le lemme initialise la récurrence sur i :
$\exists \lambda \in \mathbb{N}^*$, $f - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{D}_{k-2s}^{s}\ f_s \in \widehat{\mathcal{M}}_{k}^{\leq s-1}(\Gamma)$.

On pose donc $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda. \\ f_s^{(0)} = f_s. \end{cases}$

♦ Supposons que le résultat ait été établi au rang i, et posons alors $\left\{\begin{array}{lcl}\lambda_1^{(i+1)} & = & \lambda_1^{(i)}\\ \vdots & & \\ \lambda_{i+1}^{(i+1)} & = & \lambda_{i+1}^{(i)}\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcl} f_s^{(i+1)} & = & f_s^{(i)}.\\ \cdots & & \\ f_{s-i}^{(i+1)} & = & f_{s-i}^{(i)}.\end{array}\right.$

D'après le lemme, il existe $\lambda \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathcal{M}_{k-2s+2i-2}(\Gamma)$, tels que $f - \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{\lambda_j^{(i+1)}} \mathrm{D}_{k-2s+2j-2}^{s+1-j}\ f_{s-j+1}^{(i+1)} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{D}_{k-2s+2i-2}^{s-i}\ g \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s-i-2}(\Gamma)$, d'où l'hérédité en posant $\left\{\begin{array}{l}\lambda_{i+2}^{(i+1)} = \lambda.\\ f_{s-i-1}^{(i+1)} = g \in \mathcal{M}_{k-2s+2i-2}(\Gamma).\end{array}\right.$

Ainsi, pour $i = s-1$, on obtient : $\exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_s) \in \mathbb{N}^{*s}$, $\exists f_s^{(1)} \in \mathcal{M}_{k-2s}(\Gamma), \cdots,$ $\exists f_1^{(s)} \in \mathcal{M}_{k-2}(\Gamma)$ tels que $f - \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{\lambda_j}\mathrm{D}_{k-2s+2j-2}^{s+1-j}\ f_{s-j+1}^{(j)} \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$.

Notons alors $f_0 = f - \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{\lambda_j}\mathrm{D}_{k-2s+2j-2}^{s+1-j}\ f_{s-j+1}^{(j)} \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$, ce qui prouve donc que

$$\begin{aligned} f &= {f_0}^{(s+1)} + \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{\lambda_j}\mathrm{D}_{k-2s+2j-2}^{s+1-j}\ f_{s-j+1}^{(j)} \\ &= {f_0}^{(s+1)} + \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{\lambda_{s-j+1}}\mathrm{D}_{k-2j}^{j}\ f_j^{(s-j+1)}. \end{aligned}$$

En posant, pour tout $j \in [\![0\,;\, s]\!]$, $g_j = \frac{1}{\lambda_{s-j+1}} f_j^{(s-j+1)} \in \mathcal{M}_{k-2j}(\Gamma)$, où $\lambda_{s+1} = 1$, on obtient la propriété.

<u>Second cas :</u> $k = 2s$.

Dans le cas où $k = 2s$, le raisonnement précédent ne s'applique plus, puisque le lemme devient faux : f_s est alors une constante, d'où $\mathrm{D}_{k-2s}^s\ f_s = 0$, ce qui empêche de diminuer d'une unité la profondeur.

Néanmoins, on sait que ${\mathrm{E}_2}^* \in \widehat{\mathcal{M}}_2^{\leq 1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, d'où en particulier ${\mathrm{E}_2}^* \in \widehat{\mathcal{M}}_2^{\leq 1}(\Gamma)$, et $\mathrm{D}_2^{s-1}\ {\mathrm{E}_2}^* \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$.

En écrivant $\mathrm{D}_2^{s-1}\ {\mathrm{E}_2}^*(z) = \sum_{j=0}^{s} \frac{e_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$ pour tout $z \in \mathcal{H}$, où e_s est une constante, on obtient alors que $g = f - \frac{f_s}{e_s}\mathrm{D}_2^{s-1}\ {\mathrm{E}_2}^* \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s-1}(\Gamma)$. On peut alors appliquer le premier cas à g, car alors $k = 2s > 2(s-1)$, ce qui termine la démonstration.

□

Par l'utilisation de l'isomorphisme Φ entre $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$, on en déduit immédiatement la propriété suivante :

<u>**Propriété :**</u> Soit $(k,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et Γ un sous - groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Alors $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ s'écrit, pour tout $z \in \mathcal{H}$ sous la forme : $f(z) = \sum_{0 \leq p \leq \frac{k}{2}} \frac{\partial^p\ g_p}{\partial z^p} + \left\{\begin{array}{ll} c\frac{\partial^{\frac{k}{2}-1}\ {\mathrm{E}_2}^*}{\partial z^p} & \text{, si } k \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{, si } k \notin 2\mathbb{Z}\end{array}\right.$ avec $g_p \in \mathcal{M}_{k-2p}(\Gamma)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq p \leq \frac{k}{2}$ et $c \in \mathbb{C}$.

Démonstration : Soit $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$.

Φ étant un isomorphisme, $\exists \mathrm{F} \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)$ telle que $\Phi(\mathrm{F}) = f$, et d'après la propriété précédente, on peut écrire F, pour tout $z \in \mathcal{H}$ sous la forme $\mathrm{F}(z) = \sum_{0 \leq p \leq \frac{k}{2}} \mathrm{D}_{k-2p}^p \, \mathrm{G}_p + \begin{cases} c\mathrm{D}_2^{\frac{k}{2}-1} \, \mathrm{E}_2{}^* & \text{, si } k \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{, si } k \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$ avec $\mathrm{G}_p \in \mathcal{M}_{k-2p}(\Gamma)$ pour $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq p \leq \dfrac{k}{2}$ et $c \in \mathbb{C}$.

Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{\partial}{\partial z} \circ \Phi = \Phi \circ \delta_k$.

D'où $\dfrac{\partial^p}{\partial z^p} \circ \Phi = \Phi \circ \mathrm{D}_{k-2p}^p$. Ainsi, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{0 \leq p \leq \frac{k}{2}} \left(\Phi \circ \mathrm{D}_{k-2p}^p\right)(\mathrm{G}_p) + \begin{cases} c\left(\Phi \circ \mathrm{D}_2^{\frac{k}{2}-1}\right)(\,\mathrm{E}_2{}^*) & \text{, si } k \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{, si } k \notin 2\mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \sum_{0 \leq p \leq \frac{k}{2}} \left(\frac{\partial^p \ (\Phi(\mathrm{G}_p))}{\partial z^p}\right) + \begin{cases} c\left(\dfrac{\partial^{\frac{k}{2}-1}\ \Phi\left(\mathrm{E}_2{}^*\right)}{\partial z^{\frac{k}{2}-1}}\right) & \text{, si } k \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{, si } k \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu en posant pour tout $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq p \leq \dfrac{k}{2}$, $g_p = \Phi(\mathrm{G}_p) \in \mathcal{M}_{k-2p}(\Gamma)$.

□

3.4.2 Cas particulier de $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ et $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

La dernière propriété pourait nous permettre de décrire la structure des deux algèbres $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ et $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, en utilisant l'isomorphisme Φ, sous forme de somme de puissances des fonctions E_2 et $\mathrm{E}_2{}^*$ respectivement. Pour cela, nous utiliserons plus simplement la propriété de la page 36, et nous suivrons les pas de Royer[14].

Ceci nous permettra de décrire $\widehat{\mathcal{M}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ et $\widehat{\mathcal{M}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ comme espaces de polynômes, tout comme l'on sait[15]que $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[\mathrm{E}_4; \mathrm{E}_6]$.

On sait[16] que $\mathrm{E}_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_2^{\leq 1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ et $\mathrm{E}_2{}^* \in \widehat{\mathcal{M}}_2^{\leq 1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, d'où si $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, de condition de modularité s'écrivant $\left(f \underset{k}{|} \gamma\right)(z) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z) \left(\dfrac{c}{cz+d}\right)^j$ pour tout $z \in \mathcal{H}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors : $f - \left(\dfrac{6}{i\pi}\right)^s f_s \mathrm{E}_2{}^s \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s-1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

On en déduit alors, par récurrence sur l, la propriété suivante :

Propriété : Soit $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ (resp. $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$) .
Alors, $\exists g_0 \in \mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $\cdots$, $\exists g_s \in \mathcal{M}_{k-2s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ telles que :
$f = \sum_{j=0}^{s} g_j \mathrm{E}_2{}^j$ (resp. $f = \sum_{j=0}^{s} g_j \mathrm{E}_2{}^{*j}$)

[14]Voir [15], chap. 17, corollaire 121 p 73.
[15]Voir [26], chap. 7, §3.2, p 144.
[16]Voir la propriété en bas de la page 26.

Démonstration : • Soit $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

Alors, il existe des fonctions $f_0, \cdots, f_s$ holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \forall z \in \mathcal{H}, (f \underset{k}{|} \gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j$.

Pour $s = 0$, le résultat est clair : on choisit $g_0 = f_0$.

Supposons le résultat établi à l'ordre $s-1$.
Alors, d'après la proposition de la page 36, on a $f_s \in \mathcal{M}_{k-2s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

Or : ${\mathrm{E}_2}^s \in \widetilde{\mathcal{M}}_{2s}^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, avec pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et tout $z \in \mathcal{H}$,

$$\left({\mathrm{E}_2}^s \underset{2s}{|} \gamma\right) = \left(\frac{1}{(cz+d)^2 \mathrm{E}_2(\gamma.z)}\right)^s = \left(\mathrm{E}_2(z) + \frac{6}{i\pi}\frac{c}{cz+d}\right)^s$$

$$= \mathrm{E}_2(z)^s + \cdots + \left(\frac{6}{i\pi}\right)^s \left(\frac{c}{cz+d}\right)^s.$$

Ainsi, $f - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s {\mathrm{E}_2}^s \in \widetilde{\mathcal{M}}_k^{\leq s-1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, car pour tout $z \in \mathcal{H}$ et tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a :

$$\left(f - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s {\mathrm{E}_2}^s \underset{k}{|} \gamma\right)(z) = \sum_{j=0}^{s-1} \left(f_j(z) - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s(z) \begin{pmatrix} s \\ j \end{pmatrix} \mathrm{E}_2(z)^{s-j} \left(\frac{6}{i\pi}\right)\right) \times \left(\frac{c}{cz+d}\right).$$

On déduit alors de l'hypothèse de récurrence que : $\exists g_0 \in \mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), \cdots, \exists g_s \in \mathcal{M}_{k-2s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ telles que $f - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s {\mathrm{E}_2}^s = \sum_{j=0}^{s-1} g_j {\mathrm{E}_2}^j$.

D'où : $f = \sum_{j=0}^{s} g_j {\mathrm{E}_2}^j$ avec $g_s = \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s \in \mathcal{M}_{k-2s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, ce qui démontre la propriété par récurrence sur s.

• Le cas de $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ peut alors s'en déduire par l'isomorphisme Φ, ou bien de manière similaire en considérant cette fois, si $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ s'écrit pour tout $z \in \mathcal{H}$ $f(z) = \sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$, $f - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s \left({\mathrm{E}_2}^*\right)^s \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s-1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

□

On sait que les fonction E_4 et E_6 sont algébriquement indépendantes, et que $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[\mathrm{E}_4; \mathrm{E}_6]$. Si les fonctions E_2, E_4 et E_6 d'une part, et ${\mathrm{E}_2}^*$, E_4 et E_6 d'autre part, sont algébriquement indépendantes, alors un corollaire immédiat de la propriété précédente est : $\begin{cases} \widetilde{\mathcal{M}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6]. \\ \widehat{\mathcal{M}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[{\mathrm{E}_2}^*, \mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6]. \end{cases}$

Le fait que les espaces vectoriels $\left(\widetilde{\mathcal{M}}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))\right)_{k \in \mathbb{N}}$ et $\left(\widehat{\mathcal{M}}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))\right)_{k \in \mathbb{N}}$ soient en somme directe va nous permettre de montrer que E_2, E_4 et E_6 d'une part, et ${\mathrm{E}_2}^*$, E_4 et E_6 d'autre part, sont algébriquement indépendantes.

Lemme : 1. Les fonctions E_2, E_4 et E_6 sont algébriquement indépendantes.
2. Les fonctions ${\mathrm{E}_2}^*$, E_4 et E_6 sont algébriquement indépendantes.

Démonstration : 1. Supposons qu'il existe $\mathrm{P}(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = \sum_{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3} p_{i,j,k}\mathrm{X}^i\mathrm{Y}^j\mathrm{Z}^k \in \mathbb{C}[\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_4,\mathrm{E}_6)$ soit identiquement nulle.

Alors, on peut écrire, par regroupement de termes, que $0 = \sum_{s\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3 \\ 2i+4j+6k=s}} p_{i,j,k}{\mathrm{E}_2}^i{\mathrm{E}_4}^j{\mathrm{E}_6}^k$.

D'où, puisque les espaces vectoriels $\left(\widetilde{\mathcal{M}}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont en sommes directes : $\sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3 \\ 2i+4j+6k=s}} p_{i,j,k}{\mathrm{E}_2}^i{\mathrm{E}_4}^j{\mathrm{E}_6}^k = 0$ pour tout $s\in\mathbb{N}$.

Pour $s_0\in\mathbb{N}$ fixé, s'il existe $(i_0,j_0,k_0)\in\mathbb{N}^3$ tel que $\begin{cases} 2i_0+4j_0+6k_0 = s_0 \\ p_{i_0,j_0,k_0} \neq 0 \end{cases}$, alors $\sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3 \\ 2i+4j+6k=s_0}} p_{i,j,k}{\mathrm{E}_2}^i{\mathrm{E}_4}^j{\mathrm{E}_6}^k$ serait une forme quasi - modulaire de poids s_0 de profondeur inférieure à i_0, mais serait aussi nulle, d'où par unicité de la profondeur, on aurait $i_0 = 0$, ce qui imposerait que $p_{i,j,k} = 0$ si $i\neq 0$, d'où $\mathrm{Q}(\mathrm{E}_4,\mathrm{E}_6) = 0$ avec $\mathrm{Q}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum_{\substack{(j,k)\in\mathbb{N}^2 \\ 4j+6k=s_0}} p_{0,j,k}{\mathrm{E}_4}^j{\mathrm{E}_6}^k \neq 0$, ce qui contredirait l'indépendance algébrique de E_4 et E_6.

On en déduit donc que : $\forall(i,j,k)\in\mathbb{N}^*$, $p_{i,j,k}=0$, ie $\mathrm{P}=0$.
Ceci montre donc l'indépendance algébrique de E_2, E_4 et E_6 sur $\mathbb{C}$.

• Le même raisonnement addapté au monde étoilé prouve que ${\mathrm{E}_2}^*$, E_4 et E_6 sont aussi algébriquement indépendantes.

$\square$

On a alors, comme annoncé, le corollaire suivant :

Corollaire : On a : $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_4,\mathrm{E}_6]$.
$\widehat{\mathcal{M}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[{\mathrm{E}_2}^*,\mathrm{E}_4,\mathrm{E}_6]$.

Valeurs spéciales de formes modulaires presque holomorphes : théorème de Shimura.

Commencons par rappeler que l'on appelle valeur spéciale d'une forme modulaire f presques holomorphes, la valeur $f(\omega)$ où ω est un point de multiplication complexe. Un point $\omega \in \mathcal{H}$, de multiplication complexe, désormais appelé CM, est un point ayant un stabilisateur, sous l'action du groupe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ des matrices de dimension 2×2 à coefficients rationnels de déterminants strictement positif, sur l'ensemble $\mathcal{H}$, non trivial :

Définition : Un point $\omega \in \mathcal{H}$ est dit **CM** , ou de **multiplication complexe** s'il existe une matrice $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ non scalaire telle que $\alpha.\omega = \omega$.

4.1 Quelques notations et rappels de propriétés.

4.1.1 Rappels de notations autour des formes modulaires.

Rappelons que l'on note $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$ si f est une forme modulaire de poids $k \in \mathbb{Z}$ relativement au sous-groupe de congruence Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Comme il peut être pratique de ne pas mentionner le sous-groupe de congruence, nous noterons plus simplement $\mathcal{M}_k = \bigcup\limits_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_k(\Gamma(\mathrm{N}))$, où $\Gamma(\mathrm{N})$ est le sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ défini par $\Gamma(\mathrm{N}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}); \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; mod \; \mathrm{N} \right\}$, la congruence étant définie coefficients par coefficients.

De manière similaire, notons aussi, pour $\mathbb{K}$ un sous - corps de $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ l'ensemble des formes modulaires $f \in \mathcal{M}_k$ de poids $k \in \mathbb{Z}$ tel que si le développement de Fourier aux pointes de f s'écrit pour tout $z \in \mathcal{H}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2in\pi z}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{K}$.

Enfin, puisque nous voulons considérer des quotients de formes modulaires, c'est à dire des fonctions méromorphes, notons, pour tout sous-groupe de congruence Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et tout sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}_r(\Gamma) = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{f}{g}; (f,g) \in \mathcal{M}_{l+r}(\Gamma) \times \mathcal{M}_l(\Gamma) \right\}$ et $\mathcal{A}_r(\mathbb{K}) = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{f}{g}; (f,g) \in \mathcal{M}_{l+r}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_l(\mathbb{K}) \right\}$.

4.1.2 Notations autour des formes modulaires presques holomorphes arithmétiques.

L'application de $\dfrac{\partial}{\partial z}$ à $e^{2in\pi z}$ fait apparaitre un coefficient $2in\pi$ en facteurs.

Pour des raisons calculatoires et arithmétiques, nous allons modifier légèrement l'expression développée d'une forme modulaire presque holomorphe, et ajouter une contrainte à sa définition :

Définition : Soit $(k, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
Γ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
$\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$;
Une fonction $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée une **forme modulaire presque holomorphe, définie sur $\mathbb{K}$, de poids k, relativement à Γ** s'il existe des fonctions $f_0, \cdots, f_s$ holomorphes sur $\mathcal{H}$ telles que :

1. $\forall z \in \mathcal{H},\ f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{\pi^j (z - \overline{z})^j}$.
2. $\forall \gamma \in \Gamma,\ (f \underset{k}{|} \gamma) = f$.
3. $\exists p \in \mathbb{N}, \exists c > 0, \forall i \in [\![0 ; s]\!], \forall z \in \mathcal{H}, |f_i(z)| \leq c \left(\dfrac{1 + |z|^2}{\Im m\ z} \right)^p$.
4. pour tout $j \in [\![0 ; s]\!]$, le développement de f_j à l'infini est de la forme : $\forall z \in \mathcal{H},\ f_j(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{\frac{2in\pi z}{h}}$, où $h \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{K}$.

Si $f_s \neq 0$, on dit que f est une forme modulaire presque holomorphe, définie sur $\mathbb{K}$, de poids k et de profondeur l relativement à Γ.

On note $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq l}(\Gamma, \mathbb{K})$, l'ensemble des formes modulaires presque holomorphe définies sur $\mathbb{K}$ de poids k et de profondeur l, relativement au sous groupe de congruence Γ. On note aussi $\widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma, \mathbb{K}) = \displaystyle\bigcup_{s \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma, \mathbb{K})$.

De même que pour les formes modulaires, notons $\widehat{\mathcal{M}}_k(\mathbb{K}) = \displaystyle\bigcup_{\mathrm{N} \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{M}}_k(\Gamma(\mathrm{N}), \mathbb{K})$ et $\widehat{\mathcal{A}}_r(\mathbb{K}) = \displaystyle\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{f}{g} ; (f, g) \in \widehat{\mathcal{M}}_{r+l}(\mathbb{K}) \times \widehat{\mathcal{M}}_r(\mathbb{K}) \right\}$.

Lorque $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{Q}}$, nous parlerons plus simplement de **formes modulaires presque holomorphes arithmétiques** .

4.1.3 Notation autour des opérateurs différentiels introduit par Shimura, et propriétés élémentaires.

Modifions légèrement la définition donné précédement de l'opérateur δ_r, introduit par Shimura[1], agissant sur les fonctions de classe C^∞ sur $\mathcal{H}$: pour $r \in \mathbb{C}$, $\delta_r = \dfrac{1}{i\pi}\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{ir}{2\Im m}\right)$, le coefficient $\dfrac{1}{i\pi}$ étant introduit pour des raisons arithmétiques.

Pour $(k,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$, notons aussi $\mathrm{D}_r^k = \delta_{r+2k-2} \circ \cdots \circ \delta_r$, et pour $r \in \mathbb{C}$, $\mathrm{D}_r^0 = id$.

Enonçons quelques règles élémentaires concernant cet opérateur :

Régle 1 : Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathcal{H}$.
$(k,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$.
$\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$.
Alors, $\mathrm{D}_r^k\left(f \underset{r}{|} \alpha\right) = (\det\ \alpha)^k \left((\mathrm{D}_r^k f) \underset{r+2k}{|} \alpha\right)$.

Démonstration : Soit $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ et $z \in \mathcal{H}$.

On sait que : $\alpha.z - \overline{\alpha.z} = \dfrac{\det\ \alpha}{|cz+d|^2} \times (z - \overline{z})$.

$\dfrac{d(f\circ\alpha)}{dz}(z) = \dfrac{\det\ \alpha}{(cz+d)^2}\dfrac{df}{dz}(\alpha.z)$.

Alors, on a successivement :

$$\begin{aligned}
i\pi(\det\ \alpha)\left((\delta_r\ f) \underset{r+2}{|} \alpha\right)(z) &= \frac{\det\ \alpha}{(cz+d)^{r+2}}\left(\frac{df}{dz}(\alpha.z) + \frac{r}{\alpha.z - \overline{\alpha.z}} f(\alpha.z)\right) \\
&= \frac{1}{(cz+d)^r}\frac{d(f\circ\alpha)}{dz}(z) + \frac{r(c\overline{z}+d)}{(cz+d)^{r+1}}\frac{f(\alpha.z)}{z-\overline{z}} \\
&= \frac{d\left(f \underset{r}{|} \alpha\right)}{dz}(z) + \frac{rc(z-\overline{z}) + r(c\overline{z}+d)}{(cz+d)^{r+1}(z-\overline{z})} f(\alpha.z) \\
&= \frac{d\left(f \underset{r}{|} \alpha\right)}{dz}(z) + \frac{r}{z-\overline{z}}(f \underset{r}{|} \alpha) \\
&= i\pi\left(\delta_r(f \underset{r}{|} \alpha)\right)(z).
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à itérer le résultat.

□

Voici une règle de type formule de Leibniz pour l'opérateur δ_r :

Règle 2 : Soit f et g deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathcal{H}$.
$(r,s) \in \mathbb{C}^2$ et $k \in \mathbb{N}$.
Alors, $\mathrm{D}_{r+s}^k(fg) = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} (\mathrm{D}_r^p\ f)\left(\mathrm{D}_s^{k-p}\ g\right)$.

[1] Voir [31], §7, p 32.

Démonstration : Un calcul immédiat montre que si f et g sont deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathcal{H}$, et si $(r,s,k) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{N}$, alors $\delta_{r+s}(fg) = (\delta_r\ f)\,g + f\,(\delta_s\ g)$.

Un raisonnement identique à la démonstration de la formule de Leibniz classique permet de conclure.

□

On a vu ci dessus que $\delta_r\left(\widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma)\right) \subset \widehat{\mathcal{M}}_{k+2}^{\leq s+1}(\Gamma)$ pour tout sous - groupe de congruence Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $(k,s)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$.

Ceci se généralise de la manière suivante, avec respect de propriétés arithmétiques :

Règle 3 : Soient $(r,k)\in\mathbb{C}\times\mathbb{N}$, et Γ un sous - groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Alors, $\mathrm{D}_r^k\left(\widehat{\mathcal{A}}_r(\Gamma)\right) \subset \widehat{\mathcal{A}}_{r+2k}(\Gamma)$.

Démonstration : Par itération, il suffit de montrer que, pour $r\in\mathbb{Z}$, $\delta_r\left(\widehat{\mathcal{A}}_r(\Gamma)\right)\subset\widehat{\mathcal{A}}_{r+2}(\Gamma)$.

<u>Sachant que $\delta_r\left(\widehat{\mathcal{M}}_r(\Gamma)\right)\subset\widehat{\mathcal{M}}_{r+2}(\Gamma)$, montrons donc que pour $r\in\mathbb{Z}$,</u>

<u>$\delta_r\left(\widehat{\mathcal{A}}_r(\Gamma)\right)\subset\widehat{\mathcal{A}}_{r+2}(\Gamma)$.</u>

Soit $h\in\widehat{\mathcal{A}}_k(\Gamma)$. Alors : $\exists l\in\mathbb{N}$, $\exists (f,g)\in\widehat{\mathcal{M}}_{k+l}(\Gamma)\times\widehat{\mathcal{M}}_l(\Gamma)$ telles que $h=\dfrac{f}{g}$.

D'après la règle 2, on a :
$$\begin{aligned}\delta_r h &= \delta_{r+l-l}\left(\frac{f}{g}\right)\\ &= \frac{\delta_{r+l}f}{g} + f\times\delta_{-l}\left(\frac{1}{g}\right)\\ &= \frac{\delta_{r+l}f}{g} - \frac{f\times(\delta_l g)}{g^2}\\ &\in \widehat{\mathcal{A}}_{r+2}(\Gamma)\end{aligned}$$

car
$$\begin{aligned} i\pi\delta_{-l}\left(\frac{1}{g}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{g}\right) + \frac{il}{2\Im m}\times\frac{1}{g} = -\frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{il}{2\Im m}g\right)\\ &= -\frac{\delta_l g}{g^2}.\end{aligned}$$

□

Remarquons le cas particulier suivant : $\mathrm{D}_0^1\left(\mathcal{A}_0(\Gamma)\right)\subset\mathcal{A}_2(\Gamma)$.

En effet, si $(f,g)\in\mathcal{M}_k(\Gamma)^2$, où $k\in\mathbb{Z}$ et Γ est un sous - groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, et si $z\in\mathcal{H}$, on a successivement :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{D}_0^1\left(\frac{f}{g}\right)\underset{2}{|}\alpha\right)(z) &= \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}(\alpha.z)}{(cz+d)^{r+2}}\,\frac{1}{\dfrac{1}{(cz+d)^r}g(\alpha.z)} - \frac{\dfrac{1}{(cz+d)^r}f(\alpha.z)}{\left(\dfrac{1}{(cz+d)^2}g(\alpha.z)\right)^2}\,\frac{\dfrac{\partial g}{\partial z}(\alpha.z)}{(cz+d)^{r+2}}\\ &= \frac{\dfrac{\partial\,(f\circ\alpha)}{\partial z}(z)}{(cz+d)^r}\times\frac{1}{\left(g\underset{r}{|}\alpha\right)(z)} - \frac{\left(f\underset{r}{|}\alpha\right)(z)}{\left(\left(g\underset{r}{|}\alpha\right)(z)\right)^2}\times\frac{\dfrac{\partial\,(g\circ\alpha)}{\partial z}(z)}{(cz+d)^r}\end{aligned}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial\left((cz+d)^r f(z)\right)}{\partial z}}{(cz+d)^r}\frac{1}{g(z)} - \frac{f(z)}{(g(z))^2}\frac{\dfrac{\partial\left((cz+d)^r g(z)\right)}{\partial z}}{(cz+d)^r}$$

$$= \frac{rc}{cz+d}\frac{f(z)}{g(z)} + \frac{f'(z)}{g(z)} - \frac{rc}{cz+d}\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(z)}{g(z)^2}g'(z)$$

$$= \left(\mathrm{D}_0^1\left(\frac{f}{g}\right)\right)(z).$$

4.2 Le théorème de Shimura.

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant :

Théorème : *(Shimura)*
Soit $k \in \mathbb{Z}$.
$\omega \in \mathcal{H}$ un point de multiplication complexe.
$(f,g) \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\overline{\mathbb{Q}})^2$ telle que $g(\omega) \neq 0$.
Alors, $\dfrac{f(\omega)}{g(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Remarquons que l'énoncé donné par Shimura[2] est valide en plusieurs variables. Mais nous ne l'étudierons qu'à une seule variable, la démonstration étant plus simple.

4.2.1 Valeurs spéciales de formes modulaires arithmétiques.

Avant de chercher à obtenir un résultat sur les valeurs spéciales de formes modulaires arithmétiques presque holomorphes, voici d'abord, comme préliminaire, un lemme sur les valeurs spéciales de formes modulaires arithmétiques.

Ce lemme, qui deviendra un cas particulier du théorème de Shimura, est nécessaire à sa démonstration.

Lemme 1 : Soit $\omega \in \mathcal{H}$ un point CM.
$f \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}})$, holomorphe en ω.
Alors, $f(\omega) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Bien que très connue, nous en redonnons la démonstration :

Démonstration : Soit ω un point CM de $\mathcal{H}$.
$f \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}})$.
• Alors[3], f est une fraction rationnelle en j, dont les coefficients sont les coefficients de Fourier de f en l'infini, car f est une fonction méromorphe sur $\mathcal{H}$, vérifiant la condition de modularité de poids 0 :

$$\exists \mathrm{F} \in \mathbb{Z}\left((c_i)_{i\in[\![-\mathrm{N}\,;+\infty]\!]}\right)(\mathrm{X}),\ f = \mathrm{F}\circ j$$

où $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\mathrm{N}}^{+\infty} c_n e^{2in\pi z}$ avec $\forall n \geq -\mathrm{N}$, $c_n \in \overline{\mathbb{Q}}$.

---

[2]Voir [31], §5, théorème 5.3 p 27.
[3]Voir [26], chap. 7, §3.4, p 146.

• De plus, ω est quadratique imaginaire :

En effet, $\exists \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, $\begin{cases} \gamma.\omega = \omega \\ \gamma \text{ est non scalaire.} \end{cases}$, d'où l'égalité $c\omega^2 + (d-a)\omega - b = 0$.

Ainsi : * ω est quadratique.

* ω est quadratique imaginaire.

En effet, soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Si $m > 0$, alors $\mathbb{Q}(\omega) \subset \mathbb{R}$, d'où $\omega \in \mathbb{R}$ et $\omega \notin \mathcal{H}$...

Donc, nécessairement, $m < 0$ et ω est quadratique imaginaire.

• Ainsi[4], $j(\omega) \in \overline{\mathbb{Q}}$, d'où $f(\omega) = \mathrm{F}\big(j(\omega)\big) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

□

4.2.2 Propriétés arithmétiques.

Pour pouvoir démontrer le théorème de Shimura, nous allons devoir établir quelques propriétés arithmétiques qui nous serons utiles.

Pour commencer, affinons la règle 3 :

Règle 3' : Soit $(r,k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$.
Alors, $\mathrm{D}_r^k\left(\widehat{\mathcal{A}}_r(\overline{\mathbb{Q}})\right) \subset \widehat{\mathcal{A}}_{r+2k}(\overline{\mathbb{Q}})$.

Démonstration : D'après la règle 3, il suffit de vérifier que si $f \in \widehat{\mathcal{M}}_r(\overline{\mathbb{Q}})$, alors les coefficients $(\delta_r\ f)_i$ du polynôme $\delta_r\ f$ en $\dfrac{1}{2i\pi\Im m}$ admettent un développement de Fourier à l'infini de la forme $\forall z \in \mathcal{H}$, $(\delta_r\ f)_i(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{\frac{2in\pi z}{h}}$, où $h \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Par hypothèse, si l'on écrit $\forall z \in \mathcal{H}$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{f_j(z)}{\pi^j (z-\overline{z})^j}$ pour $s \in \mathbb{N}$, on a , si l'on note pour tout $j \in [\![0\,;\,s]\!]$: $f_j(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{j,n} e^{\frac{2in\pi z}{h}}$, $a_{j,n} \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $(j,n) \in [\![0\,;\,s]\!] \times \mathbb{N}$.

Or : $$(\delta_r\ f)(z) = \frac{1}{i\pi} f_0{}'(z) + \sum_{j=1}^{s} \frac{\dfrac{f_j{}'(z)}{i\pi} + \dfrac{(r-j+1)f_{j-1}(z)}{i}}{\pi^j (z-\overline{z})^j} - \frac{1}{i} \frac{(r-s)f_s(z)}{\pi^{s+1}(z-\overline{z})^{p+1}}$$

et $$\begin{cases} \dfrac{f_0{}'(z)}{i\pi} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2na_{0,n}}{h} e^{\frac{2in\pi z}{h}} \\ \dfrac{f_j{}'(z)}{i\pi} + \dfrac{(r-j+1)f_{j-1}(z)}{i} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2na_{j,n}}{h} + \frac{(r-j+1)a_{j-1,n}}{i} \right) e^{\frac{2in\pi z}{h}} \\ \dfrac{(r-s)f_s(z)}{i} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(r-s)a_{s,n}}{i} e^{\frac{2in\pi z}{h}} \end{cases}.$$

Ceci permet donc de conclure que les coefficients de la forme modulaire presque holomorphe $\delta_r\ f$ ont des développement à l'infini à coefficients algébriques, donc que $\delta_r\ f$ est une forme modulaire presque holomorphe arithmétique de poids $r+2$.

□

[4]Voir [14], chap. 5, §2, théorème 4 p 57.

Enfin, nous pouvons affiner la propriété établis page **??** en :

Propriété 1 : Soit $(k,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
$f \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\overline{\mathbb{Q}})$.
Alors,
- $k \geq 2s$.
- pour tout $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq p \leq \frac{k}{2}$, $\exists c \in \overline{\mathbb{Q}}$, il existe $g_p \in \mathcal{M}_{k-2p}(\overline{\mathbb{Q}})$ tels que :

$$f = \sum_{0 \leq p \leq \frac{k}{2}} \mathrm{D}^p_{k-2p} g_p + \begin{cases} c\mathrm{D}_2^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{E}_2{}^* & \text{, si } \quad k \in 2\mathbb{Z}. \\ 0 & \text{, si } \quad k \notin 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Démonstration : Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$, pour un sous - groupe Γ de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Reprenons la démonstration déjà effectuée de la première version de cette propriété :

- Le résultat reste clair si $k = 0$.
- Dans le cas où $k > 2s$, il suffit de modifier le lemme utilisé comme suit :

Lemme : Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$, s'écrivant sous la forme $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{f_j(z)}{\pi^j (z - \overline{z})^j}$ pour tout $z \in \mathcal{H}$.
Alors : $\exists \lambda \in \mathbb{N}^*$, $f - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{D}^s_{k-2s}\ f_s \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s-1}(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$.

Démonstration : Puisque la majeure partie du travail à déjà été effectuée lors de la démonstration du premier lemme, il suffit de voir que les coeficients g_i du polynôme $g = f - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{D}^s_{k-2s}\ f_s$ en $\dfrac{1}{2i\pi\Im m}$ admettent un développement de Fourier à l'infini à coefficients des nombres algébriques, où $\lambda \in \mathbb{N}^*$ est obtenu par application du premier lemme.

Pour cela, il suffit de voir que si $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$, alors $\delta_r\ f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$: en effet, par itération, $\mathrm{D}^s_{k-2s}\ f \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$, et $g \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s-1}(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$.

Or, ceci a exactement été fait lors de la démonstration précédente.

$\square$

- Dans le cas où $k = 2s$, on sait en fait un peu mieux que $\mathrm{E}_2{}^* \in \widehat{\mathcal{M}}_2^{\leq 1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$: $\mathrm{E}_2{}^* \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \overline{\mathbb{Q}})$, d'où en particulier $\mathrm{E}_2{}^* \in \widehat{\mathcal{M}}_2^{\leq 1}(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$.

Ainsi : $\mathrm{D}_2^{\frac{k}{2}-1}\ \mathrm{E}_2{}^* \in \widehat{\mathcal{M}}_k^{\leq s}(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$, et le reste de la démonstration s'applique alors à l'identique, puisque $c = \dfrac{f_s}{e_s} \in \overline{\mathbb{Q}}$ par hypothèse.

$\square$

4.2.3 Principe de la démonstration.

Nous allons en fait montrer le théorème suivant, le théorème de Shimura en découlant immédiatement, en suivant la démarche initiale de son auteur[5].

[5]Voir [31], §7, p 33.

Théorème : Soit $\omega \in \mathcal{H}$ un point CM.
$f \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\overline{\mathbb{Q}})$.
$\varphi \in \mathcal{M}_1(\overline{\mathbb{Q}})$ telle que $\varphi(\omega) \neq 0$.
Alors, $\dfrac{f(\omega)}{(\varphi(\omega))^k} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Ceci nécessite évidemment l'existence d'une forme modulaire arithmétique de poids 1, ne s'annulant pas en ω, ce que nous construirons facilement plus loin.

Pour démontrer ceci, nous déveloperons $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\overline{\mathbb{Q}})$ suivant l'écriture donnée par la propriété 1 de la page 57 : $f = \sum_{0 \leq p \leq \frac{k}{2}} \mathrm{D}^p_{k-2p} g_p + \begin{cases} c\mathrm{D}_2^{\frac{k}{2}-1}{\mathrm{E}_2}^* & \text{, si } k \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{, si } k \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$,

avec $\begin{cases} \text{pour tout } p \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } 0 \leq p \leq \dfrac{k}{2},\ g_p \in \mathcal{M}_{k-2p}(\overline{\mathbb{Q}}). \\ \exists c \in \overline{\mathbb{Q}}. \end{cases}$

Il ne reste plus qu'à utiliser la propriété suivante pour conclure :

Propriété 2 : Soit ω un point CM de $\mathcal{H}$.
$(e, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.
$f \in \mathcal{M}_r(\overline{\mathbb{Q}})$, holomorphe en ω.
$g \in \mathcal{M}_{r+2e}(\overline{\mathbb{Q}})$, holomorphe en ω.
Alors, $\dfrac{(\mathrm{D}_r^e\, f)(\omega)}{g(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Le terme en ${\mathrm{E}_2}^*$, s'il apparaît se traitera de même, après un application supplémentaire de la propriété 1.

Ainsi, le théorème de Shimura se réduit à la propriété 2, qui ne considère que des formes modulaires, mais est beaucoup plus intérresant que le lemme 1, car il donne la nature arithmétique en un point spécial du quotient d'une forme modulaire presque holomorphe très particulière par une simple forme modulaire.

4.3 Vers la démonstration du théorème de Shimura.

Nous aurons besoin d'une successions de lemmes intermédiaires avant de pouvoir obtenir la propriété 2.

4.3.1 Des lemmes intermédiaires.

Lemme 2 : $\mathcal{M}_1(\overline{\mathbb{Q}}) \neq \emptyset$.

Pour cette démonstration, nous allons suivre une partie du livre d'introduction aux formes modulaires de Diamond et Shurmon[6].

[6]Voir [5], chap. 1, §2, p 12,21.

Démonstration : Soit $\theta : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2in^2\pi z} \end{array}$

• Montrons que $\forall z \in \mathcal{H}$, $\theta\left(-\frac{1}{4z}\right) = (-2iz)^{\frac{1}{2}}\theta(z)$:

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\alpha x^2} \end{array}$, avec $\alpha > 0$.

Alors :
- ♦ $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
- ♦ $\exists \mathrm{C} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \dfrac{\mathrm{C}}{(1+|x|^2)^2}$.
- ♦ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2}}$, d'où $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$ converge.

Ainsi, d'après la formule de Poisson, appliqué à la fonction f et évaluée en $x = 0$, on obtient $\forall \alpha > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}$.

Pour $\alpha = 2\pi y > 0$, on obtient : $\forall y > 0$,
$$\begin{aligned} \theta(iy) &= \sqrt{\frac{1}{2y}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2in^2\pi\times\left(-\frac{1}{4iy}\right)} \\ &= \sqrt{-\frac{1}{2i\times iy}}\theta\left(-\frac{1}{4iy}\right). \end{aligned}$$

D'après le principe du prolongement analytique appliqué à la fonction holomorphe $z \longmapsto \theta\left(-\frac{1}{4iy}\right) - \sqrt{2iz}\theta(z)$ sur l'ouvert connexe $\mathcal{H}$, on en déduit que : $\forall z \in \mathcal{H}$, $\theta\left(-\frac{1}{4iy}\right) = \sqrt{2iz}\theta(z)$.

• De plus : pour tout $z \in \mathcal{H}$, $\theta(z+1) = \theta(z)$.

Puisque $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, conjuguons $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par cette matrice :

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

On a alors successivement, pour tout $z \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{z}{4z+1}\right) &= \theta\left(-\frac{1}{4\left(-1-\frac{1}{4z}\right)}\right) \\ &= \left(-2i\left(-1-\frac{1}{4z}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\theta\left(-1-\frac{1}{4z}\right) \\ &= \left(2i\left(1+\frac{1}{4z}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\theta\left(-\frac{1}{4z}\right) \\ &= \left(2i\left(1+\frac{1}{4z}\right)\times(-2iz)\right)^{\frac{1}{2}}\theta(z) \\ &= (4z+1)^{\frac{1}{2}}\theta(z). \end{aligned}$$

• Montrons que $\Gamma_0(4) = \left\langle \pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$:

Notons $\Gamma = \left\langle \pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

♦ Il est clair que $\Gamma \subset \Gamma_0(4)$.

♦ Réciproquement, soit $\alpha \in \Gamma_0(4)$.
Pour commencer, nous avons les deux lemmes suivants :

Lemme 1 : Soit $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$.
Alors : $\exists \gamma \in \Gamma$, $|(\alpha\gamma)_{22}| < \dfrac{1}{2}\,|(\alpha\gamma)_{21}| = \dfrac{|c|}{2}$.

Lemme 2 : Soit $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$.
Alors : $\exists \gamma \in \Gamma$, $|(\alpha\gamma)_{21}| < 2\,|(\alpha\gamma)_{22}| = 2|d|$.

Démonstration : Nous n'effectuerons que la démonstration du lemme 1, car la seconde est identique, mais en utilisant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$, $|n_0c + d| \leq \dfrac{|c|}{2}$, car $\mathbb{R}$ est archimédien.

Si l'on avait $|n_0c+d| = \dfrac{|c|}{2}$, alors on aurait $2(n_0+d) \equiv 0(4)$, d'où $2d \equiv 0(4)$ ce qui impliquerait $d \equiv 0(2)$.
Ceci est impossible, puisque $d \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$, car $ad \equiv 1(4)$.

Donc :, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$, $|n_0c + d| < \dfrac{|c|}{2}$, et $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

$\square$

En utilisant tant que possible, alternativement les lemmes 1 et 2, supposons avoir construit des matrices $(\gamma_1, \cdots, \gamma_{2n+2}, \cdots)$ de Γ telles que pour tout k :

$$\begin{cases} (\alpha\gamma_1\cdots\gamma_{2k+1})_{21} \neq 0. \\ |(\alpha\gamma_1\cdots\gamma_{2k+1})_{22}| < \dfrac{1}{2}\,|(\alpha\gamma_1\cdots\gamma_{2k+1})_{21}| = \dfrac{1}{2}\,|(\alpha\gamma_1\cdots\gamma_{2k+2})_{21}|. \\ (\alpha\gamma_1\cdots\gamma_{2k+1})_{22} \neq 0. \\ |(\alpha\gamma_1\cdots\gamma_{2k+2})_{21}| < 2\,|(\alpha\gamma_1\cdots\gamma_{2k+2})_{22}| = 2\,|(\alpha\gamma_1\cdots\gamma_{2k+1})_{21}|. \end{cases}$$

Notons alors $\begin{cases} u_k = |(\alpha\gamma_1\cdots\gamma_{2k+1})_{22}|. \\ v_k = |(\alpha\gamma_1\cdots\gamma_{2k+2})_{21}|. \end{cases}$

Ainsi, on a :
- $u_0\cdots u_n v_0\cdots v_n \neq 0$.
- pour tout $k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$, $\begin{cases} |u_k| < \dfrac{1}{2}|v_{k-1}|. \\ |v_k| < 2|u_k|. \end{cases}$

Ceci prouve que les suites d'entiers $(|u_k|)_k$ et $(|v_k|)_k$ sont strictements décroissantes. Donc $(\inf(|u_k|;|v_k|))_k$ est aussi une suite d'entiers strictement décroissante.

Par conséquent, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\inf(|u_{k_0}|, |v_{k_0}|) = 0$.

Ainsi, il existe $\gamma \in \Gamma$ telle que $\alpha\gamma \in \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\} \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Si l'on avait $\alpha\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, le processus impliquerait que $c \equiv 0(4)$.
Or, $bc = 1$, d'où $c \in \{+1; -1\}$, ce qui est contradictoire avec $c \equiv 0(4)$.

Donc, $\alpha\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Alors, $(a,c) \in \{+1;-1\}^2$ et a et c sont de même signe, d'où

$$\alpha\gamma \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ - \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ainsi, on a montré : $\forall \alpha \in \Gamma_0(4)$, $\exists \gamma \in \Gamma$, $\alpha\gamma \in \Gamma$.
D'où finalement $\alpha \in \Gamma$. Ceci prouve que $\Gamma_0(4) \subset \Gamma$.

• Par conséquent $\theta^2 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Q})$.
En effet : $\Gamma(4) \subset \Gamma_0(4)$ et θ^2 est holomorphe sur $\mathcal{H}$, de développment de Fourier à l'infinie à coefficients des nombres algébriques.

□

Ceci nous permet de démontrer simplement le lemme suivant :

Lemme 3 : 1. $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_r(\overline{\mathbb{Q}}) \neq \{0\}$.
2. $\forall r \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{A}_r(\overline{\mathbb{Q}}) \neq \{0\}$.

Démonstration : On a : $\theta^{2r} \in \mathcal{M}_r(\overline{\mathbb{Q}})$, si $r \in \mathbb{N}^*$, et $\theta^{2r} \in \mathcal{A}_r(\overline{\mathbb{Q}})$, si $r \in \mathbb{Z}$.

□

Nous allons désormais vérifier que : si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma(\mathrm{N}))$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors pour toute matrice $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, $(f \underset{k}{|} \alpha)$ est encore une forme modulaire de poids k, mais de niveau supérieur. Nous rajouterons aussi des caractéristiques arithmétiques :

Lemme 4 : Soit $r \in \mathbb{Z}$.
$\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Z})$.
$f \in \mathcal{A}_r(\overline{\mathbb{Q}})$.
Alors, $(f \underset{r}{|} \alpha) \in \mathcal{A}_r(\overline{\mathbb{Q}})$.

Démonstration : Commençons par un lemme qui donnera le niveau supérieur à laquelle $(f \underset{k}{|} \alpha)$ appartiendra :

Lemme[8]**:** Soit Γ un sous groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$.
Alors, $(\alpha^{-1}\Gamma\alpha) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est encore un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Démonstration : • Il est clair que $(\alpha^{-1}\Gamma\alpha) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

• Soit $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\begin{cases} \Gamma(\mathrm{N}_0) \subset \Gamma. \\ \mathrm{N}_0\alpha \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}). \\ \mathrm{N}_0\alpha^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}). \end{cases}$

(Un tel entier existe, puisque :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n_0) \subset \Gamma$, *et,* $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Gamma(kn_0) \subset \Gamma$
si $d_1 = \prod_{1 \leq i,j \leq 2}$ *dénominateur*(α_{ij}), *alors* $d_1\alpha \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$
si $d_2 = \prod_{1 \leq i,j \leq 2}$ *dénominateur*$\big((\alpha^{-1})_{ij}\big)$, *alors* $d_2\alpha^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$
Alors, l'entier $\mathrm{N}_0 = d_1 d_2 n_0$ *convient.)*

[8] Voir [5], lemme 5.1.1 p 164.

Montrons que $\Gamma({N_0}^3) \subset (\alpha^{-1}\Gamma\alpha) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

Soit $\gamma \in \Gamma({N_0}^3)$.
Ecrivons γ sous la forme $\gamma = \mathrm{I}_2 + {N_0}^3 \mathrm{A}$, avec $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}). \\ det\ \gamma = 1. \end{array} \right.$.
Alors : • $\alpha\gamma\alpha^{-1} = \mathrm{I}_2 + \mathrm{N}_0(\mathrm{N}_0\alpha)\mathrm{A}(\mathrm{N}_0\alpha^{-1}) \in \mathrm{I}_2 + \mathrm{N}_0\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
• $\alpha\gamma\alpha^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
D'où $\alpha\gamma\alpha^{-1} \in \big(\mathrm{I}_2 + \mathrm{N}_0\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\big) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(\mathrm{N}_0)$, c'est à dire $\gamma \in \alpha^{-1}\Gamma(\mathrm{N}_0)\alpha$.

Puisque $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on obtient : $\gamma \in (\alpha^{-1}\Gamma(\mathrm{N}_0)\alpha) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
ceci démontre ce que l'on voulait.

• Ainsi, $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha^{-1}\Gamma(\mathrm{N}_0)\alpha) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ est un sous groupe de } \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \Gamma(\mathrm{N}) \subset (\alpha^{-1}\Gamma(\mathrm{N}_0)\alpha) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \end{array} \right.$.
Donc $(\alpha^{-1}\Gamma(\mathrm{N}_0)\alpha) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

$\square$

• Pour démontrer le lemme 4, il suffit de montrer que si $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\overline{\mathbb{Q}})$, $f \in \mathcal{M}_k(\overline{\mathbb{Q}})$ entraine que $(f \underset{k}{|} \alpha) \in \mathcal{M}_k(\overline{\mathbb{Q}})$.

En effet, soient $f \in \mathcal{A}_r(\overline{\mathbb{Q}})$ et $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Alors, il existe $l \in \mathbb{N}$ et $(g,h) \in \mathcal{M}_{r+l}(\overline{\mathbb{Q}}) \times \mathcal{M}_l(\overline{\mathbb{Q}})$ tels que $f = \dfrac{g}{h}$.

On a alors, si $(f \underset{k}{|} \alpha) \in \mathcal{M}_k(\overline{\mathbb{Q}})$ dès que l'on a $f \in \mathcal{M}_k(\overline{\mathbb{Q}})$ et $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$:

$$(f \underset{r}{|} \alpha)(z) = \frac{1}{(cz+d)^r} \frac{g(\alpha.z)}{h(\alpha.z)} = \frac{(g \underset{r+l}{|} \alpha)(z)}{(h \underset{l}{|} \alpha)(z)} \in \mathcal{A}_r(\overline{\mathbb{Q}}).$$

• Soit Γ un sous groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
$f \in \mathcal{M}_k(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$.
$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$.
$\varphi = (f \underset{k}{|} \alpha)$.

Il est clair que φ est holomorphe sur $\mathcal{H}$, car $\forall \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $z \longmapsto cz + d$ ne s'annule pas sur $\mathcal{H}$.

Montrons que φ vérifie la condition de modularité de poids k relativement au sous-groupe de congruence $\widetilde{\Gamma} = \big(\alpha^{-1}\Gamma\alpha\big) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

Rappelons que si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$, où Γ est un sous - groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a alors pour toutes matrices $(\alpha, \beta) \in \Gamma^2$: $\left(\Big(f \underset{k}{|} \alpha\Big) \underset{k}{|} \beta \right) = \Big(f \underset{k}{|} \alpha\beta\Big)$.

Soit alors $\gamma \in \widetilde{\Gamma}$, avec $\gamma = \alpha^{-1}\beta\alpha$, $\beta \in \Gamma$.
On a alors successivement :

$$\begin{aligned} (\varphi \underset{k}{|} \gamma) &= \big((f \underset{k}{|} \alpha) \underset{k}{|} \gamma\big) = (f \underset{k}{|} \alpha\gamma) = (f \underset{k}{|} \beta\alpha) \\ &= \big((f \underset{k}{|} \beta) \underset{k}{|} \alpha\big) = (f \underset{k}{|} \alpha) = \varphi. \end{aligned}$$

Montrons que φ est holomorphe aux pointes, de developpement à l'infini à coefficients des nombres algébriques.

Il s'agit de montrer que : $\forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $(\varphi \underset{k}{|} \gamma) = (f \underset{k}{|} \alpha\gamma)$ est holomoprhe à l'infini, puis que son développement à l'infini est à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, ce qui est clair, puisque $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$.

Donc $\varphi \in \mathcal{M}_k(\widetilde{\Gamma}, \overline{\mathbb{Q}})$.

$\square$

Voici enfin le dernier des lemmes que nous utiliserons :

Lemme 5 : Soit ω un point CM de $\mathcal{H}$.
$e \in \mathbb{N}^*$.

Alors : $\exists \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ telle que $\begin{cases} \alpha.\omega = \omega \\ (c\omega + d)^{2e} \neq 1 \end{cases}$.

Démonstration : Soit $\omega \in \mathcal{H}$ un point CM.
Notons $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

Premier cas : $\omega \notin \mathbb{Q}(i) \cup \mathbb{Q}(j)$.

Puisque ω est un point CM : $\exists \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ telle que $\alpha.\omega = \omega$.

Si l'on avait $(c\omega + d)^{2e} = 1$, alors $c\omega + d$ serait une racine de l'unité tout en étant quadratique, donc on aurait $c\omega + d \in \mathbb{Q}(i) \cup \mathbb{Q}(j)$, ie $\omega \in \mathbb{Q}(i) \cup \mathbb{Q}(j)$, ce qui n'est pas.

Ainsi, $(c\omega + d)^{2e} \neq 1$.

Second cas : $\omega \in \mathbb{Q}(i)$.

Alors : $\omega = r + is$ avec $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$.

Notons $\alpha_0 = \begin{pmatrix} \frac{2r}{r^2+s^2} & 1 \\ \frac{1}{r^2+s^2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, et $\alpha = \begin{cases} \alpha_0 & \text{si } |\omega| \neq 1 \\ 2\alpha_0 & \text{si } |\omega| = 1 \end{cases}$.

Un calcul élémentaire montre que $\alpha.\omega = \omega$ dans les deux cas.

De plus, $\begin{cases} \left(\frac{\omega}{r^2+s^2}\right)^{2e} = \frac{1}{\overline{\omega}^{2e}} \neq 1 \text{ , si } |\omega| \neq 1 \\ \left(\frac{2\omega}{r^2+s^2}\right)^{2e} = 2\omega \neq 1 \text{ , si } |\omega| = 1\text{, car sinon on aurait } e = 0. \end{cases}$

Troisième cas : $\omega \in \mathbb{Q}(j)$.

Alors ; $\omega = r + js$ avec $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$.

Soit $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 2r & rs - (r^2 + s^2) \\ 1 & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, et $\alpha = \begin{cases} \alpha_0 & \text{si } |\omega + s|^2 \neq 1 \\ 2\alpha_0 & \text{si } |\omega + s|^2 = 1 \end{cases}$.

Un calcul élémentaire montre aussi que $\alpha.\omega = \omega$ dans les deux cas.

De plus, $\begin{cases} (\omega + s)^{2e} \neq 1 & \text{, si } |\omega + s|^2 \neq 1 \\ (2\omega + 2s)^{2e} \neq 1 & \text{, si } |\omega + s|^2 = 1\text{, car sinon on aurait } e = 0. \end{cases}$

$\square$

4.3.2 Démonstration de la propriété 2.

Nous avons désormais tout ce qui est nécessaire pour démontrer la propriété 2, ce que nous faisons en suivant le travail de Shimura (voir [28]) .

Mais avant, rappelons l'énoncé de cette propriété :

Propriété 2 : Soit ω un point CM de $\mathcal{H}$.
$(e,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.
$f \in \mathcal{M}_r(\overline{\mathbb{Q}})$, holomorphe en ω.
$g \in \mathcal{M}_{r+2e}(\overline{\mathbb{Q}})$, holomorphe en ω.
Alors, $\dfrac{(\mathrm{D}_r^e\, f)(\omega)}{g(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$

Démonstration : On peut supposer que $f \not\equiv 0$, car dans le cas contraire, le lemme est trivial.
Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur $e \in \mathbb{N}$.

$e = 0$: Alors, $(f,g) \in \left(\mathcal{M}_r(\overline{\mathbb{Q}})\right)^2$.

D'où $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}})$, ie par le lemme 1, $\dfrac{f(\omega)}{g(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

$e \geq 1$:

- On peut supposer que $f(\omega) \neq 0$:

  On a $\mathbb{Q} + \omega\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^* \subset \{\beta.\omega ; \beta \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})\} \subset \mathcal{H}$, et $\mathbb{Q} + \omega\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*$ est dense dans $\mathcal{H}$; donc, $\{\beta.\omega ; \beta \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})\}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

  De plus, $\exists c \in \mathcal{H}$ tel que f est holomorphe en c et $f(c) \neq 0$. Par continuité, $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall z \in \mathrm{D}(c, \varepsilon_0)$, $f(z) \neq 0$. Or, par densité, $\exists \beta \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ tel que $\beta.\omega \in \mathrm{D}(c,\varepsilon_0)$, d'où $f(\beta.\omega) \neq 0$.

  Posons désormais $\psi = (f \underset{r}{|} \beta)$.

  D'après le lemme 4, $\psi \in \mathcal{A}_r(\overline{\mathbb{Q}})$ et $\psi(\omega) \neq 0$.

  Ainsi, si $f(\omega) = 0$, on remplace dans ce qui suit f par $f + \psi$.

- D'après le lemme 5 : $\exists \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\begin{cases} \alpha.\omega = \omega \\ (c\omega + d)^{2e} \neq 1 \end{cases}$.

- Posons $\begin{array}{rccc} h : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{\left(f \underset{r}{|} \alpha\right)(z)}{f(z)} \end{array}$.

  Alors :

  i. h est holomorphe en ω, puisque f l'est.

  ii. $h \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}})$, car d'après le lemme 4, $\left(f \underset{r}{|} \alpha\right) \in \mathcal{A}_r(\overline{\mathbb{Q}})$.

  iii. $h(\omega) = \dfrac{1}{(c\omega + d)^r}$, car $\left(f \underset{r}{|} \alpha\right)(\omega) = \dfrac{f(\omega)}{(c\omega + d)^r}$.

$e = 1$: • En appliquant l'opérateur D_r^1 à l'égalité $fh = \left(f \underset{r}{|} \alpha\right)$, d'après les règles de calculs 2 puis 1, on obtient :

$$
\begin{aligned}
h(\mathrm{D}_r^1 f) + f(\mathrm{D}_0^1 h) &= \mathrm{D}_r^1(f \underset{r}{|} \alpha) \\
&= (\det\ \alpha)\left((\mathrm{D}_r^1\ f) \underset{r+2}{|} \alpha\right) \\
&= \left((\mathrm{D}_r^1\ f) \underset{r+2}{|} \alpha\right).
\end{aligned}
$$

d'où en évaluant en ω :

$$
f(\omega)\left(\mathrm{D}_0^1 h\right)(\omega) = \frac{\left(\mathrm{D}_r^1 f\right)(\omega)}{(c\omega+d)^r}\left(\frac{1}{(c\omega+d)^2} - 1\right).
$$

- Or, $h \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}})$, d'où $\mathrm{D}_0^1 h \in \mathcal{A}_2(\overline{\mathbb{Q}})$, par la remarque suivant la régle 3'.

  d'où $f(\mathrm{D}_0^1 h) \in \mathcal{A}_{r+2}(\overline{\mathbb{Q}})$.

  d'où $\dfrac{f(\mathrm{D}_r^1 h)}{g} \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}})$.

  d'où $\dfrac{f(\omega)(\mathrm{D}_r^1 h)(\omega)}{g(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$, par le lemme 1.

- Comme ω est un point CM, ω est quadratique.

D'où $\left(\dfrac{1}{(c\omega+d)^2} - 1\right)\dfrac{1}{(c\omega+d)^r} \in$ et $\dfrac{(\mathrm{D}_r^1 f)(\omega)}{g(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

<u>$e \geq 2$:</u> • En appliquant l'opérateur D_r^e à l'égalité $fh = (f \underset{r}{|} \alpha)$, d'après les règles de calculs 2 puis 1, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{e}\binom{e}{p}\left(\mathrm{D}_r^p f\right)\left(\mathrm{D}_0^{e-p} h\right) &= \mathrm{D}_r^e(f \underset{r}{|} \alpha) \\
&= (\det\ \alpha)^e\left((\mathrm{D}_r^e\ f) \underset{r+2e}{|} \alpha\right) \\
&= \left((\mathrm{D}_r^e\ f) \underset{r+2e}{|} \alpha\right).
\end{aligned}
$$

d'où en évaluant en ω :

$$
\sum_{p=0}^{e-1}\binom{e}{p}\left(\mathrm{D}_r^p\ f\right)(\omega)\left(\mathrm{D}_0^{e-p}\ h\right)(\omega) = \frac{\left(\mathrm{D}_r^e\ f\right)(\omega)}{(c\omega+d)^r}\left(\frac{1}{(c\omega+d)^{2e}} - 1\right).
$$

• Soit $p \in [\![0\,;\, e-1]\!]$.

Il existe $\varphi_p \in \mathcal{M}_{2(e-p)}(\overline{\mathbb{Q}})$ non nulle, d'après le lemme 3.

Donc : $\exists c \in \mathcal{H}$, tel que φ_p est holomorphe en c et $\varphi_p(c) \neq 0$. Par continuité de φ_p en c : $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall z \in \mathrm{D}(c, \varepsilon_0)$, $\varphi_p(z) \neq 0$. Or, par densité de $\{\beta.\omega; \beta \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})\}$ dans $\mathcal{H}$: $\exists \beta_p \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ tel que $\beta_p.\omega \in \mathrm{D}(c, \varepsilon_0)$, d'où $\varphi_p(\beta_p.\omega) \neq 0$.

En posant $g_p = (\varphi_p \underset{r}{|} \beta_p)$, on a alors, d'après le lemme 4 : $g_p \in \mathcal{M}_{2(e-p)}(\overline{\mathbb{Q}})$.

Ainsi, pour tout $p \in [\![0\,;\, e-1]\!]$, il existe $g_p \in \mathcal{A}_{2(e-p)}(\overline{\mathbb{Q}})$ telles que g_p est holomorphe en ω et $g_p(\omega) \neq 0$.

De même, pour tout $p \in [\![0 \,;\, e-1]\!]$, il existe $h_p \in \mathcal{M}_{r+2p}(\overline{\mathbb{Q}})$ telles que h_p est holomorphe en ω et $h_p(\omega) \neq 0$.

• D'après l'hypothèse de récurence :

♦ pour tout $p \in [\![0 \,;\, e-1]\!]$, on a : $\dfrac{\left(\mathrm{D}_r^p\, f\right)(\omega)}{h_p(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

♦ pour tout $p \in [\![1 \,;\, e-1]\!]$, on a : $\dfrac{\left(\mathrm{D}_0^{e-p}\, h\right)(\omega)}{g_p(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

♦ $\dfrac{\left(\mathrm{D}_0^e\, h\right)(\omega)}{g_0(\omega)} = \dfrac{\left(\mathrm{D}_2^{e-1}\left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\right)\right)(\omega)}{g_0(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$, car $\dfrac{\partial h}{\partial z} \in \mathcal{M}_2(\overline{\mathbb{Q}})$.

♦ $\dfrac{g_p(\omega)h_p(\omega)}{g(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$, car $\dfrac{g_p h_p}{g} \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}})$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{p=0}^{e-1} \begin{pmatrix} e \\ p \end{pmatrix} \frac{\left(\mathrm{D}_r^p f\right)(\omega)\left(\mathrm{D}_0^{e-p} h\right)(\omega)}{g(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

• Comme ω est un point CM, ω est quadratique.

D'où $\left(\dfrac{1}{(c\omega+d)^2} - 1\right)\dfrac{1}{(c\omega+d)^r} \in \overline{\mathbb{Q}} - \{0\}$, et $\dfrac{(\mathrm{D}_r^e f)(\omega)}{g(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

<u>Et si $f(\omega) = 0$?</u> On a vu : $\exists \beta \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}),\ f(\beta.\omega) \neq 0$.

$\exists \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\begin{cases} \alpha.\omega = \omega. \\ (c\omega+d)^{2e} \neq 1. \end{cases}$

On pose : $\psi = \left(f \underset{r}{|} \beta\right)$, d'où $\psi(\omega) \neq 0$.

$$\widetilde{h} : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{\left((f+\psi)\underset{r}{|}\alpha\right)(z)}{(f+\psi)(z)} \end{array}$$

- D'après le lemme 4, $\psi \in \mathcal{A}_r(\overline{\mathbb{Q}})$.

  D'où $f + \psi \in \mathcal{A}_r(\overline{\mathbb{Q}})$, et $\widetilde{h} \in \mathcal{A}_0(\overline{\mathbb{Q}})$ d'après le lemme 4.

- $\widetilde{h}$ est holomorphe en ω, puisque f l'est.

- $$\begin{aligned} \widetilde{h}(\omega) &= \frac{(f\underset{r}{|}\alpha)(\omega) + (\psi\underset{r}{|}\alpha)(\omega)}{f(\omega)+\psi(\omega)} = \frac{f(\alpha.\omega)+\psi(\alpha.\omega)}{(c\omega+d)^r\psi(\omega)} \\ &= \frac{f(\omega)+\psi(\omega)}{(c\omega+d)^r\psi(\omega)} = \frac{\psi(\omega)}{(c\omega+d)^r\psi(\omega)} \\ &= \frac{1}{(c\omega+d)^r} \end{aligned}$$

Le fait de changer f en $f+\psi$ revient à changer h en $\widetilde{h}$, ce qui ne modifie rien à la suite de l'argument, et permet de conclure la démonstration, puisque h et $\widetilde{h}$ vérifient les mêmes propriétés.

□

4.4 Démonstration du théorème de Shimura.

Comme annoncé lors de la présentation du principe de la démonstration, commençons par démontrer le théorème suivant :

Théorème : Soit $k \in \mathbb{Z}$.
$\omega \in \mathcal{H}$ un point CM.
$f \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\overline{\mathbb{Q}})$.
$\varphi \in \mathcal{M}_1(\overline{\mathbb{Q}})$ telle que $\varphi(\omega) \neq 0$.
Alors, $\dfrac{f(\omega)}{\varphi(\omega)^k} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Démonstration : Soit $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\overline{\mathbb{Q}})$.

• D'après la proposition 1, appliquée à $f \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\overline{\mathbb{Q}})$, on a :
$f = \sum_{0\leq p\leq \frac{k}{2}} \mathrm{D}^p_{k-2p} g_p + \begin{cases} c\mathrm{D}_2^{\frac{k}{2}-1}{\mathrm{E}_2}^* & \text{, si } k \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{, si } k \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$, où pour tout $p \in [\![\, 0\,;\, \mathrm{E}(\frac{k}{2})\,]\!]$, $g_p \in \mathcal{M}_{k-2p}(\overline{\mathbb{Q}})$.

Si la quantité ${\mathrm{E}_2}^*$ apparait, nous réappliquons cette même propriété à $\varphi {\mathrm{E}_2}^*$: ${\mathrm{E}_2}^*\varphi = \mathrm{D}^0_3 h_0 + \mathrm{D}^1_1 h_1 = h_0 + \mathrm{D}^1_1 h_1$, où $h_0 \in \mathcal{M}_3(\overline{\mathbb{Q}})$ et $h_1 \in \mathcal{M}_1(\overline{\mathbb{Q}})$.
D'où successivement :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_2^{\frac{k}{2}-1}{\mathrm{E}_2}^* &= \mathrm{D}_{3-1}^{\frac{k}{2}-1}\left(\tfrac{h_0+\mathrm{D}^1_1 h_1}{\varphi}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\frac{k}{2}-1} \begin{pmatrix} \frac{k}{2}-1 \\ p \end{pmatrix} \left(\mathrm{D}^p_3(h_0 + \mathrm{D}^1_1 h_1)\right) \left(\mathrm{D}_{-1}^{\frac{k}{2}-1-p}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{\varphi^2} \sum_{p=0}^{\frac{k}{2}-1} \begin{pmatrix} \frac{k}{2}-1 \\ p \end{pmatrix} \left(\mathrm{D}^p_3 h_0 + \mathrm{D}^{p+1}_1 h_1\right)\left(\mathrm{D}_1^{\frac{k}{2}-1-p}\varphi\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f = \sum_{0\leq p\leq \frac{k}{2}} \mathrm{D}^p_{k-2p} g_p - \begin{cases} \dfrac{c}{\varphi^2} \displaystyle\sum_{p=0}^{\frac{k}{2}-1} \begin{pmatrix} \frac{k}{2}-1 \\ p \end{pmatrix} \left(\mathrm{D}^p_3 h_0 + \mathrm{D}^{p+1}_1 h_1\right)\left(\mathrm{D}_1^{\frac{k}{2}-1-p}\varphi\right) & \text{si } k \in 2\mathbb{Z}. \\ 0 & \text{si } k \notin 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

• Or :

♦ pour tout $p \in [\![\, 0\,;\, \mathrm{E}(\frac{k}{2})\,]\!]$, $\begin{cases} g_p \in \mathcal{M}_{k-2p}(\overline{\mathbb{Q}}) \\ \varphi^k \in \mathcal{M}_k(\overline{\mathbb{Q}}) \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{\left(\mathrm{D}^p_{k-2p} g_p\right)(\omega)}{\left(\varphi(\omega)\right)^k} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

♦ pour tout $q \in [\![\, 0\,;\, \frac{k}{2}\,]\!]$:

* $h_0 \in \mathcal{M}_3(\overline{\mathbb{Q}})$, $\varphi^{3+2q} \in \mathcal{M}_{3+2q}(\overline{\mathbb{Q}}) \Longrightarrow \dfrac{(\mathrm{D}^q_3 h_0)(\omega)}{\left(\varphi(\omega)\right)^{3+2q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

* $h_1 \in \mathcal{M}_1(\overline{\mathbb{Q}})$, $\varphi^{3+2q} \in \mathcal{M}_{3+2q}(\overline{\mathbb{Q}}) \Longrightarrow \dfrac{\left(\mathrm{D}^{q+1}_1 h_1\right)(\omega)}{\left(\varphi(\omega)\right)^{3+2q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

* $\varphi \in \mathcal{M}_1(\overline{\mathbb{Q}})$, $\varphi^{k-1-2q} \in \mathcal{M}_{k-1-2q}(\overline{\mathbb{Q}}) \Longrightarrow \dfrac{\left(\mathrm{D}_1^{\frac{k}{2}-1-q}\varphi\right)(\omega)}{\left(\varphi(\omega)\right)^{k-1-2q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

$$\text{D'où :}\quad \frac{c}{(\varphi(\omega))^{2+k}} \sum_{q=0}^{\frac{k}{2}-1} \begin{pmatrix} \frac{k}{2}-1 \\ q \end{pmatrix} \left(\left(\mathrm{D}_3^q h_0\right)(\omega) + \left(\mathrm{D}_1^{q+1} h_1\right)(\omega) \right) \left(\mathrm{D}_1^{\frac{k}{2}-1-q} \varphi\right)(\omega)$$

$$= c \sum_{q=0}^{\frac{k}{2}-1} \begin{pmatrix} \frac{k}{2}-1 \\ q \end{pmatrix} \frac{\left(\mathrm{D}_3^q h_0\right)(\omega) + \left(\mathrm{D}_1^{q+1} h_1\right)(\omega)}{(\varphi(\omega))^{3+2q}} \frac{\left(\mathrm{D}_1^{\frac{k}{2}-1-q} \varphi\right)(\omega)}{(\varphi(\omega))^{k-1-2q}} \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

$$\text{Donc, } \frac{f(\omega)}{(\varphi(\omega))^k} \in \overline{\mathbb{Q}}, \text{ dès que } \begin{cases} \omega \text{ est un point CM de } \mathcal{H}. \\ f \in \widetilde{\mathcal{M}}_k(\overline{\mathbb{Q}}). \\ \varphi \in \mathcal{M}_1(\overline{\mathbb{Q}}). \end{cases}.$$

□

On obtient alors le théorème de Shimura, rappelé ci dessous, la seule chose restant à faire étant de construire une forme modulaire arithmétique de poids 1 ne s'annulant pas en ω point CM de $\mathcal{H}$ donné à l'avance.

Théorème : *(Shimura)*

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$\omega \in \mathcal{H}$ un point de multiplication complexe.

$(f, g) \in \widehat{\mathcal{M}}_k(\overline{\mathbb{Q}})^2$ telles que $g(\omega) \neq 0$.

Alors, $\dfrac{f(\omega)}{g(\omega)} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Démonstration : • Il suffit, d'après le théorème précédent, de montrer que l'on peut construire $\varphi \in \mathcal{M}_1(\overline{\mathbb{Q}})$ vérifiant $\varphi(\omega) \neq 0$.

Soit $\psi \in \mathcal{M}_1(\overline{\mathbb{Q}})$, $\psi \not\equiv 0$: une telle définition est possible d'après le lemme 2.

Puisque ψ est non nulle : $\exists c \in \mathcal{H}$, ψ est holomorphe en c et $\psi(c) \neq 0$. Par continuité de ψ en c, car holomorphe en c : $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall z \in \mathrm{D}(c, \varepsilon_0)$, $\psi(z) \neq 0$.
Or, par densité de $\{\beta.\omega ; \beta \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})\}$ dans $\mathcal{H}$: $\exists \beta \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ tel que $\beta.\omega \in \mathrm{D}(c, \varepsilon_0)$, d'où $\psi(\beta.\omega) \neq 0$.

Notons désormais $\varphi = \left(\psi \underset{1}{|} \beta\right) \in \mathcal{M}_1(\overline{\mathbb{Q}})$, d'après le lemme 4.

Ainsi, par construction de φ, on a $\varphi(\omega) \neq 0$.

• D'après le théorème précédent, on a alors : $\dfrac{f(\omega)}{\varphi(\omega)^k} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

$$\text{D'où } \frac{g(\omega)}{\varphi(\omega)^k} \in \overline{\mathbb{Q}}, \text{ d'où } \frac{f(\omega)}{g(\omega)} = \frac{\frac{f(\omega)}{\varphi(\omega)^k}}{\frac{g(\omega)}{\varphi(\omega)^k}} \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

□

Autour d'un problème de Katz.

Nous avons dit dans l'introduction que la question posée par N. Katz, en 1976, dans son article «p - adic interpolation of real analytic Einsenstein series function»[1] est l'exacte réciproque d'un théorème découlant de celui démontré par G. Shimura et étudié au chapitre précédent.

Nous allons commencer par rappeler quelques faits sur les réseaux à multiplications complexes, puis énoncer et démontrer le théorème de base, pour enfin s'intéresser au problème lui-même. Pour cela, nous montrerons l'équivalence entre ce problème et une conjecture, à priori plus générale ; nous verrons une interprétation cohomologique ; puis nous finirons par expliquer les difficultés soulevées par cette question.

5.1 Réseau à multiplications complexe.

On dit qu'un réseau $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ de $\mathbb{C}$ est à multiplication complexe si la courbe elliptique attaché à la fonction elliptique de Weierstrass de réseau $\mathcal{L}$ est à multiplication complexe. Cela signifie que l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda\mathcal{L} \subset \mathcal{L}\}$ est contenu dans un corps quadratique imaginaire. Ceci a lieu si et seulement si le quotient $\tau = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ de deux périodes fondamentales de $\mathcal{L}$ est un nombre quadratique ; alors $\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda\mathcal{L} \subset \mathcal{L}\} \subset \mathbb{Q}\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)$.

Le cas contraire veut dire que $\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda\mathcal{L} \subset \mathcal{L}\} = \mathbb{Z}$.

Définition : Nous dirons qu'un réseau $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ de $\mathbb{C}$ est à **multiplication complexe** si l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda\mathcal{L} \subset \mathcal{L}\}$ est contenu dans un corps quadratique imaginaire.
Dans ce cas, $\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda\mathcal{L} \subset \mathcal{L}\} \subset \mathbb{Q}\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)$.

Le fait qu'un réseau $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ est à multiplication complexe n'est pas sans lien sur le nombre $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$, la terminologie des points à multiplication complexe étant liée à celle du réseau à multiplication complexe par le lemme suivant :

Lemme : Soit $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau de $\mathbb{C}$.
$\mathcal{L}$ est à multiplication complexe si et seulement si $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ est un point à multiplication complexe.

[1]Voir [9], §4.0.8. p 501.

Démonstration : • Puisque $\mathcal{L}$ est un réseau à multiplication complexe, alors $\mathbb{Q}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ est un corps quadratique imaginaire.

Soit $\mathrm{D} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{Q}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \mathbb{Q}(i\sqrt{\mathrm{D}})$, et notons

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = r + is\sqrt{\mathrm{D}} \text{ pour } (r,s) \in \mathbb{Q}^2. \\ \gamma = \begin{pmatrix} r & ar + \mathrm{D}s^2 \\ -1 & 3r \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Alors : * $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, car $\det \gamma = 3r^2 + |\tau|^2 > 0$.

(Si l'on avait $\det \gamma = 0$*, on aurait* $\tau = 0$*, ce qui n'est pas possible.)*

* γ n'est pas une matrice scalaire.

* $\gamma.\tau = \gamma$ puisque

$$\begin{aligned} \gamma.\tau &= \frac{r(r + is\sqrt{\mathrm{D}}) + \mathrm{R}^2 + \mathrm{D}s^2}{-r - is\sqrt{\mathrm{D}} + 3r} \\ &= \frac{(r + is\sqrt{\mathrm{D}})(r + r - is\sqrt{\mathrm{D}})}{2r - is\sqrt{\mathrm{D}}} \\ &= r + is\sqrt{\mathrm{D}} \\ &= \tau \end{aligned}$$

• Réciproquement, si τ est un point à multiplication complexe, alors il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ telle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\tau = \tau$, ie $c\tau^2 + (d-a)\tau - b = 0$. Donc τ est quadratique.

De plus, on ne peut avoir de relation du type $a\tau + b = 0$, car sinon $\tau \in \mathbb{R} \not\subset \mathcal{H}$. Il en est de même que τ ne peut être quadratique réel.

Ceci veut dire que $\mathcal{L}$ est à multiplication complexe.

□

5.2 Point de départ : un corollaire au théorème de Shimura.

Nous pouvons désormais énoncer et démontrer le théorème de base. Celui ci est bien connu, et admet différents types de démonstrations : une modulaire, une elliptique (voir [1], [4], et [34]) , une cohomologique (voir [1], [9]) .

Nous choisissons ici la démonstration modulaire.

Théorème : Soit $\mathcal{L}$ un réseau de $\mathbb{C}$ à multiplication complexe.
On suppose que $g_4(\mathcal{L})$ et $g_6(\mathcal{L})$ soient algèbriques.
Alors, ${g_2}^*(\mathcal{L})$ est aussi algébrique.

Rappelons que si $\mathcal{L}$ désigne un réseau de $\mathbb{C}$, on note $g_{2k}(\mathcal{L}) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}} \frac{1}{\omega^{2k}}$ pour tout entier k vérifiant $k \geq 2$, ${g_2}^*(\mathcal{L}) = \lim_{s \longrightarrow 0} \sum_{\omega \in \mathcal{L}} \frac{1}{\omega^2 |\omega|^s}$, et que l'on note, pour tout $\tau \in \mathcal{H}$, ${g_2}^*(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau) = {\mathrm{G}_2}^*(\tau)$, $g_4(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau) = 140\mathrm{G}_4(\tau)$ et $g_6(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau) = 60\mathrm{G}_6(\tau)$.

De même rappelons que l'on note le discriminant $\Delta = {\mathrm{G}_4}^3 - 27{\mathrm{G}_6}^2$, et δ son unique fonction de réseau associée, de poids -12, définie par $\delta(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau) = \Delta(\tau)$.

La démonstration se résumera en une application du théorème de Shimura[2]:

[2] Voir p 55.

Démonstration : Notons $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, un réseau de $\mathbb{C}$.

Alors, $\tau = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ est un point de multiplication complexe.

De plus, $\begin{cases} \Delta = {G_4}^3 - 27{G_6}^2 \in S_{12}(SL_2(\mathbb{Z})) \subset \widehat{\mathcal{M}}_{12}(SL_2(\mathbb{Z})) \ . \\ (G_2)^6 \in \widehat{\mathcal{M}}_{12}(SL_2(\mathbb{Z})) \ . \end{cases}$

Ainsi : $\dfrac{({G_2}^*)^6}{\Delta} \in \widehat{\mathcal{A}}_0(SL_2(\mathbb{Z}))$.

Alors, d'après le théorème de Shimura, $\dfrac{{G_2}^*(\tau)^6}{\Delta(\tau)} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Or : $\begin{cases} {g_2}^*(\mathcal{L}) & = & \dfrac{1}{{\omega_1}^2}{G_2}^*(\tau) \\ \\ \Delta(\mathcal{L}) & = & \dfrac{1}{{\omega_1}^{12}}\Delta(\tau) \end{cases}$, d'où $\dfrac{{G_2}^*(\tau)^6}{\Delta(\tau)} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

De plus, par hypothèse, $\Delta(\mathcal{L}) = g_4(\mathcal{L})^3 - 27g_6(\mathcal{L})^2 \in \overline{\mathbb{Q}}$, d'où ${g_2}^*(\mathcal{L})^6 \in \overline{\mathbb{Q}}$.
Ainsi, ${g_2}^*(\mathcal{L}) \in \overline{\mathbb{Q}}$, ce qui termine la démonstration.

□

5.3 L'énoncé du problème posé par N. Katz.

Comme nous l'avons déjà énoncé, Katz s'est posé la question[3] de la réciproque du théorème précédent :

Question : Soit $\mathcal{L}$ un réseau de $\mathbb{C}$ tel que ${g_2}^*(\mathcal{L})$, $g_4(\mathcal{L})$ et $g_6(\mathcal{L})$ soient simultanément algébriques.
Le réseau $\mathcal{L}$ est il nécessairement à multiplication complexe ?

5.4 Lien avec une conjecture de [2].

Ceci pourrait être déduit d'un analogue non - holomorphe au théorème de Schneider sur $(\tau, j(\tau))$[4] :

Conjecture : Soit $f \in \mathcal{A}_0(SL_2(\mathbb{Z}), \overline{\mathbb{Q}})$ non constante.
$g \in \widehat{\mathcal{A}}_0(SL_2(\mathbb{Z}), \overline{\mathbb{Q}})$.
$\tau \in \mathcal{H}$, un point non polaire de f et g.
Si $\big(f(\tau), g(\tau)\big) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$, alors τ est un point de multiplication complexe.

Le théorème de Schneider[5] affirme que si $\tau \in \mathcal{H}$ est tel que $j(\tau) \in \overline{\mathbb{Q}}$, alors τ est algébrique si et seulement si τ est un point de multiplication complexe. Ainsi, si $\tau \in \mathcal{H}$ est un point non polaire d'une fonction modulaire arithmétique relativement à $SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $(\tau, f(\tau)) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$, alors nécessairement τ est un point de multiplication complexe.

[3] Voir [9], §4.0.8. p 501.
[4] Voir [1], conjecture 4.3.
[5] Voir [25], chap. 2, §4, théorème 17 p 63.

En effet, si $f \in \mathcal{A}_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \overline{\mathbb{Q}})$, il existe[6] une fraction rationnelle $\mathrm{F} \in \overline{\mathbb{Q}}(\mathrm{X})$ telle que $f = \mathrm{F} \circ j$. Notons $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ avec $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathrm{X}]^2$ et $\mathrm{P.G.C.D.}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 1$.

Alors, puisque $f(\tau) \in \overline{\mathbb{Q}}$, il existe $(a_i)_{i \in [\![0\,;\,\mathrm{N}]\!]} \in \mathbb{Q}^{\mathrm{N}+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} a_i \frac{\mathrm{P}(j(\tau))^i}{\mathrm{Q}(j(\tau))^i} = 0$, où $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Alors, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} a_i \mathrm{P}(j(\tau))^i \mathrm{Q}(j(\tau))^{\mathrm{N}-i} = 0$. Ainsi : $\exists \widetilde{\mathrm{P}} \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathrm{X}]$, $\widetilde{\mathrm{P}}(j(\tau)) = 0$, d'où $j(\tau) \in \overline{\mathbb{Q}}$, et $(\tau, j(\tau)) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$.

D'après le théorème de Schneider, τ est nécessairement un point de multiplication complexe.

Cette conjecture sur $(f(\tau), g(\tau))$ généralise donc bien le cas de $(\tau, j(\tau))$.

Nous avons maintenant le fait suivant :

Proproposition : La conjecture est équivalente à une réponse positive à la question posée par N. Katz.

Démonstration : • Supposons la conjecture vraie.

Soit $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau de $\mathbb{C}$ et $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$.

$$\text{Supposons que} \begin{cases} {g_2}^*(\mathcal{L}) & = \dfrac{1}{\omega_1^2}{\mathrm{G}_2}^*(\tau) & \in \overline{\mathbb{Q}}\,. \\[2ex] g_4(\mathcal{L}) & = \dfrac{1}{\omega_1^4}\mathrm{G}_4(\tau) & \in \overline{\mathbb{Q}}\,. \\[2ex] g_6(\mathcal{L}) & = \dfrac{1}{\omega_1^6}\mathrm{G}_6(\tau) & \in \overline{\mathbb{Q}}\,. \end{cases}$$

$$\text{Alors,} \begin{cases} j = \dfrac{1728{\mathrm{G}_4}^3}{{\mathrm{G}_4}^3 - 27{\mathrm{G}_6}^2} \in \mathcal{A}_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \\[2ex] g = \dfrac{({\mathrm{G}_2}^*)^6}{\Delta} \in \widehat{\mathcal{A}}_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} j(\tau) = \dfrac{1728(g_4(\mathcal{L}))^3}{\delta(\mathcal{L})} \in \overline{\mathbb{Q}}. \\[2ex] g(\tau) = \dfrac{{g_2}^*(\mathcal{L})^6}{\delta(\mathcal{L})} \in \overline{\mathbb{Q}}. \end{cases}$$

D'après la conjecture, τ serait un point à multiplication complexe, ce qui impliquerait que le réseau $\mathcal{L}$ le serait aussi nécessairement.

Ainsi, si la conjecture est vraie, on pourrait répondre positivement à la question posée par N. Katz.

• Supposons que la réponse à la question posée par N. Katz soit positive.

Soit $f \in \mathcal{A}_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \overline{\mathbb{Q}})$.
$g \in \widehat{\mathcal{A}}_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \overline{\mathbb{Q}})$.
$\tau \in \mathcal{H}$.

On suppose que $(f(\tau), g(\tau)) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$.

[6] Voir [26], chap. 7, §3.4, p 146.

On sait[7] qu'il existe $\mathrm{F} \in \overline{\mathbb{Q}}(x)$ et $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}]^2$ tels que $\begin{cases} f = \mathrm{F}\circ j \\ g = \dfrac{\mathrm{P}({\mathrm{G}_2}^*,\mathrm{G}_4,\mathrm{G}_6)}{\mathrm{Q}({\mathrm{G}_2}^*,\mathrm{G}_4,\mathrm{G}_6)} \end{cases}$, où P et Q sont de la forme $\displaystyle\sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3 \\ 2i+4j+6k=d}} a_{i,j,k}\mathrm{X}^i\mathrm{Y}^j\mathrm{Z}^k$, pour un certain $d \in \mathbb{N}$.

Par un argument similaire à celui de la page 72, on en déduit : $\begin{cases} j(\tau)\in\overline{\mathbb{Q}}. \\ \exists \mathrm{U}\in\mathbb{Q}[\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}],\ \mathrm{U}\big({\mathrm{G}_2}^*(\tau),\mathrm{G}_4(\tau),\mathrm{G}_6(\tau)\big)=0. \end{cases}$

Notons désormais $q = e^{2i\pi\tau}$, $\Delta(q) = q\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^{24}$, $\omega_1 = 2\pi\Delta(q)^{\frac{1}{12}}$ et $\omega_2 = \tau\omega_1$, où $\Delta(q)^{\frac{1}{12}}$ est une racine douxième quelconque de $\Delta(q)$. Notons aussi $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\omega_1\oplus\mathbb{Z}\omega_2$.

Ainsi, $\begin{cases} g_4(\mathcal{L}) = \dfrac{1}{{\omega_1}^4}\mathrm{G}_4(\tau). \\ \\ g_6(\mathcal{L}) = \dfrac{1}{{\omega_1}^6}\mathrm{G}_6(\tau). \end{cases}$

On a[8] $\begin{cases} 60^3 g_4(\mathcal{L})^3 - 27\times 140^2 g_6(\mathcal{L})^2 = 1. \\ 1728\times 60^3 g_4(\mathcal{L})^3 = j(\tau)\in\overline{\mathbb{Q}}. \end{cases}$

Donc, $g_4(\mathcal{L})^3\in\overline{\mathbb{Q}}$, et donc aussi d'après la dernière relation, $g_6(\mathcal{L})^3\in\overline{\mathbb{Q}}$.

Or $\dfrac{\mathrm{P}\left(\dfrac{{\mathrm{G}_2}^*}{{\omega_1}^2},\dfrac{\mathrm{G}_4}{{\omega_1}^4},\dfrac{\mathrm{G}_6}{{\omega_1}^6}\right)}{\mathrm{Q}\left(\dfrac{{\mathrm{G}_2}^*}{{\omega_1}^2},\dfrac{\mathrm{G}_4}{{\omega_1}^4},\dfrac{\mathrm{G}_6}{{\omega_1}^6}\right)} = \dfrac{\mathrm{P}({\mathrm{G}_2}^*,\mathrm{G}_4,\mathrm{G}_6)}{\mathrm{Q}({\mathrm{G}_2}^*,\mathrm{G}_4,\mathrm{G}_6)}$, d'où $\dfrac{\mathrm{P}({g_2}^*(\mathcal{L}),g_4(\mathcal{L}),g_6(\mathcal{L}))}{\mathrm{Q}({g_2}^*(\mathcal{L}),g_4(\mathcal{L}),g_6(\mathcal{L}))} = 0.$
Donc, il existe $\mathrm{U}\in\overline{\mathbb{Q}}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{U}({g_2}^*(\mathcal{L}) = 0$, ie ${g_2}^*(\mathcal{L})\in\overline{\mathbb{Q}}$.

On a donc construit un réseau $\mathcal{L}$ vérifiant $({g_2}^*(\mathcal{L}),g_4(\mathcal{L}),g_6(\mathcal{L})) \in \overline{\mathbb{Q}}^3$. La réponse à la question posée par N. Katz impose alors que le résau $\mathcal{L}$ serait à multiplication complexe, donc que τ serait lui aussi à multiplication complexe ; ce qui démontrerait la conjecture.

□

5.5 Intérêt du problème de Katz.

Ce problème de Katz n'est pas simplement une conséquence d'une conjecture analogue au théorème de Schneider sur $(\tau, j(\tau))$: ce problème a aussi une interprétation cohomologique.

De manière générale, à une courbe algébrique $\mathrm{E}/\overline{\mathbb{Q}}$, on associe le premier groupe de cohomologie de De Rham, noté $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{E}/\overline{\mathbb{Q}})$. On sait qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension $2g$, où $g\in\mathbb{N}^*$ est le genre de la courbe.

---

[7] Voir, pour l'existence de F : [26], chap. 7, §3.4, p 146. Voir, pour l'existence de $\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$, p 49.

[8] Voir, [32], p 824 − 2, 824 − 3.

Désormais, E désignera une courbe elliptique de réseau de périodes $\mathcal{L} = \mathrm{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$.

Dans ce cas, $g = 1$. En notant alors ω (resp. η) la classe de cohomologie de $\dfrac{dx}{y}$ (resp. $\dfrac{xdx}{y}$), on sait que (ω, η) est une base standard de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{E}/\mathbb{C})$.

Rappelons que si $\xi \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{E}/\mathbb{C})$, ξ est invariant par translation d'une période de E ; d'où si l est une période de E, $z \longmapsto \displaystyle\int_z^{z+l} \xi$ est constante. Alors, la classe de cohomologie de $\xi \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{E}/\mathbb{C})$ est donnée par $l \longmapsto \displaystyle\int_0^l \xi$.

Rappelons aussi que l'on peut définir un produit scalaire $< .,. >_{\mathrm{DR}}$, dit de De Rham, sur $\mathrm{H}^1(\mathrm{E}, \mathbb{C})$ par : $\forall(\xi_1, \xi_2) \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{E}/\mathbb{C})^2$, $< \xi_1, \xi_2 >_{\mathrm{DR}} = \dfrac{1}{2\pi} \begin{vmatrix} \displaystyle\int_0^{\omega_1} \xi_1 & \displaystyle\int_0^{\omega_2} \xi_1 \\ \displaystyle\int_0^{\omega_1} \xi_2 & \displaystyle\int_0^{\omega_2} \xi_2 \end{vmatrix}$

On a alors la propriété suivante qui est à la base de l'interprétation cohomologique du problème de Katz :

Propriété : Soit $\tau \in \mathcal{H}$.
$\mathcal{L} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$, un réseau de $\mathbb{C}$.
Alors, $\mathrm{G_2}^*(\tau) = -\dfrac{< \overline{\omega}, \eta >_{\mathrm{DR}}}{< \overline{\omega}, \omega >_{\mathrm{DR}}}$.

Démonstration : Notons qu'ici $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \tau$. Notons aussi $\overline{\omega} = a\omega + b\eta$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Alors : $2i\pi < \overline{\omega}, \omega >_{\mathrm{DR}} = \begin{vmatrix} \overline{\omega_1} & \overline{\omega_2} \\ \omega_1 & \omega_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \overline{\tau} \\ 1 & \tau \end{vmatrix} = \tau - \overline{\tau} = 2i\Im m\ \tau$.

$$2i\pi < \overline{\omega}, \eta >_{\mathrm{DR}} = \begin{vmatrix} \overline{\omega_1} & \overline{\omega_2} \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \overline{\tau} \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = \eta_2 - \overline{\tau}\eta_1.$$

Or, d'après la relation de Legendre, $\eta_2 - \tau\eta_1 = 2i\pi$, d'où $\eta_2 = 2i\pi + \tau\eta_1$, et $2i\pi < \overline{\omega}, \eta >_{\mathrm{DR}} = 2i\pi + \tau\eta_1 - \overline{\tau}\eta_1 = 2i\pi + 2i\eta_1\Im m\ \tau$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc,}\quad \frac{< \overline{\omega}, \eta >_{\mathrm{DR}}}{< \overline{\omega}, \omega >_{\mathrm{DR}}} &= \eta_1 + \frac{\pi}{\Im m\ \tau} \\
&= -g_2(\mathcal{L}) + \frac{\pi}{\Im m\ \tau} \\
&= -\mathrm{G}_2(\tau) + \frac{\pi}{\Im m\ \tau} \\
&= -\mathrm{G_2}^*(\tau).
\end{aligned}$$

□

Notons $\mathrm{H}^{1,0}(\mathrm{E}/\mathbb{C})$ l'ensemble des formes différentielles holomorphes de seconde espèce, et $\mathrm{H}^{0,1}(\mathrm{E}/\mathbb{C})$ l'ensemble des formes différentielles antiholomorphes de seconde espèce.

Propriété : Supposons que $\mathcal{L} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$, où $\tau \in \mathcal{H}$.
Si $\overline{\omega} = a\omega + b\eta$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, alors $\dfrac{a}{b} = -\dfrac{< \overline{\omega}, \eta >_{\mathrm{DR}}}{< \overline{\omega}, \omega >_{\mathrm{DR}}} = \mathrm{G}_2{}^*(\tau)$.

Démonstration : On a :

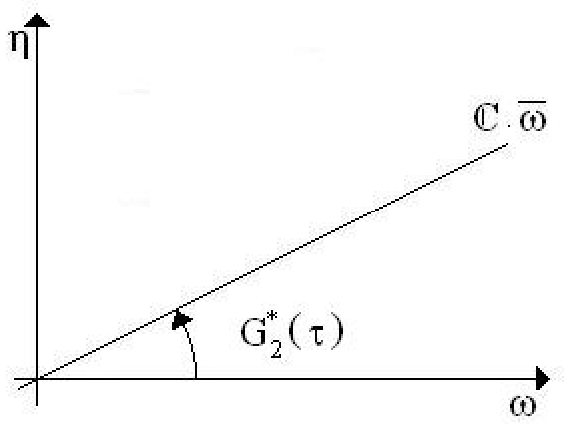
$$\begin{aligned} < \overline{\omega}, \omega >_{\mathrm{DR}} &= a < \omega, \omega >_{\mathrm{DR}} + b < \eta, \omega >_{\mathrm{DR}} \\ &= -b\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < \overline{\omega}, \eta >_{\mathrm{DR}} &= a < \omega, \eta >_{\mathrm{DR}} + b < \eta, \eta >_{\mathrm{DR}} \\ &= a\ . \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{a}{b} = -\dfrac{< \overline{\omega}, \eta >_{\mathrm{DR}}}{< \overline{\omega}, \omega >_{\mathrm{DR}}}$. La propriété précédente permet de conclure.

□

Le rapport $\dfrac{a}{b}$ précédent mesure l'angle entre ω et la droite $\mathbb{C}.\overline{\omega} \subset \mathrm{H}^{0,1}$, d'où la figure suivante, si $\tau \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{H} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$:



On peut étendre $\overline{\mathbb{Q}}$ à $\mathbb{C}$. Notons $\mathrm{H}_{1,\mathrm{B}}(\mathrm{E}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ le premier groupe de cohomologie de Betti. Alors; l'application $\Gamma : \mathrm{H}_{1,\mathrm{B}}(\mathrm{E}(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{E}^{an}/\mathbb{C})$ définie par $\gamma \longmapsto \Gamma_\gamma$ où $\Gamma_\gamma : \omega \longmapsto \displaystyle\int_\gamma \omega$ réalise un isomorphisme : $\mathrm{H}_{1,\mathrm{B}}(\mathrm{E}(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{E}^{an}/\mathbb{C})$.

Ainsi, on a la décomposition suivante, dite de Hodge :

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{E}^{an}/\mathbb{C}) = \mathrm{H}^{1,0}(\mathrm{E}/\mathbb{C}) \oplus \mathrm{H}^{0,1}(\mathrm{E}/\mathbb{C}).$$

La proposition précédente exprime qu'étant donné un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, la décomposition de Hodge est scindée sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si E est à multiplication complexe, c'est à dire si le réseau $\mathcal{L}$ est à multiplication complexe.

Une réponse positive à la question posée par N. Katz permettrait d'énoncer :
« *Si* E *est une courbe elliptique définie sur* $\overline{\mathbb{Q}}$, *et si la décomposition de Hodge de* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{E}^{an}/\mathbb{C})$ *se scinde sur* $\overline{\mathbb{Q}}$, *alors* E *est à multiplication complexe.* »

5.6 Où se trouve la difficulté dans ce problème ?

5.6.1 Schématisation d'une démonstration de transcendance.

Dans une démonstration de transcendance, on considère souvent des fonctions $f_1, \cdots, f_s$ analytiques sur $\mathbb{C}^s$; on veut montrer que ces fonctions ne prennent pas toutes des valeurs algébriques en un point α, ou bien on cherche une minoration de $\operatorname{degtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\Big(f_1(\alpha), \cdots, f_s(\alpha)\Big)$.

La démonstration se shématise[9] souvent en cinq étapes.

Premier pas : Construction d'une fonction auxiliaire.

On cherche à construire une fonction A définie par $\mathrm{A}(z) = \mathrm{P}\big(f_1(z), \cdots, f_s(z)\big)$, où $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_s]$ est un polynôme dont le degré est au plus égal à un paramètre $\mathrm{D} \in \mathbb{N}$ choisi suffisamment grand, et dont la taille est majorée par $\sigma(\mathrm{D})$.

Second pas : Utilisation d'un lemme de Schwarz.

Les lemmes de Schwarz peuvent être interprétés comme une amélioration du principe du maximum. En dimension 1, cela s'énonce typiquement comme suit : *si la fonction* A *admet* ω *zéros, comptés avec multiplicités, dans le disque* $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$, *on a alors* $\sup\limits_{|z|\leq r} |\mathrm{A}(z)| = \left(\dfrac{2r}{\mathrm{R}-r}\right)^{\omega} \sup\limits_{|z|=\mathrm{R}} |\mathrm{A}(z)|$, *où* $(r, \mathrm{R}) \in {\mathbb{R}_+}^2$ *sont tels que* $r < \mathrm{R}$.

Ainsi, en utilisant le fait que A a un «grand» nombres de zéros, on obtient une majoration montrant que A est «petit» sur une boule de taille raisonnable :

$$\text{il existe une fonction positive } \varepsilon, \text{ qui vérifie } \varepsilon(\mathrm{D}) \underset{\mathrm{D}\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{et } r(\mathrm{D}) \in \mathbb{R}_*^+ \text{ tel que } \sup_{|z|\leq r} |\mathrm{A}(z)| \leq \varepsilon(\mathrm{D}) \text{ pour } r \geq r(\mathrm{D}).$$

Troisième pas : Lemme de zéros.

Supposons que l'on soit en présence d'équations différentielles, de formules d'addition ou d'équations fonctionnelles. A ces relations, on associe une infinité d'opérateurs $\mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_\mathrm{M}, \cdots$ de $\mathrm{Z}[\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_s]$ dans lui-même, permettant un contrôle du degré et de la taille des polynômes $\mathrm{T}_1(\mathrm{P}), \cdots, \mathrm{T}_\mathrm{M}(\mathrm{P})$ en fonction du paramètre D.

Un lemme de zéros consiste à montrer que la variété des zéros de $\widetilde{\mathrm{I}} = \Big(\mathrm{T}_1(\mathrm{P}), \ldots, \mathrm{T}_\mathrm{M}(\mathrm{P})\Big)$ dans $\mathbb{C}^s$ est petite, ou tout au moins que le point $\omega = \big(f_1(\alpha), \cdots, f_s(\alpha)\big)$ n'est pas un zéro de $\widetilde{\mathrm{I}}$.

[9] Voir [3], chap. 1, §3, p 11 - 13.

Quatrième pas : Comparaison de $\varepsilon(\mathrm{D})$ et $\sigma(\mathrm{D})$.

On suppose que les opérateurs $\mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_\mathrm{M}$ aient une interprétation analytique, c'est à dire que pour $i \in [\![1 ; \mathrm{M}]\!]$, il existe un multi-indice $t_i \in \mathbb{N}^n$ et $z_i = z_i(\alpha)$ tels que $\begin{cases} |z_i| \leq r(\mathrm{D}). \\ \mathrm{T}_i(\mathrm{P})(\omega) = \dfrac{\partial^{|t_i|}}{\partial z^{t_i}} \mathrm{A}(z_i). \end{cases}$

Ces conditions montrent essentiellement qu'on a $|\mathrm{T}_i(\mathrm{P})(\omega)| \leq \varepsilon(\mathrm{D})$, et que les polynômes $\mathrm{T}_i(\mathrm{P})$ ont des coefficients entiers, majorés en valeurs absolue par $\sigma(\mathrm{D})$, et des degrés bornés par $\delta(\mathrm{D})$.

Lorsque $\mathrm{degtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\omega) = 0$, on obtient l'inégalité $\varepsilon(\mathrm{D}) \geq \dfrac{1}{\sigma(\mathrm{D})}$.
Lorsque $\mathrm{degtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\omega) \neq 0$, on peut obtenir une inégalité liant $\varepsilon(\mathrm{D})$, $\sigma(\mathrm{D})$ et $\delta(\mathrm{D})$.

Cinquième pas : Conclusion.

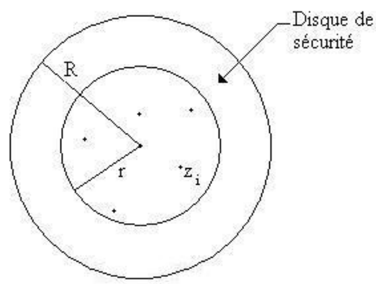
On cherche à montrer une minoration de $d = \mathrm{degtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\omega)$.
On suppose qu'elle n'a pas lieu, et on espère que cela contredit l'inégalité obtenue au quatrième pas...

5.6.2 Quelques pistes pour le problème de Katz.

Comme nous venons de l'expliquer dans la schématisation précédente, l'holomorphie est un phénomêne très important pour l'application d'un lemme de Schwarz.

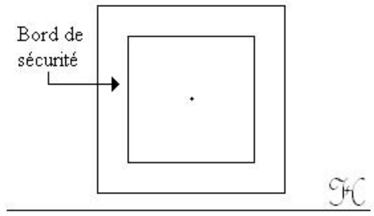
Ainsi, dans le cas de ce problème de Katz, l'absence d'holomorphie invite à modifier l'énoncé de ces lemmes.

Pour démontrer celui énoncé juste au dessus, dans le second pas, on applique le principe du maximum à la fonction $z \longmapsto \dfrac{f(z)}{\prod_{i \in \mathrm{I}} (z - z_i)}$ où $\{z_i ; i \in \mathrm{I}\}$ est l'ensemble des zéros de f dans le disque $\{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq r\}$, sur les deux disques ci-contre.



On pourrait alors essayer de considérer la fonction $z \longmapsto \dfrac{f(z)}{\prod_{i \in \mathrm{I}} (\overline{z} - \overline{z_i})}$, et observer ce que l'on obtient.

Par ailleurs, dans ce lemme, on obtient une majoration où le terme $\dfrac{r}{r-\mathrm{R}}$ apparait. Mais, on aimerait se ramener au terme $\dfrac{r}{\mathrm{R}}$. Cela pourrait être intéressant de modifier la couronne circulaire en une couronne carrée du type de celle ci-contre, munie de la métrique hyperbolique.



Il ne s'agit que de pistes pour adapter les lemmes de Schwarz en absence d'holomorphie : celle ci peuvent tout à fait n'aboutir à aucun résultat concluant.

Formes modulaires, théorie de Eichler-Shimura et équations différentielles.

La théorie de Eichler-Shimura[1] est similaire au travail effectué autour de l'opérateur D_p^k introduit par Shimura. Cet opérateur est une succession de «dérivations».

La théorie de Eichler-Shimura, elle, considère des intégrales itérées et s'explique succintement comme suit : *si l'on intègre successivement k fois, pour un entier $k \in \mathbb{N}$, une forme modulaire f pour un sous-groupe de congruence de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *de poids $-k$, on peut espérer obtenir une nouvelle forme modulaire de poids $+k$. Pour réaliser cela, il y a une et une seule façon de fixer les constantes d'intégrations : les choisir égales aux périodes de la forme modulaire f considérée, c'est - à - dire aux nombres $\displaystyle\int_0^{i\infty} f(z)z^i\ dz$ pour $i \in [\![\, 0\,;\, k\,]\!]$.* (Voir [11].)

Cela reflète une équation différentielle linéaire satisfaite par f.

Nous savons que les formes modulaires classiques arithmétiques vérifient des équations différentielles non linéaires. Nous commencerons par le rappeler, puis, dans un second temps, nous établirons qu'une forme modulaire classique arithmétique vérifie aussi une équation différentielle linéaire.

6.1 Equation différentielle non linéaire.

En itérant la formule (3.1), on vérifie[2] aisément qu'une forme modulaire classique de poids $k \in \mathbb{Z}$ vérifie une équation différentielle d'ordre 3.

Nous avons le même résultat concernant les formes quasi - modulaires ou les formes modulaires presques holomorphes ; pour cela nous suivrons les pas de F. Martin et E. Royer[3]!

Propriété : Soit f une forme quasi - modulaire (resp. forme modulaire presque holomorphe) sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids $k \in \mathbb{Z}$.
Alors, f, f', f'', f''' (resp f, $\mathrm{D}_k^1\ f$, $\mathrm{D}_k^2\ f$, $\mathrm{D}_k^3\ f$), sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, où $' = \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{d}{dz}$ et D_k^s est l'opérateur introduit par Shimura défini page 53.

[1]Voir [27], chap. 17.
[2]Voir [1].
[3]Voir [15], chap. 17, lemme 127.

Démonstration : • On a vu[4] que $\widehat{\mathcal{M}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[\mathrm{E}_2;\mathrm{E}_4;\mathrm{E}_6]$, et $\mathbb{C}[\mathrm{E}_2;\mathrm{E}_4;\mathrm{E}_6]$ est un corps de degré de transcendance 3. Donc les fonctions f, f', f'', f''' sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}$.

• Le cas de $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[\mathrm{E}_2{}^*;\mathrm{E}_4;\mathrm{E}_6]$ est identique.

□

6.2 Equation différentielle linéaire.

Dans le cas des formes modulaires, nous allons voir que toute forme modulaire classique de poids $k \in \mathbb{Z}$ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre $k+1$. Pour cela, nous suivrons encore l'exposé de F. Martin et E. Royer[5]. (Voir aussi [12], fait 1 p 783.)

Théorème : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$t \in \mathcal{A}_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.
$f \in \mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.
Alors, la fonction définie localement au voisinage de tout point $z_0 \in \mathcal{H}$ par $\mathrm{F}(t(z)) = f(z)$ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre $k+1$ à coefficients algébriques.

Nous utiliserons au cours de la démonstration la notion de **puissance symétrique d'un endomorphisme** [6]:

Soit $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$, de base canonique notée (e_1, e_2).
Alors, l'algèbre symétrique $\mathrm{S}(\mathrm{V})$ de $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ est l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle $\mathrm{T}(\mathrm{V}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{V}^{\otimes n}$ par l'idéal engendré par les éléments $x\otimes y - y\otimes x$ où $(x,y) \in \mathrm{V}^2$.
On note $x_1 \odot \cdots \odot x_n$ l'image de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \mathrm{T}(\mathrm{V})$ dans $\mathrm{S}(\mathrm{V})$.
En notant aussi $\mathrm{S}^k(\mathrm{V})$ l'ensemble des éléments de degré k de $\mathrm{S}(\mathrm{V})$, et $\mathrm{S}(u) : \mathrm{S}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{S}(\mathrm{V})$ l'unique homomorphisme d'algèbre graduée vérifiant $\mathrm{S}(u)\circ\Phi = \Phi\circ u$, nous pouvons définir la $k^{\text{ième}}$ puissance symétrique de l'endomorphisme u, noté $\mathrm{S}^k(u)$ et défini par $\mathrm{S}^k(u) = \mathrm{S}(u)_{|\mathrm{S}^k(\mathrm{V})}$.
Matriciellement, on sait que si $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ représente un endomorphisme de V, alors $\mathrm{S}^k(\gamma) \in \mathrm{SL}_{k+1}(\mathbb{R})$.

Nous pouvons désormais démontrer le théorème :

Démonstration : Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{k+1} \\ z & \longmapsto & f(z)\begin{pmatrix} z^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$.

[4] cf p 49.
[5] Voir [15], chap. 19, théorème 139.
[6] Voir N. Bourbaki : *Eléments de mathématiques*, *Algèbre, chap.* 1 *à* 3, chap. 3, §3.

• Montrons que $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\exists \mathrm{S}^k(\gamma) \in \mathrm{SL}_{k+1}(\mathbb{Z})$, $\Phi(\gamma.z) = \mathrm{S}^k(\gamma)\Phi(z)$.

On a : $\Phi(\gamma.z) = (cz+d)^k f(z) \begin{pmatrix} (\gamma.z)^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = f(z) \begin{pmatrix} (az+b)^k \\ (az+b)^{k-1}(cz+d) \\ \vdots \\ (az+b)(cz+d)^{k-1} \\ (cz+d)^k \end{pmatrix}$
pour tout $z \in \mathcal{H}$, d'où : $\exists \mathrm{S}^k(\gamma)$, $\Phi(\gamma.z) = \mathrm{S}^k(\gamma)\Phi(z)$.

$\mathrm{S}^k(\gamma)$ est la k-ième puissance symétrique de γ, et est définie ainsi : $\forall (i,j) \in [\![1\,;\,k+1]\!]^2$, $\left(\mathrm{S}^k(\gamma)\right)_{i,j}$ est le coefficient du terme de degré $k+1-j$ du polynôme $(a\mathrm{X}+b)^{k+1-i}(c\mathrm{X}+d)^{i-1}$, et vérifie $\det \mathrm{S}^k(\gamma) = 1$.

• Soit $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Montrons, par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, que $(\theta^i\Phi)(\gamma.z) = \mathrm{S}^k(\gamma)(\theta^i\Phi)(z)$, où θ est défini par $\theta = \dfrac{1}{t'}\dfrac{d}{dz}$.

Soit $z \in \mathcal{H}$ tel que $t'(z) \neq 0$.

Alors, en dérivant les relations $\left\{ \begin{array}{lcl} \Phi(\gamma.z) & = & \mathrm{S}^k(\gamma)\Phi(z) \\ t(\gamma.z) & = & t(z) \end{array} \right.$, on obtient $\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{1}{(cz+d)^2}\Phi'(\gamma.z) & = & \mathrm{S}^k(\gamma)\Phi'(z)\ . \\ \dfrac{1}{(cz+d)^2}t'(\gamma.z) & = & t'(z)\ . \end{array} \right.$

Donc $\dfrac{\Phi'(\gamma.z)}{t'(\gamma.z)} = \mathrm{S}^k(\gamma)\dfrac{\Phi'(z)}{t'(z)}$, ce que l'on note aussi $(\theta\ \Phi)(\gamma.z) = \mathrm{S}^k(\gamma)(\theta\ \Phi)(z)$.

Supposons le résultat établi au rang i.

Alors, par dérivation de l'hypothèse de récurrence au rang i, on a : $\dfrac{1}{(cz+d)^2}(\theta^i\ \Phi)'(\gamma.z) = \mathrm{S}^k(\gamma)(\theta^i\ \Phi)'(z)$. Ainsi, d'après les relations précédentes $\dfrac{1}{t'(\gamma.z)}(\theta^i\ \Phi)'(\gamma.z) = \mathrm{S}^k(\gamma) \times \dfrac{1}{t'(z)}(\theta^i\ \Phi)'(z)$, ie $(\theta^{i+1}\ \Phi)(\gamma.z) = \mathrm{S}^k(\gamma)(\theta^{i+1}\ \Phi)(z)$, ce qui démontre l'hérédité de l'hypothèse de récurrence.
La propriété est donc vérifiée pour tout $i \in \mathbb{N}$.

• Soit, pour tout $z \in \mathcal{H}$ vérifiant $t'(z) \neq 0$, la matrice $\mathrm{M}(z)$ définie par bloc par

$$\mathrm{M}(z) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \Phi(z) & (\theta\ \Phi)(z) & \cdots & (\theta^{k+1}\ \Phi)(z) \\ \hline f(z) & (\theta\ f)(z) & \cdots & (\theta^{k+1}\ f)(z) \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{k+2}(\mathbb{C})$$

Montrons que, pour $i \in [\![1\,;\,k+2]\!]$, les fonctions $z \longmapsto \det\ \mathrm{M}_{k+2,i}(z)$, où $\mathrm{M}_{k+2,i}$ est le cofacteur $(k+2,i)$ de $\mathrm{M}(z)$, sont des fonctions algébriques de t.

Pour cela; il suffit de montrer que : $\forall i \in [\![1\,;\,k+2]\!]$, $\det\ \mathrm{M}_{k+2,i} \in \mathcal{A}_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$. En effet, $\det\ \mathrm{M}_{k+2,i}$ sera alors une fraction rationnelle en l'invariant modulaire j, tout comme t, ce qui permet de conclure.

Or : $\forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\exists \mathrm{S}^k(\gamma) \in \mathrm{SL}_{k+1}(\mathbb{Z})$, $\forall z \in \mathcal{H}$, $t'(z) \neq 0$, $\forall i \in [\![0\,;\,k+1]\!]$, $(\theta^i\ \Phi)(\gamma.z) = \mathrm{S}^k(\gamma)(\theta^i\ \Phi)(z)$, d'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{k+2,i}(\gamma.z) &= (-1)^i \Big(\ \Phi(\gamma.z) \quad (\theta \ Phi)(\gamma.z) \quad \cdots \quad (\theta^{k+1} \ \Phi)(\gamma.z) \ \Big) \\
&= (-1)^i \mathrm{S}^k(\gamma) \Big(\ \mathrm{S}^k(\gamma)\Phi(z) \quad \mathrm{S}^k(\gamma)(\theta \ Phi)(z) \quad \cdots \quad \mathrm{S}^k(\gamma)(\theta^{k+1} \ \Phi)(z) \ \Big) \\
&= (-1)^i \mathrm{S}^k(\gamma) \Big(\ \Phi(z) \quad (\theta \ Phi)(z) \quad \cdots \quad (\theta^{k+1} \ \Phi)(z) \ \Big) \\
&= \mathrm{S}^k(\gamma)\mathrm{M}_{k+2,i}(z)
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\mathrm{S}^k(\gamma) \in \mathrm{SL}_{k+1}(\mathbb{Z})$, $\forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\forall i \in [\![\, 0\,;\, k+1 \,]\!]$, $\forall z \in \mathcal{H}$, $t'(z) \neq 0$, $\det \ \mathrm{M}_{k+2,i}(\gamma.z) = \det \ \mathrm{M}_{k+2,i}(z)$.

Par conséquent, pour tout $i \in [\![\, 0\,;\, k+1 \,]\!]$, il existe une fonction algébrique a_i telle que $\det \ \mathrm{M}_{k+2,i} = a_i \circ t$.

• Soit $z_0 \in \mathcal{H}$.

Si a_{k+1} est non identiquement nulle au voisinage de z_0, alors, par développement suivant la dernière ligne de $\mathrm{M}(z)$, puisque ses deux dernières lignes sont identiques, $\det \ \mathrm{M}(z) = 0 = \sum_{i=0}^{k+1} (\theta^i \ f)(z) \det \mathrm{M}_{k+2,i}(z)$, d'où le résultat puisque $(\theta \ f) = \mathrm{F}'$.

Dans le cas contraire, la famille de fonctions Φ, $\theta \ \Phi$, $\cdots$, $\theta^k \ \Phi$ est liée au voisinage de z_0, ce qui donne aussi le résultat, et complète la démonstration.

□

Remarquons qu'il n'est pas gratuit de considérer la fonction Φ, puisqu'une fois intégrée entre 0 et $i\infty$, celle ci fournit exactement les périodes de la forme modulaire considérée. Ceci conforte ce qui a été dit au préambule de ce chapitre.

Enfin, pour terminer ce chapitre, voici un lien entre la théorie des périodes de Zagier et Kontsevich, et celle des équations différentielles linéaires. Commençons par donner la définition d'une période :

Définition : Une période est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de fonctions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbb{R}^n$ décrit par des inégalités polynomiales à coefficients rationnels.

Notation : Nous noterons $\mathbb{P}$ l'ensemble des périodes.

Voici donc le théorème prouvé par Konsevitch et Zagier[7], que nous ne prouverons pas:

Théorème : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$f \in \mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \overline{\mathbb{Q}})$.
$t \in \mathcal{A}_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \overline{\mathbb{Q}})$.
Alors : $\forall z_0 \in \mathcal{H}$, $t(z_0) \in \overline{\mathbb{Q}} \Longrightarrow \pi^k f(z_0) \in \mathbb{P}$.

[7]Voir [12], fait n°2 p 785.

Conclusion.

Comme souhaité, nous avons effectué un tour d'horizon dans le monde modulaire et modulaire presque holomorphe : nous avons donc étudié la fonction $\mathrm{G}_2{}^*$ et démontré un corollaire au théorème de Shimura : « *si* $\mathrm{L} \subset \mathbb{C}$ *est un réseau à multiplication complexe tel que les quantités* $\mathrm{G}_4(\mathrm{L})$ *et* $\mathrm{G}_6(\mathrm{L})$ *soient algébriques, alors* $\mathrm{G}_2{}^*(\mathrm{L}) \in \overline{\mathbb{Q}}$ » , dans le but de s'intéresser à un problème posé par N. Katz.

Comme nous l'avons vu, ce problème de Katz, est intéressant, puisqu'il s'agit d'un analogue au second problème de Schneider (via l'équivalence que l'on a montré avec la conjecture de la page 71), qu'il a aussi une interprétation cohomologique (via la décomposition de Hodge) et surtout qu'il est toujours ouvert.

Néanmoins, pour ce qui est de la problématique que cette question soulève, ainsi que de la difficulté à y répondre, nous n'en sommes resté qu'au niveau de l'état des lieux. L'approche elliptique ne semble pas aboutir ; on va donc être probablement conduit à aborder le problème de manière modulaire : l'extension de méthodes de transcendance aux valeurs de formes modulaires presque holomorphes sera alors certainement nécessaire.

Annexe.

Fonctions elliptiques.

Définition : Une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est dite **elliptique** si :
• f est méromorphe sur $\mathbb{C}$.
• il existe un réseau Λ de $\mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall \omega \in \Lambda$, $f(z+\omega) = f(z)$.
Le réseau Λ s'appelle alors le **réseau de périodes** de la fonction elliptique f.
On dira aussi que f est une **fonction elliptique de réseau Λ** si le contexte le nécéssite.

Remarque : L'ensemble des fonctions elliptiques de réseau Λ est un corps.

Notation : Etant donnés $(\omega_1, \omega_2, \alpha) \in \mathbb{C}^2$, on appelle un **parallélogramme fondamental** l'ensemble $\Pi_{\omega_1,\omega_2} = \Big\{\alpha + t_1\omega_1 + t_2\omega_2; (t_1, t_2) \in [0; 1[^2\Big\}$.
On pourra le noter Π lorsqu'aucune confusion n'est possible.

Dans tout le reste de cette annexe, ω_1 et ω_2 désigneront deux nombres complexes $\mathbb{R}$ - linéairement indépendants, et nous leurs associeront le réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, ainsi qu'un parallélogramme fondamental Π.

A.1 Théorèmes de Liouville.

Dans tout ce paragraphe, f désignera une fonction elliptique de réseau de période Λ.

Théorème : *(Premier théorème de Liouville.)*
Toute fonction elliptique entière est constante.

Théorème : *(Second théorème de Liouville.)*
Si f n'admet pas de pôles sur la frontière de Π, alors la somme des résidus de f dans Π est nulle.

Remarquons qu'alors, une fonction elliptique non constante a au moins deux pôles dans un parallélogramme fondamental.

Théorème : *(Troisième théorème de Liouville.)*
Supposons que f n'admette ni pôles, ni zéros sur la frontière de Π.
Notons : $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ les pôles et zéros de f à l'intérieur de Π.
p_i (resp z_i) la multiplicité du pôle (resp. zéro) a_i.
Alors, $\sum p_i = \sum z_j$, et ce nombre ne dépend pas de Π.

Définition : Le nombre de pôles d'une fonction elliptique f de réseau Λ contenu dans un parallélogramme fondamental est appelé l'**ordre** de f.

Théorème : *(Quatrième théorème de Liouville.)*
Supposons que f n'admette ni pôles, ni zéros sur la frontière de Π.
Notons : $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ les pôles et zéros de f à l'intérieur de Π.
p_i (resp z_i) la multiplicité du pôle (resp. zéro) a_i.
$$m_i = \begin{cases} z_i \text{ si } a_i \text{ est un zéro} \\ -p_i \text{ si } a_i \text{ est un pôle} \end{cases}$$
Alors, $\sum m_i a_i \equiv 0 \pmod{\Lambda}$.

A.2 Fonctions elliptiques de Weierstrass

Dans ce paragraphe, nous allons voir l'existence de fonctions elliptiques non constantes, et décrire l'ensemble des fonctions elliptiques de réseau de périodes donné.

Lemme : La série $\displaystyle\sum_{\substack{\omega\in\Lambda \\ \omega\neq 0}} \frac{1}{|\omega|^\sigma}$ est convergente pour $\sigma > 2$.

Définition : La fonction ρ_Λ définie par $\displaystyle\rho_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$, éventuellement notée plus simplement par ρ si le contexte est clair, est appelée **fonction elliptique de Weierstrass** de réseau Λ.

Théorème : ρ_Λ est une fonction elliptique paire, d'ordre 2, de réseau de périodes Λ.
De plus, $\forall\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\rho_\Lambda(z) = \lambda^2 \rho_{\lambda\Lambda}(\lambda z)$.

Théorème : Le corps des fonctions elliptiques de réseau Λ est $\mathbb{C}(\rho_\Lambda, \rho'_\Lambda)$.

A.3 Fonctions elliptiques et équations différentielles.

Le développement de Laurent au voisinage de zéro de ρ et ρ' permet de démontrer :

Théorème : Etant donné un réseau Λ, la fonction de Weierstrass vérifie l'équation différentielle $y'^2 = 4y^3 - g_2(\Lambda)y - g_3(\Lambda)$, où $\begin{cases} g_2(\Lambda) = 60 \displaystyle\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \frac{1}{\omega^4} \\ g_3(\Lambda) = 140 \displaystyle\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \frac{1}{\omega^6} \end{cases}$

Définition : On appelle **invariants** d'une fonction elliptique ρ_Λ, où Λ est un réseau, les nombres $g_2(\Lambda)$ et $g_3(\Lambda)$, aussi notés g_2 et g_3 si le contexte est clair.

Propriété : Soient g_2 et g_3 sont les invariants d'une fonction elliptique de réseau Λ. Alors, le discriminant Δ du polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$ est non nul, c'est à dire $\Delta = {g_2}^3 - 27{g_3}^2 \neq 0$.

A.4 Formule d'addition.

Propriété : Soient ρ une fonction elliptique de Weierstrass, de réseau Λ. $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ avec $u \not\equiv v \pmod{\Lambda}$.

Alors : $\rho(u+v) = -\rho(u) - \rho(v) + \frac{1}{4}\left(\frac{\rho'(u)-\rho'(v)}{\rho(u)-\rho(v)}\right)^2$.

$$\rho(2u) = -2\rho(u) + \frac{1}{4}\left(\frac{\rho''(u)}{\rho'(u)}\right)^2$$

A.5 Fonction zêta de Weierstrass.

Définition : La fonction ζ_Λ définie par $\zeta_\Lambda(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\left(\frac{1}{z+\omega} + \frac{z}{\omega^2} - \frac{1}{\omega}\right)$, éventuellement notée ζ si le contexte est clair, est appelée **fonction zêta de Weiertrass** de réseau Λ.

Propriété : Etant donné un réseau Λ de $\mathbb{C}$, $\rho_\Lambda = -\zeta'_\Lambda$.

Propriété et définition : ζ_Λ est «presque» périodique de réseau Λ : $\forall\omega \in \Lambda$, $\exists\eta_\Lambda(\omega) \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\zeta_\Lambda(z+\omega) - \zeta_\Lambda(z) = \eta_\Lambda(\omega)$. On appelle **quasi - période** de ζ_Λ, associée à la période $\omega \in \Lambda$ de ρ_Λ, le nombre $\eta_\Lambda(\omega)$.

Notation : Si $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, on notera désormais, pour $i \in \{1;2\}$, $\eta_i = \eta_\Lambda(\omega_i)$.

En intégrant ζ le long d'un parallélogramme fondamental, on obtient la relation de Legendre liant périodes et quasi-périodes :

Propriété : *(Relation de Legendre)*

Etant donné $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, on a $\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{vmatrix} = \omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = 2i\pi$.

Fonctions modulaires.

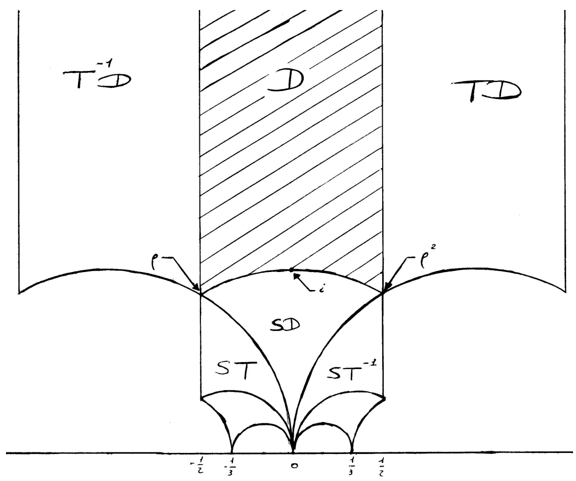
B.1 Le groupe modulaire.

Proposition : Soient $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im m\ z > 0\}$ le **demi plan de Poincaré** .
$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}); ad - bc = 1 \right\}.$$
Alors, le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ opère sur $\mathcal{H}$. L'action est donné par l'application $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ définie par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Définition : On appelle **groupe modulaire** le groupe $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\mathrm{I}_2; -\mathrm{I}_2\}$.

Nous cherchons à mieux connaître le groupe modulaire. Pour simplifier les notations, on se permet de noter de la même manière $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et son image dans G. Considérons les éléments S et T de G définis par $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\forall z \in \mathcal{H}$, $\begin{cases} \mathrm{S}.z = -\dfrac{1}{z} \\ \mathrm{T}.z = z+1 \end{cases}$, et dans G, $\begin{cases} \mathrm{S}^2 = \mathrm{I}_2 \\ (\mathrm{ST})^3 = (\mathrm{TS})^3 = \mathrm{I}_2 \end{cases}$.

Nous allons voir que $\mathrm{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| > 1,\ |\Re e\ (z)| < \dfrac{1}{2} \right\}$ est un domaine fondamental de $\mathcal{H}$ pour le groupe G, puis que G est engendré par S et T. En voici d'abord une représentation, ainsi qu'une représentation du pavage $\left\{\sigma(\overline{\mathrm{D}}); \sigma \in \langle \mathrm{S}, \mathrm{T} \rangle \right\}$:



Définition : Un **domaine fondamental** de $\mathcal{H}$, pour un groupe H est une partie D ouverte dans $\mathcal{H}$ telle que :
- D ne rencontre toute orbite de H qu'en un seul point.
- $\overline{\mathrm{D}}$ contient au moins un point de chaque orbite.

Théorème : 1. La partie $\mathrm{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| > 1, \ |\Re e\ (z)| < \dfrac{1}{2} \right\}$ est un domaine fondamental pour le groupe G.

2. Si $(z, z') \in \overline{\mathrm{D}}^2$ sont congrus modulo G, alors :

$$\begin{cases} \Re e\ (z) \in \left\{ \dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2} \right\} \\ z' \in \{z-1; z+1\} \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} |z| = 1 \\ z' = -\dfrac{1}{z} \end{cases}$$

3. Soit $z \in \overline{\mathrm{D}}$, et $\mathrm{I}(z) = \{g \in \mathrm{G}; g.z = z\}$ le stabilisateur de z dans G.

On a : $\begin{cases} \text{si } z = i, \text{ alors } \mathrm{I}(z) = <\mathrm{S}> . \\ \text{si } z = \rho, \text{ alors } \mathrm{I}(z) = <\mathrm{ST}> . \\ \text{si } z = -\overline{\rho}, \text{ alors } \mathrm{I}(z) = <\mathrm{TS}> . \\ \text{si } z \neq\in \{i, \rho, -\overline{rho}\}, \text{ alors } \mathrm{I}(z) = \{\mathrm{I}\}. \end{cases}$

Théorème : Le groupe G est engendré par S et T.

B.2 Fonctions et formes modulaires.

Définition 1 : Soit $k \in \mathbb{N}$, et H un sous groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
On dira qu'une fonction $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifie la **condition de modularité de poids k relativement à** H lorsque :
$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{H}, \forall z \in \mathcal{H}, \ f(z) = \dfrac{1}{(cz+d)^k} f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right).$

Définition 2 : Soit $k \in \mathbb{N}$, et H un sous groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Une fonction $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite **faiblement modulaire de poids $2k$ relativement à H** lorsque qu'elle est méromorphe sur $\mathcal{H}$ et qu'elle vérifie la condition de modularité de poids k relativement à H.

Remarquons que si $-\mathrm{I}_2$ est un élément du sous groupe H de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors la condition de modularité oblige toute fonction faiblement modulaire de poids $2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, à être nulle.

Remarquons aussi que la condition de modularité de poids $2k$ relativement à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ permettant d'affirmer qu'une fonction f est faiblement modulaire de poids $2k$ signifient que la forme différentielle $f(z)dz^k$ est invariante pour G, ie $f(g.z)d(g.z)^k = f(z)dz^k$ pour tout $g \in$ G, . Pour cela, il suffit que $f(z)dz^k$ soit invariante par S et T, ie

$$\forall z \in \mathcal{H}, \begin{cases} f\left(-\dfrac{1}{z}\right) = z^{2k} f(z) \\ f(z+1) = f(z) \end{cases}.$$

Le lemme suivant sera constamment utilisé dans la suite pour pouvoir exprimer une fonction 1 - périodique comme fonction de $q = e^{2i\pi z}$.

Lemme : Soit $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe (resp. holomorphe) sur $\mathcal{H}$ et périodique de période 1.
Notons $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$.
Alors, $\exists! \widetilde{f} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \begin{cases} \forall z \in \mathcal{H},\ f(z) = \widetilde{f}(e^{2i\pi z}) \\ f \text{ est méromorphe (resp. holomorphe) sur } \mathcal{H} \end{cases}.$

Définition 3 : On dit qu'une fonction $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, 1 - périodique, méromorphe sur $\mathcal{H}$, est **méromorphe à l'infini** (resp. **holomorphe à l'infini**) si $\widetilde{f}$ se prolonge en une fonction méromorphe (resp. holomorphe) à l'origine.

Définition 4 : • Une fonction faiblement modulaire est appelée **fonction modulaire** si elle est méromorphe à l'infini.
• Une fonction modulaire est appelée **forme modulaire** lorsqu'elle est holomorphe sur $\mathcal{H}$ et à l'infini.
• Une forme modulaire est appelée **forme parabolique** lorsqu'elle s'annule à l'infini.

Pour finir ce paragraphe, voici des exemples :

Exemples : • Les séries d'Eisenstein G_{2k} sont des formes modulaires de poids $2k$, pour $k \geq 2$.
• Le discriminant $\Delta = {g_2}^3 - 27{g_3}^2$ d'une fonction elliptique d'invariants g_2 et g_3 est une forme parabolique de poids 12.
• L'invariant modulaire j est une fonction modulaire de poids 0.

B.3 Algèbre des formes modulaires relativement à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

B.3.1 Zéros et pôles d'une forme modulaire.

Définition : Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ non identiquement nulle.
• Il existe un unique entier n tel que $z \longmapsto \dfrac{f(z)}{(z-p)^n}$ soit holomorphe et non nulle en $p \in \mathbb{C}$.
On appelle cet entier l'**ordre de f en p**, et on le note $v_p(f)$.
• On appelle **ordre à l'infini de f**, et on note $v_\infty(f)$, l'ordre en 0 de la fonction $\widetilde{f}$, associée à f par le lemme de la page 91.

Propriété : Soit f une fonction modulaire de poids $2k$ non identiquement nulle. En notant $\mathcal{H}/\mathrm{G}$ l'ensemble des orbites des points de $\mathcal{H}$ par l'action de G, on a alors : $v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + \sum_{\mathrm{P}\in\mathcal{H}/\mathrm{G}-\{\mathrm{G}(i);\mathrm{G}(\rho)\}} v_\mathrm{P}(f) = \frac{k}{6}$.

B.3.2 Description de l'espace des formes modulaires.

Décrivons le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel des formes modulaires de poids $2k$, $k \in \mathbb{Z}$, relativement au groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Notation : Soit $k \in \mathbb{Z}$.
Notons M_k le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel des formes modulaires de poids $2k$.
M_k^0 le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel des formes paraboliques de poids $2k$.

Propriété : $\forall k \geq 2$, $\mathrm{M}_k = \mathrm{M}_k^0 \oplus \mathbb{C}\mathrm{G}_k$.

Théorème : Soit $k \in \mathbb{Z}$.

1. Si $k < 0$ ou $k = 1$, alors $\mathrm{M}_k = \emptyset$.
2. Pour $k \in \{0; 2; 3; 4; 5\}$, M_k est un espace vectoriel de dimension 1 ayant pour base respectivement 1, G_4, G_6, G_8 et G_{10}.
3. $\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{k-6} & \longrightarrow & \mathrm{M}_k^0 \\ f & \longmapsto & f\Delta \end{array}$ est un isomorphisme.

Corollaire 1 : On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dim \mathrm{M}_k = \begin{cases} \mathrm{E}\left(\frac{k}{6}\right) & \text{si } k \equiv 1 \pmod 6 \\ \mathrm{E}\left(\frac{k}{6}\right) + 1 & \text{si } k \not\equiv 1 \pmod 6 \end{cases}$

Corollaire 2 : Pour $k \in \mathbb{N}$, une base de M_k est $\{{\mathrm{G}_4}^\alpha {\mathrm{G}_6}^\beta \ ; \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \ , \ 2\alpha + 3\beta = k\}$

On peut donc identifier l'algèbre graduée $\mathrm{M} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{M}_k$ à l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[\mathrm{G}_4; \mathrm{G}_6]$.

Séries d'Eisenstein.

Dans toute cette annexe, lorsque l'on considerera des fonctions de réseaux, c'est à dire des fonctions dont l'argument est un réseaux de $\mathbb{C}$, les réseaux de $\mathbb{C}$ seront orientés par la convention :

$$\text{Si } \Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \ , \ \Im m \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$$

Définition : Une fonction de réseau F, à valeurs complexes, est dite de **poids** $k \in \mathbb{Z}$ si pour tout réseau Λ de $\mathbb{C}$, et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{F}(\lambda\Lambda) = \dfrac{1}{\lambda^k}\mathrm{F}(\Lambda)$.

C.1 Définitions.

C.1.1 Le cas où k est un entier supérieur à 3.

Lemme : Etant donné un réseau Λ de $\mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum_{\substack{\omega\in\Lambda \\ \omega\neq 0}} \frac{1}{|\omega|^\sigma}$ est convergente pour tout réel $\sigma > 2$.

Définition 1 : Etant donné un réseau Λ de $\mathbb{C}$, pour m entier supérieur à 3, la série $\mathrm{G}_m(\Lambda) = \displaystyle\sum_{\substack{\omega\in\Lambda \\ \omega\neq 0}} \frac{1}{\omega^m}$ est convergente, et est appelée **série d'Eisenstein**

Si le contexte est clair, elle peut éventuellement être notée G_m.

C.1.2 Le cas où $k = 2$.

Bien que, pour un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ de $\mathbb{C}$, $\left(\dfrac{1}{\omega^2}\right)_{\omega\in\Lambda-\{0\}}$ ne soit pas une famille sommable, $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0 \ si \ m=0}} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2}$ est convergente, d'où la définition suivante :

Définition 2 : Etant donné un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ de $\mathbb{C}$, la série $\mathrm{G}_2(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2) = \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0 \ si \ m=0}} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2}$ est convergente et est aussi appelée **série d'Eisenstein** .

L'ordre de sommation dans la définition de G_2 est évidemment important D'après la relation de Legendre liant périodes et quasi - périodes d'une fonction elliptique de Weierstrass, on a :

Propriété : Soit $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ est un réseau de $\mathbb{C}$.
On a : $\mathrm{G}_2\left(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2\right) - \mathrm{G}_2\left(\mathbb{Z}(-\omega_2) \oplus \mathbb{Z}\omega_1\right) = \dfrac{2i\pi}{\omega_1\omega_2}$.

C.1.3 Première propriété.

Propriété : Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, G_m est de poids m, c'est à dire : si Λ est un réseau de $\mathbb{C}$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{G}_m(\lambda\Lambda) = \dfrac{1}{\lambda^m}\mathrm{G}_m(\Lambda)$.

Remarquons que si k est un entier supérieur à 2, alors G_{2k-1} est identiquement nulle, et G_{2k} n'est pas identiquement nulle.

Notation : Il nous arrivera aussi de noter, pour $\tau \in \mathcal{H}$, $\mathrm{G}_{2k}(\tau) = \mathrm{G}_{2k}(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$, ce qui définit une fonction du demi plan de Poincaré dans $\mathbb{C}$.

C.2 Développement en série, à l'infini, des G_k.

Définition : Pour $k \in \mathbb{N}^*$, le $k^{\text{ième}}$ **nombre de Bernouilli** est défini par $\dfrac{z}{e^z - 1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_k}{k!} z^k$.

Rappelons que l'on peut écrire l'égalité précédente sous la forme $\dfrac{z}{e^z - 1} = 1 - \dfrac{z}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\mathrm{B}_k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$ et que l'on a aussi $\zeta(2k) = \dfrac{2^{2k-1}}{(2k)!}\mathrm{B}_k\pi^{2k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si ζ désigne la fonction zêta de Riemann.

Notation : Pour tout couple $(k, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, notons $\sigma_k(n) = \displaystyle\sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d | n}} d^k$.

En dérivant k fois l'identité $\displaystyle\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z+m} = \pi\text{cotan}\,(\pi z)$, on obtient le développement en série à l'infini de G_k (où $q = e^{2i\pi z}$) :

Propriété : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathcal{H}$, $\mathrm{G}_{2k}(z) = 2\zeta(2k) + \dfrac{2(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)q^n$.

Nous allons maintenant introduire une nouvelle définition, pour avoir comme premier coefficient dans les développements ci-dessus un 1 :

Définition : Les séries $\mathrm{E}_k(z) = \dfrac{\mathrm{G}_k(z)}{2\zeta(2k)}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$ s'appellent **séries d'Eisenstein normées** , et admettent comme développement en série à l'infini : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathcal{H}$, $\mathrm{E}_{2k}(z) = 1 + (-1)^k \dfrac{4k}{\mathrm{B}_k} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)q^n$.

En particulier, on a, pour tout $z \in \mathcal{H}$: $\begin{cases} \mathrm{E}_2(z) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n = 1 - 24\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{pq^p}{1-q^p} \\ \mathrm{E}_4(z) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n = 1 + 240\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p^3q^p}{1-q^p} \\ \mathrm{E}_6(z) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n = 1 - 504\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p^5q^p}{1-q^p} \end{cases}$

C.3 Lien avec les fonctions elliptiques.

C.3.1 Développement de Laurent en 0.

Les séries d'Eisenstein permettent d'exprimer le développement de Laurent au voisinage de 0 d'une fonction elliptique, et donc de trouver une équation différentielle vérifiée par cette fonction elliptique.

Propriété : Soient Λ un réseau de $\mathbb{C}$, et ρ_Λ la fonction elliptique de Weierstrass de réseau de périodes Λ.

Alors, au voisinage de 0 : $\rho_\Lambda(z) = \dfrac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(2k+1)\mathrm{G}_{2k+2}(\Lambda)z^{2k}$

$$\rho_\Lambda{}'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{k=1}^{+\infty}2k(2k+1)\mathrm{G}_{2k+2}(\Lambda)z^{2k-1}$$

Théorème : Soient Λ un réseau de $\mathbb{C}$, et ρ_Λ la fonction elliptique de Weierstrass de réseau de périodes Λ.

Alors, les équations différentielles $\begin{cases} y'^2 = 4y^3 - 60\mathrm{G}_4 y - 140\mathrm{G}_6 \\ y'' = 6y^2 - 30\mathrm{G}_4 \end{cases}$ sont vérifiées par ρ_Λ.

C.3.2 Série d'Eisenstein G_2 et quasi - périodes.

Etant donné un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ de $\mathbb{C}$, on obtient, à partir de leur définition, un développement en série des quasi - périodes :

Propriété : On a $\begin{cases} \eta_1 = \eta_\Lambda(\omega_1) = \omega_1\mathrm{G}_2\left(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2\right) \\ \eta_2 = \eta_\Lambda(\omega_2) = \omega_2\mathrm{G}_2\left(\mathbb{Z}(-\omega_2) \oplus \mathbb{Z}\omega_1\right) \end{cases}$

C.3.3 Expression de E_2, E_4 et E_6 en notations elliptiques.

Proposition : Soit $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau de $\mathbb{C}$, avec $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathcal{H}$.

Alors, on a :
$$\begin{aligned} \mathrm{E}_2(\tau) &= \frac{3\eta_1\omega_1}{\pi^2} \\ \mathrm{E}_4(\tau) &= \frac{3{\omega_1}^4}{4\pi^4}g_2(\Lambda) \\ \mathrm{E}_6(\tau) &= \frac{27{\omega_1}^6}{8\pi^6}g_3(\Lambda) \end{aligned}$$

(η_1 est la quasi - période de ζ_Λ associé à la période $\omega_1 \in \Lambda$; $g_2 = 60\mathrm{G}_2(\Lambda)$ et $g_3 = 140\mathrm{G}_3(\Lambda)$; $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$.)

C.4 Lien avec les formes modulaires.

C.4.1 Exemples et contre - exemple de formes modulaires.

Proposition : Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, la série d'Eisenstein G_{2k} est une forme modulaire de poids $2k$.
De plus, on a $\mathrm{G}_{2k}(\infty) = 2\zeta(2k)$.

Néanmoins, la relation $\mathrm{G}_2(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2) - \mathrm{G}_2(\mathbb{Z}(-\omega_2) \oplus \mathbb{Z}\omega_1) = \dfrac{2i\pi}{\omega_1\omega_2}$, où $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ est un réseau de $\mathbb{C}$, s'écrit aussi $\mathrm{G}_2\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) = \tau^2\mathrm{G}_2(\tau) - 2i\tau\pi$; ce qui montre que G_2 n'est pas une forme modulaire de poids 2, mais presque.

C.4.2 Algèbre des formes modulaires.

Les séries d'Eiseinstein G_4 et G_6 permettent de décrire toutes les formes modulaires de poids $2k$, où k est un entier supérieur à 2.

Théorème : Le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel M_k des formes modulaires de poids $2k$, $k \in \mathbb{N} - \{0;1\}$ est engendré par $\{{\mathrm{G}_4}^{\alpha}{\mathrm{G}_6}^{\beta}\ ;\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2\ ,\ 2\alpha + 3\beta = k\}$

Ainsi, $\mathrm{G}_4^2 = \dfrac{7}{3}\mathrm{G}_8$, $\mathrm{G}_4\mathrm{G}_6 = \dfrac{11}{5}\mathrm{G}_{10}$, etc.

On peut donc voir l'algèbre des formes modulaires comme des polynômes en G_4 et G_6.

C.4.3 Equations différentielles vérifiées par E_2, E_4, E_6.

Soit l'opérateur $\mathrm{D} = z\dfrac{d}{dz} = \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{d}{d\tau}$.

Propriété : L'opérateur différentiel $\mathrm{D}_k = \mathrm{D} - \dfrac{k\mathrm{E}_2}{12}$ agit de M_k sur M_{k+2}.

corollaire : *(Relation de Ramanujan.)*

$$\text{On a : } \begin{cases} \mathrm{DE}_2 = \dfrac{{\mathrm{E}_2}^2 - \mathrm{E}_4}{12} \\ = \\ \mathrm{DE}_4 = \dfrac{\mathrm{E}_2\mathrm{E}_4 - \mathrm{E}_6}{3} \\ = \\ \mathrm{DE}_6 = \dfrac{\mathrm{E}_2\mathrm{E}_6 - {\mathrm{E}_4}^2}{2} \end{cases}$$

Discriminant et invariant modulaire.

D.1 Discriminant.

Dans tout ce paragraphe, ρ désignera une fonction elliptique de Weierstrass, de réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ et d'invariants $g_2(\Lambda)$ et $g_3(\Lambda)$.

Puisque la fonction ρ vérifie l'équation différentielle $\rho'^2 = 4\rho^3 - g_2(\Lambda)\rho - g_3(\Lambda)$, nous pouvons considérer le discriminant du polynôme $4\mathrm{X}^3 - g_2(\Lambda)\mathrm{X} - g_3(\Lambda)$ (à un facteur numérique près) :

Définition : On appelle **discriminant** d'une fonction elliptique, de réseau Λ d'invariant $g_2(\Lambda)$ et $g_3(\Lambda)$, la quantité $\Delta(\Lambda) = g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2$.

Sachant que le polynôme $4\mathrm{X}^3 - g_2(\Lambda)\mathrm{X} - g_3(\Lambda)$ admet $\rho\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $\rho\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$, $\rho\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$ comme racines distinctes, on en déduit :

Propriété : Le discriminant Δ d'une fonction elliptique de réseau Δ et d'invariants g_2 et g_3 ne s'annule pas :

$$\Delta(\Lambda) = g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2 \neq 0$$

De même que l'on note $\mathrm{G}_{2k}(\tau) = \mathrm{G}_{2k}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$ pour $z \in \mathcal{H}$ et $k \in \mathbb{N} - \{0;1\}$, nous noterons aussi $\Delta(\tau) = \Delta(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ pour $\tau \in \mathcal{H}$.

Propriété : Δ est une forme parabolique de poids 12 sur $\mathcal{H}$.

Enfin, la fonction Δ admet une expression sous forme produit, expression dûe à Jacobi.

Propriété : Si $\tau \in \mathcal{H}$ et $q = e^{2i\pi\tau}$, alors $\Delta(\tau) = q\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^{24}$.

D.2 L'invariant modulaire.

<u>Définition :</u> La fonction j définie sur $\mathcal{H}$ par $j(\tau) = 1728\dfrac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}$ s'appelle l' **<u>invariant modulaire</u>** .

Nous pouvons aussi considérer j commme une fonction de réseau, ou bien comme une fonction définie sur $\mathcal{H}$, la correspondance s'éffectuant comme toujours par $j(\tau) = j(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$.

Le coefficient 1728 dans la définition de j est choisi de manière à ce que j est un résidu en l'infini égal à 1 :

<u>Propriétés :</u> 1. La fonction j est une fonction modulaire de poids 0.
2. La fonction j est holomorphe sur $\mathcal{H}$, a un pôle simple à l'infini de résidu 1 :

$$\forall \tau \in \mathcal{H},\ j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n q^n, \text{ où } q = e^{2i\pi\tau}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n \in \mathbb{N}.$$

D.2.1 L'invariant modulaire et les courbes elliptiques.

Une raison de l'importance de l'invariant modulaire, qui justifie son nom, est que j prends la même valeur sur l'ensemble des réseaux homothétique à un réseau donné Λ (ie sur l'ensemble des réseaux $\lambda\Lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$)

Ceci provient de l'important théorème :

<u>Théorème :</u> L'invariant modulaire j induit une bijection de H/G sur $\mathbb{C}$.

On en déduit donc deux corollaires très proche, le second étant celui qui justifie le nom de j.

<u>Corollaire 1 :</u> Etant donné deux réseaux M et N de $\mathbb{C}$, on a $j(\mathrm{M}) = j(\mathrm{N})$ si et seulement si M et N sont homothétiques (ie $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{M} = \lambda\mathrm{N}$)

<u>Corollaire 2 :</u> Etant donné deux réseaux M et N de $\mathbb{C}$, les courbes elliptiques $\mathbb{C}/\mathrm{M}$ et $\mathbb{C}/\mathrm{N}$ sont analytiquement isomorphes si et seulement si $j(\mathrm{M}) = j(\mathrm{N})$.

On obtient un autre corollaire de ce théorème, qui nous permettra de construire des réseaux d'invariants donnés, et donc de paramétrer toute courbe elliptique de discriminant non nul.

<u>Corollaire 3 :</u> Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\alpha^3 - 27\beta^2 \neq 0$.
Alors, il existe un réseau Λ de $\mathbb{C}$ tel que $\left\{\begin{array}{l} g_2(\Lambda) = \alpha \\ g_3(\Lambda) = \beta \end{array}\right.$, et les fonctions ρ_Λ et ρ'_Λ paramétrent la courbe elliptique $y^2 = 4x^3 - \alpha x - \beta$.

D.2.2 Fonctions modulaires de poids 0.

On a vu que l'invariant modulaire est une fonction modulaire de poids 0. En fait, toute fonction modulaire de poids 0 provient de j :

Propriété : Une fonction méromorphe f sur $\mathcal{H}$ est une fonction modulaire de poids 0 si et seulement si f est une fraction rationnelle en j.

Autour du théorème de Nesterenko.

Nous allons présenter dans ce chapitre une démonstration de transcendance liée aux formes quasi - modulaires : il s'agit du théorème de Nesterenko (voir [17] et [18]), dernier théorème de transcendance obtenu à ce jour. Le principe est d'illustrer la schématisation d'une démonstration de transcendance (§5.6.1.) et en particulier de voir comment un lemme de Schwarz fonctionne.

E.1 Le théorème et ses corollaires.

Considérons les fonctions P, Q, R de Ramanujan définies pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, par

$$\begin{cases} \mathrm{P}(z) &= 1 - 24\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) z^n &= 1 - 24\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n} \\ \mathrm{Q}(z) &= 1 + 240\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_3(n) z^n &= 1 + 240\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3z^n}{1-z^n} \\ \mathrm{R}(z) &= 1 - 504\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_5(n) z^n &= 1 - 504\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5z^n}{1-z^n} \end{cases}$$

En 1996[1], Y.V. Nesterenko a démontré le théorème suivant :

Théorème : $\forall q \in \mathbb{C},\ |q| \in]0;1[\Longrightarrow \mathrm{degtr}_{\mathbb{Q}}\ \mathbb{Q}\Big(q, \mathrm{P}(q), \mathrm{Q}(q), \mathrm{R}(q)\Big) \geq 3.$

Ce théorème peut aussi s'écrire sous la forme $\mathrm{degtr}_{\mathbb{Q}}\ \mathbb{Q}\Big(e^{2i\pi\tau}, \mathrm{E}_2(\tau), \mathrm{E}_4(\tau), \mathrm{E}_6(\tau)\Big) \geq 3$ pour tout $\tau \in \mathcal{H}$. Il est intéressant de voir que la traduction elliptique de ce résultat est une amélioration du théorème de Chudnowsky concernant l'indépendance algébrique des nombres $\dfrac{\omega}{\pi}$ et $\dfrac{\eta}{\pi}$, où ω et η sont respectivement une période et sa quasi - période associée d'une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2 et g_3 algébriques.

Pour étudier cela, nous allons suivre une partie de l'exposé de M. Waldschmidt au séminaire Bourbaki de 1996 ([32]) .

Corollaire 1 : Soit
- $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2 et g_3 algébriques.
- ω une période non nulle de $\wp$.
- η la quasi -période associée à ω.
- τ le quotient de deux périodes fondamentales de $\wp$.

Alors, $e^{2i\pi\tau}$, $\dfrac{\omega}{\pi}$ et $\dfrac{\eta}{\pi}$ sont algébriquement indépendants.

[1] Voir [17].

Démonstration : Quitte à remplacer la courbe elliptique par une courbe isogène, on peut suposer que le réseau de périodes de ρ est $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ avec $\omega_1 = \omega$.

Notons alors $\eta_1 = \eta$, $\tau = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ et $q = e^{2i\pi\tau}$.

On sait[2] que pour $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, $\mathrm{P}(q) = 3\dfrac{\omega_1}{\pi}\dfrac{\eta_1}{\pi^2}$, $\mathrm{Q}(q) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\omega_1}{\pi}\right)^4 g_2$, et $\mathrm{R}(q) = \dfrac{27}{8}\left(\dfrac{\omega_1}{\pi}\right)^6 g_3$, d'où, en appliquant le théorème de Nesterenko : $\mathrm{degtr}_{\mathbb{Q}}\ \mathrm{Q}\left(e^{2i\pi\tau}, 3\dfrac{\omega_1}{\pi}\dfrac{\eta_1}{\pi^2}, \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\omega_1}{\pi}\right)^4 g_2, \dfrac{27}{8}\left(\dfrac{\omega_1}{\pi}\right)^6 g_3\right) \geq 3$.

Ainsi, $\mathrm{degtr}_{\mathbb{Q}}\ \mathrm{Q}\left(e^{2i\pi\tau}, \dfrac{\omega_1}{\pi}, \dfrac{\eta_1}{\pi}\right) \geq 3$, ce qui démontre le résultat.

$\square$

On en déduit alors le fameux corollaire donnant l'indépendance algébrique de π et e^π, alors que l'on ne sait toujours rien dire sur l'éventuelle transcendance de $e + \pi$, nombre a priori plus simple que e^π.

Corollaire 2 :

1. π, e^π, $\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)$ sont algébriquement indépendants.
2. π, $e^{\pi\sqrt{3}}$, $\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right)$ sont algébriquement indépendants.

Démonstration : Dans le cas CM, puisque[3] les trois nombres $\dfrac{\omega}{\pi}$, $\dfrac{\eta}{\pi}$, et $\dfrac{1}{\omega}$ sont linéairement dépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on en déduit que $e^{2i\pi\tau}$, ω et π sont algébriquement indépendants.

Lorsque $q = e^{-2\pi}$, une période fondamentale de la courbe elliptique $y^2 = 4x^2 - 4x$ est $\omega = 2\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 4x}} = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{8\pi}}$, d'où l'indépendance algébrique de π, e^π, $\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Lorsque $q = e^{-\pi\sqrt{3}}$, une période fondamentale de la courbe elliptique $y^2 = 4x^2 - 4$ est $\omega = 2\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 4}} = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{2^{\frac{4}{3}}\pi}$, d'où l'indépendance algébrique de π, $e^{\pi\sqrt{3}}$, $\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

$\square$

Le théorème de Nesterenko admet d'autres corollaires autour des fonctions thêta et de leurs dérivées, autour de l'invariant modulaire et de ses dérivées, autour des suites de Lucas (ce qui donne la transcendance de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{F}_n}$, où $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci, par exemple)[4].

[2] Voir [14], chap. 4, §2 propriété 4 p 47 et chap. 18, §3 p 248 - 249.

[3] Voir [16], lemme 3.1 et appendice 1.

[4] Voir [8] ; [32], §2.2 p 17, corollaire 4 et p 18, corollaire 5 ; [6].

E.2 Principe de démonstration du théorème.

Le théorème étant devenu très classique[5] , nous n'en donnons pas la démonstration complète, mais juste le principe de la démonstration originale (une variante a été proposée par P. Philippon) .

Pour cela, nous utiliserons une forme particulière du critère d'indépendance algébrique de Philippon :

Théorème : *(Critère d'indépendance algébrique de Philippon.)*
Soit : • $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.
• $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2$.
• σ et λ sont des fonctions croissant vers $+\infty$ vérifiant $\dfrac{\sigma(\mathrm{N}+1)}{\sigma(\mathrm{N})} \underset{\mathrm{N}\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{\lambda(\mathrm{N})}{\sigma(\mathrm{N})^k} \underset{\mathrm{N}\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Pour $\mathrm{P}(\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_m) = \displaystyle\sum_{(i_1,\cdots,i_m)\in\mathbb{N}^m} a_{i_1,\cdots,i_m} \mathrm{X}_1^{i_1} \cdots \mathrm{X}_m^{i_m} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_m]$,
notons $\mathrm{H}(\mathrm{P}) = \displaystyle\max_{(i_1,\cdots,i_m)\in\mathbb{N}^m} |a_{i_1,\cdots,i_m}|$.
S'il existe $(\mathrm{A_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_m]^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

i. $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\deg \mathrm{A_N} \leq \sigma(\mathrm{N})$

ii. $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\log \mathrm{H}(\mathrm{A_N}) \leq \sigma(\mathrm{N})$

iii. $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $e^{-\gamma_2\lambda(\mathrm{N})} \leq |\mathrm{A_N}(x_1, \cdots, x_m)| \leq e^{-\gamma_1\lambda(\mathrm{N})}$,

alors $\mathrm{degtr}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(x_1, \cdots x_m) \geq k$.

La suite $(\mathrm{A_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ nécessaire à l'application de ce critère est construite dans le lemme suivant :

Lemme : Soit $q \in \mathbb{C}$, $|q| \in]0;1[$.
Alors, $\exists \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$, $\exists (\mathrm{A_N})_{\mathrm{N}\geq\mathrm{N}_0} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_m]^{\{n\in\mathbb{N};n\geq\mathrm{N}_0\}}$ tel que :
$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \mathrm{N} \geq \mathrm{N}_0 \Longrightarrow \begin{cases} \deg \mathrm{A_N} \leq \gamma_0 \mathrm{N} \ln \mathrm{N} \\ \log \mathrm{H}(\mathrm{A_N}) \leq \gamma_0 \mathrm{N}(\ln \mathrm{N})^2 \\ e^{-\gamma_2 \mathrm{N}^4} \leq \left|\mathrm{A_N}\big(q, \mathrm{P}(q), \mathrm{Q}(q), \mathrm{R}(q)\big)\right| \leq e^{-\gamma_1 \mathrm{N}^4} \end{cases}, \text{ où}$$
$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$ sont des constantes vérifiant $\gamma_1 \leq \gamma_2$.

Le théorème de Nesterenko suit, par application du critère de Philippon, avec
$$\begin{cases} \sigma(\mathrm{N}) = \mathrm{N}(\ln \mathrm{N})^2 \\ \lambda(\mathrm{N}) = \mathrm{N}^4 \\ n = 4 \\ k = 3 \end{cases}, \text{ car } \begin{cases} \dfrac{\sigma(\mathrm{N}+1)}{\sigma(\mathrm{N})} \underset{\mathrm{N}\longrightarrow+\infty}{\sim} 1 \ . \\ \dfrac{\lambda(\mathrm{N})}{\sigma(\mathrm{N})^3} = \dfrac{\mathrm{N}^4}{\mathrm{N}^3(\ln \mathrm{N})^6} = \dfrac{\mathrm{N}}{(\ln \mathrm{N})^6} \underset{\mathrm{N}\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty \ . \end{cases}$$

Ainsi, le théorème de Nesterenko se réduit au lemme précédent. Etudions succintement les étapes de sa démonstration, en reprenant l'exposé effectué par F. Gramain ([8]) .

[5]Voir : [17] ; [18] ; [32] ; [33] ; [8] ; [19].

Les étapes ne correspondent pas tout à fait aux différents pas de la schématisation d'une démonstration de transcendance donnée au paragraphe 5.6.1. : le second pas de la démonstration est une conséquence directe du premier pas et n'est pas énoncée dans la schématisation, les pas se trouvant ensuite décalés d'une unité entre la schématisation et la démonstration.

Premier pas : (Construction d'une fonction auxilliaire.)

Le lemme de Siegel et l'indépendance algébrique des fonctions $z \longmapsto z$, P, Q et R montre que : $\exists \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$, $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N} \geq \mathrm{N}_0$, $\exists \widetilde{\mathrm{A}_\mathrm{N}} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4]$,

$$\begin{cases} \bullet \quad \forall i \in [\![1\,;\,4]\!],\ \deg_{\mathrm{X}_i} \widetilde{\mathrm{A}_\mathrm{N}} \leq \mathrm{N}\ . \\ \bullet \quad \log \mathrm{H}(\widetilde{\mathrm{A}_\mathrm{N}}) \leq 116 \mathrm{N} \ln \mathrm{N}\ . \\ \bullet \quad z \longmapsto \mathrm{F}(z) = \widetilde{\mathrm{A}_n}\big(z, \mathrm{P}(z), \mathrm{Q}(z), \mathrm{R}(z)\big) \text{ possède en 0 un zéro d'ordre M tel que} \\ \quad\ \ \mathrm{M} \geq \dfrac{\mathrm{N}^4}{2}\ . \end{cases}$$

Second pas : (Majoration de $|\mathrm{F}(z)|$)

La majoration des coefficients du polynôme construit au pas précédent donné par le lemme de Siegel permet de montrer que : $\forall q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$, $\exists \mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$, $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N} \geq \mathrm{N}_1 \Longrightarrow \forall z \in \mathrm{D}\left(0, \min\left(\dfrac{1+|q|}{2}, 2|q|\right)\right)$, $|\mathrm{F}(z)| \leq |z|^{\mathrm{M}} \mathrm{M}^{187\mathrm{N}}$.

Troisème pas : (Minoration d'un $|\mathrm{F}^{(\mathrm{T})}(q)|$)

C'est ici que se trouve le «lemme de Schwarz». Il s'agit ici d'une formule d'interpolation que P. Philippon appelle *lemme de Schwarz approché* :

Lemme : Soit
- $(\mathrm{M}, \mathrm{T}) \in \mathbb{N}^2$.
- $r \in \mathbb{R}$.
- $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| \leq r$.
- F une fonction analytique sur un ouvert contenant le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$.

Si F a un zéro de multiplicité supérieure à M à l'origine, alors

$$\begin{aligned} \frac{r^{\mathrm{M}}}{\mathrm{M}!}\left|\mathrm{F}^{(\mathrm{M})}(0)\right| \quad &\leq \quad 2^{\mathrm{M}+\mathrm{T}}\left(\frac{r}{|q|}\right)^{\mathrm{M}} \sum_{k=0}^{\mathrm{T}-1}\left(\frac{|q|}{2}\right)^{k} \frac{1}{k!}\left|\mathrm{F}^{(\mathrm{T})}(q)\right| \\ &\quad + \left(\frac{r}{|q|}\right)^{-r} \sup_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ |z|=r}} |\mathrm{F}(z)|. \end{aligned}$$

Ceci se démontre, si $q \in \mathbb{C}$, $|q| \in]0;1[$, en appliquant le théorème des résidus à la fonction $z \longmapsto \dfrac{\mathrm{F}(z)}{z^{\mathrm{M}+1}}\left(\dfrac{r^2 - \overline{q}z}{r(z-q)}\right)^{\mathrm{T}}$.

On obtient : pour tout $q \in \mathbb{C}$, $|q| \in]0;1[$, il existe $c_1(q) > 0$ et $\mathrm{T} \in [\![0\,;\,[c_1(q)\mathrm{N}\ln\mathrm{M}]]\!]$ tels que $\left|\mathrm{F}^{(\mathrm{T})}(q)\right| \geq \left(\dfrac{|q|}{2}\right)^{2\mathrm{M}}$.

Quatrième pas : (Lemme de zéros)

Lemme : Soit $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}) \in \mathbb{N}^{*2}$.

$\mathrm{A} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_4] - \{0\}$ tel que $\begin{cases} \deg_{\mathrm{X}_1} \mathrm{A} \leq \mathrm{L}_0. \\ \forall i \in [\![2\,;\,4]\!], \deg_{\mathrm{X}_i} \mathrm{A} \leq \mathrm{L}. \end{cases}$

Alors : $\mathrm{ord}_{\mathrm{O}}\, \mathrm{A}\Big(z, \mathrm{P}(z), \mathrm{Q}(z), \mathrm{R}(z)\Big) \leq 2 \times 10^{45} \mathrm{L}_0 \mathrm{L}^3$.

Idée de la démonstration :

Ce lemme provient du système différentiel $\left\{\begin{array}{rcl} \theta\mathrm{P} & = & \dfrac{\mathrm{P}^2-\mathrm{Q}}{12} \\ \theta\mathrm{Q} & = & \dfrac{\mathrm{PQ}-\mathrm{R}}{3} \\ \theta\mathrm{R} & = & \dfrac{\mathrm{PR}-\mathrm{Q}^2}{2} \end{array}\right.$,

où $\theta = z\dfrac{d}{dz}$, et du fait suivant non trivial :

Tout idéal premier non nul de $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \cdots \mathrm{X}_4]$ *ayant un zéro au point* $(0,1,1,1)$ *et stable par l'opérateur* $\mathrm{D} = \mathrm{X}_1\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{X}_1} + \dfrac{{\mathrm{X}_1}^2-\mathrm{X}_2}{12}\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{X}_2} + \dfrac{\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2-\mathrm{X}_3}{3}\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{X}_3} + \dfrac{\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3-{\mathrm{X}_2}^2}{12}\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{X}_4}$ *contient le polynôme* $\mathrm{X}_1({\mathrm{X}_3}^3-{\mathrm{X}_4}^2)$.

□

La conclusion est qu'il existe $c > 0$, indépendante de N telle que $\mathrm{M} \leq c\mathrm{N}^4$.

Cinquième pas : (Construction des (A_n))

L'opérateur D précédent vérifie $\forall q \in \mathbb{C}$, $|q| \in]0;1[$, $\forall \mathrm{B} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_4]$, $\dfrac{d}{dz}\left(\mathrm{B}\Big(q, \mathrm{P}(q), \mathrm{Q}(q), \mathrm{R}(q)\Big)\right) = \dfrac{1}{z}(\mathrm{D\ B})\Big(q, \mathrm{P}(q), \mathrm{Q}(q), \mathrm{R}(q)\Big)$, d'où $\forall t \in \mathbb{N}$, $\forall q \in \mathbb{C}$,

$$|q| \in]0;1[, \quad (12z)^t\mathrm{F}^{(t)}(z) = 12^t\left(\prod_{k=0}^{k-1}(\mathrm{D}-k)\right)(\mathrm{A})\Big(q, \mathrm{P}(q), \mathrm{Q}(q), \mathrm{R}(q)\Big)$$
$$= 12^t\Big(\mathrm{D}_t\ \mathrm{A}\Big)\Big(q, \mathrm{P}(q), \mathrm{Q}(q), \mathrm{R}(q)\Big)\ .$$

On pose alors $\mathrm{A}_\mathrm{N} = 12^\mathrm{T}\Big(\mathrm{D}_\mathrm{T}\ \widetilde{\mathrm{A}_\mathrm{N}}\Big)$ pour tout $\mathrm{N} \geq \mathrm{N}_0$.

Ainsi : $\forall q \in \mathbb{C}$, $|q| \in]0;1[$, $\exists \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$, $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N} \geq \mathrm{N}_0 \Longrightarrow \exists \widetilde{\mathrm{N}_0} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{A}_{\widetilde{\mathrm{N}_0}} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_4]$ vérifie $\left\{\begin{array}{l} \deg \mathrm{A}_{\widetilde{\mathrm{N}_0}} \leq \gamma_0\mathrm{N}\ln\mathrm{N} \\ \log\mathrm{H}(\mathrm{A}_{\widetilde{\mathrm{N}_0}}) \leq \gamma_0\mathrm{N}\big(\ln\mathrm{N}\big)^2 \\ e^{-\gamma_2\mathrm{N}^4} \leq |\mathrm{A}_{\widetilde{\mathrm{N}_0}}\Big(q, \mathrm{P}(q), \mathrm{Q}(q), \mathrm{R}(q)\Big)| \leq e^{-\gamma_1\mathrm{N}^4} \end{array}\right.$ pour des constantes $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^3$ avec $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2$, ne dépendant que de q; ce qui démontre le lemme, et donc le théorème de Nesterenko.

□

E.3 Conjecture de Nesterenko.

Y. V. Nesterenko conjecture[6] :

$$\operatorname{degtr}_{\mathbb{Q}}\ \mathbb{Q}\Big(\tau, e^{2i\pi\tau}, \mathrm{E}_2(\tau), \mathrm{E}_4(\tau), \mathrm{E}_6(\tau)\Big) \geq \left\{\begin{array}{l} 3 \text{ si } \tau \text{ est CM.} \\ 4 \text{ si } \tau \text{ n'est pas CM.} \end{array}\right.$$

Si $\tau \in \mathcal{H}$ est un point de multiplication complexe, τ est quadratique imaginaire, et sa partie imaginaire est alors aussi un nombre quadratique. De plus: $\pi \in \mathbb{Q}\Big(\mathrm{E}_2(\tau), \mathrm{E}_4(\tau), \mathrm{E}_6(\tau)\Big)$. Le corps étudié dans la conjecture de Nesterenko est donc le même que $\mathbb{Q}\Big(\tau, e^{2i\pi\tau}, {\mathrm{E}_2}^*(\tau), \mathrm{E}_4(\tau), \mathrm{E}_6(\tau)\Big)$.

La conjecture suivante, du monde modulaire presque holomorphe, est équivalente à la conjecture de Nesterenko dans le cas CM, mais à priori pas dans le cas général.

Conjecture : Soit $\tau \in \mathcal{H}$.
Alors :

$$\operatorname{degtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\Big(\tau, e^{2i\pi\tau}, {\mathrm{E}_2}^*(\tau), \mathrm{E}_4(\tau), \mathrm{E}_6(\tau)\Big) \geq \begin{cases} 3 & \text{si } \tau \text{ est CM.} \\ 4 & \text{si } \tau \text{ n'est pas CM.} \end{cases}$$

[6]Voir [19], conjecture 1.11.

Notations.

Généralités.

- $\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; y > 0\}$ désigne le demi plan de Poincaré supérieur.

- $\mathbb{C}_k[\mathrm{X}]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur à $k \in \mathbb{N}$, à coefficients complexes.

- $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients entiers de déterminant 1.

- $\Gamma(\mathrm{N}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}); \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ mod\ \mathrm{N} \right\}$, la congruence étant définie coefficients par coefficients.

Désormais, Γ *désigne un sous-groupe de congruence de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*,* k *et* s *seront deux entiers positifs,* $\mathbb{K}$ *un sous-corps de* $\mathbb{C}$ *,* f *est une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathcal{H}$*,* z *un élément du demi plan supérieur de Poincaré, et enfin* $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$.

Autour de l'action de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ sur $\mathcal{H}$.

- $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ désigne l'ensemble des matrices 2×2 de déterminant strictement positif à coefficients rationnels.

- $\gamma.z = \dfrac{az+b}{cz+d}$.
- $\left(f \underset{k}{|} \gamma\right) = \dfrac{1}{(cz+d)^k} f(\gamma.z)$.

Autour des formes modulaires.

- $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ p 24.
- $\mathrm{S}_k(\Gamma)$ p 31.
- $\mathcal{M}(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_k(\Gamma)$.
- $\mathcal{M}_k$ p 51.
- $\mathcal{A}_k(\Gamma)$ p 51.

Autour des fonctions elliptiques et des courbes elliptiques.

- $\wp$ désigne une fonction elliptique de Weierstrass.

- $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ désigne le réseau des périodes de la courbe elliptique E.

- ω désigne une période fondamentale d'une courbe elliptique.

- η désigne quasi-période associé à la période fondamentale ω.

Autour des formes modulaires presque holomorphes et des formes quasi-modulaires.

Autour de l'arithmécité des formes modulaires, des formes modulaires presque holomorphes et des formes quasi-modulaires.

Autour des opérateurs différentiels.

Quelques exemples particuliers de fonctions consédérées.

Autour de la cohomologie.

Bibliographie

[1] D. Bertrand : *Fonctions modulaires, courbes de Tate et indépendance algébrique*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, (1977/78), exposé 36.

[2] D. Bertrand : *Introduction to algebraic independance theory $\theta(\tau, z)$ and transcendance*, in Lecture note in Math, vol 1752, Springer, Berlin, 2001, chap. 1.

[3] D. Bertrand, M. Emsalem, F. Gramain, M. Huttner, M. Langevin, M. Laurent, M. Mignotte, J. C. Moreau, P. Philippon, E. Reyssat, M. Waldschmidt : *Les nombres transcendants*, Mémoires de la S.M.F., 2^e série, tome 13, 1984, p 1 - 60.

[4] R. M. Damerell : *L-functions of elliptic curves with complex multiplication I*, Acta Arith. **17**, 1970, p 287 - 301.

[5] F. Diamond, J. Shurmon : *A first course in modular forms*, Springer, 2004.

[6] D. Duverney, Ke Nishioka, Ku. Nishioka, I. Shiokawa : *Transcendance of Rogers Ramanujan continued fraction and reciprocal sums of Fibonacci numbers*, Proc. Japan, Acad. sci. Ser A73 Lo.7 (1997).

[7] H. M. Edwards : *Riemann's zeta function*, Dover , 2001.

[8] F. Gramain : *Transcendance et fonctions modulaires*, J. Théor. Nombres Bordeaux, tome 11, n°1, 1999, p 73 - 90.

[9] N. M. Katz : *p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series*, Annals of Mathematics, **104**, 1976, p 459 - 571.

[10] N. M. Katz : *Modular functions of one variable III*, Springer-Verlag, Lecture Notes in mathématics 350, 1973.

[11] W. Kohnen, D. Zagier : *Modulars forms with rational periods*, in «modular forms», Rankin ed, Horwood, 1084, p 197 - 249.

[12] M. Kontsevich, D. Zagier : *Periods*, Mathematics unlimited-2001 and beyond, Springer, Berlin, 2001, p 771 - 808.

[13] S. Lang : *Introduction to modular forms*, Springer - Verlag, 1976.

[14] S. Lang : *Elliptic functions*, Springer - Verlag, 1973.

[15] F. Martin, E. Royer : *Formes modulaires et périodes* in, *Colloque jeunes - Formes modulaires et transcendance* , S. Fischler - E. Gaudron - S. Khémira Eds, Séminaires et Congrès 12, 2005.

[16] D. W. Masser : *Elliptic functions and transcendance*, Ed Springer - Verlag, Lecture note 437, 1975 .

[17] Y. N. Nesterenko : *Modular functions and transcendance questions*, Sb. Math 178/9, p 1319 - 1348, 1996.

[18] Y. N. Nesterenko : *Modular functions and transcendance problems*, C.R. Acad Sci. Paris, Sér. 1, 322, année 1996, p 909 - 914.

[19] Y. N. Nesterenko : *Algebraic independance for values of Ramanujan functions* in *Introduction to algebraic independance theory*, Y. V. Nesterenko - P. Philippon Eds, Lecture note in Math, vol 1752, Springer, Berlin, 2001, chap. 3.

[20] N. Ouleb : *The ring of quasimodular forms for a cocompact group*, accessible sur http://www.institut.math.jussieu.fr/ ouled/ .

[21] N. Ouleb : *Anneau des formes quasi-modulaires sur un groupe co-compact*, C.R. Acad Sci. Paris, Sér. 1, 343, année 2006, p 511 - 514.

[22] F. Pellarin : *Les nilradicaux différentiels d'anneaux différentiels associés aux groupes triangulaires de Riemann - Schwarz*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 114, 2005, p 213 - 239.

[23] F. Pellarin : *Introduction aux formes modulaires de Hilbert et à leurs propriétés différentielles*, in *Colloque jeune - Formes modulaires et transcendance*, smf, Séminaires et Congrès, 12, 2005.

[24] H. Rademacher : *Topics in analytic number theory*, Springer - Verlag, 1973.

[25] T. Schneider : *Introduction aux nombres transcendants*, Gauthier-Villars, 1959.

[26] J. P. Serre : *Cours d'arithmétique*, Presse Universitaire de France, 1970.

[27] G. Shimura : *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton university press, 1973.

[28] G. Shimura : *Arithmetic properties of modular forms* , Annals of Mathematics, **102**, 1975, p 491 - 515.

[29] G. Shimura : *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. K. **45**, 1978, 637 - 679.

[30] G. Shimura : *Nearly holomorphic functions on hermitian symmetric spaces*, Math. Ann. 278, 1987, p 1 - 28.

[31] G. Shimura : *Arithmecity of the special values of various zeta functions and periods of abelian integrals* , Sugaku expositions, vol 8, number 1, June 1995.

[32] M. Waldschmidt : *Sur la nature arithmétique des valeurs de fonctions modulaires*, Séminaire Bourbaki n° 824, astérisque, **245** , 1997.

[33] M. Waldschmidt : *Transcendance et indépendance algébrique de valeurs de fonctions modulaires*, CNTA5, Carleton 1996.

[34] A. Weil : *Elliptic functions according to Einsenstein and Kronecker*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 88, Springer 1976.