

Multizêtas vs. multitangentes.

Séminaire, Université de Clermont-Ferrand

Olivier Bouillot

20 janvier 2012

On note : $\mathcal{S}_d^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2\}$.

$\mathcal{S}_{df}^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2 \text{ et } s_r \geq 2\}$.

Définition des multizêtas.

Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*$.

On pose : $\mathcal{Z}e^{\underline{s}} = \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r} = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}$.

Aujourd'hui, les multizêtas interviennent dans des branches des mathématiques aussi variées que :

- 1 La théorie des nombres.
- 2 Les groupes quantiques, la théorie des noeuds ou la physique mathématique.
- 3 La théorie de la résurgence et des invariants holomorphes.
- 4 L'étude des diagrammes de Feynman.
- 5 L'étude de $\mathbb{P}^1 - \{0; 1; \infty\}$ (à travers le programme de Grothendieck-Ihara) .
- 6 L'étude du "groupe de Galois absolu" .

Les deux tables de multiplications des multizêtas.

Il existe deux manières de représenter un multizêtas :

Par une **somme** :

$$\mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r}$$

=

Par une **intégrale itérée** :

$$\mathcal{W}a^{1,0^{[s_r-1]}, \dots, 1,0^{[s_1-1]}}$$

$$\text{où } \mathcal{W}a^{\alpha_1, \dots, \alpha_r} = \int_{0 < t_1 < \dots < t_r < 1} \omega_{\alpha_1} \cdots \omega_{\alpha_r}$$

$$\omega_0 = \frac{dz}{z}$$

$$\omega_1 = \frac{dz}{1-z}$$

$$\mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^3 = \mathcal{Z}e^{2,3} + \mathcal{Z}e^{3,2} + \mathcal{Z}e^5$$

$$\mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^3 = \mathcal{Z}e^{2,3} + 3\mathcal{Z}e^{3,2} + 6\mathcal{Z}e^{4,1}$$

Symétrélité

Symétrulité

DIMORPHIE.

Conjecture :

Les nombres π , $\mathcal{Z}e^3$, $\mathcal{Z}e^5$, $\mathcal{Z}e^7$, \dots sont algébriquement indépendants.

Deux principes à respecter.

Soit P un polynôme à r variables convenable.

■ Cas simple où l'on sait faire des calculs de "monozêtas" :

$$\sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{1}{P(n_1, \dots, n_r)} \rightsquigarrow \sum_{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r} \frac{1}{\tilde{P}(n_1, \dots, n_r)}$$

☞ P. CARTIER : *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzetas et groupes pro-unipotents*", Séminaire Bourbaki t. 42, 53^{ième} année, 2000-2001, Exposé n°885, Mars 2001.

■ Suggestion de Zagier :

$$\sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{1}{P(n_1, \dots, n_r)} \rightsquigarrow \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{e^{im_1 x_1 + \dots + im_r x_r}}{P(n_1, \dots, n_r)}$$

\rightsquigarrow Faire $x_1 = \dots = x_r = 0$.

☞ D. ZAGIER : *Value of zeta function and their applications*, in "First European Congress of mathematics", Vol. 2, p 497 - 512, Birkhäuser, 1994.

- Ce que doit vérifier un modèle fonctionnel :
 - ★ introduire un modèle fonctionnel simple, relié simplement aux multizêtas.
 - ★ définir des fonctions périodiques.
 - ★ tenir compte de la symétrie de l'espace de sommation.
- Suggestion la plus simple : les multizêtas de Hurwitz.

$$\mathcal{H}e_+^{s_1, \dots, s_r}(z) = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}}$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{H}e^s(0) = \mathcal{Z}e^s.$$

\rightsquigarrow Sommes non symétriques... Fonctions non périodiques...

- Ce que doit vérifier un modèle fonctionnel :
 - ★ introduire un modèle fonctionnel simple, relié simplement aux multizêtas.
 - ★ définir des fonctions périodiques.
 - ★ tenir compte de la symétrie de l'espace de sommation.
- Seconde suggestion : les multitangentes.

$$\mathcal{T}e^{s_1, \dots, s_r}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}}$$

↪ Sommes symétriques + Fonctions 1-périodiques .

↪ Existe-t-il un lien avec les multizêtas ?

Problématique :

Les multitangentes sont-elles une bonne généralisation fonctionnelle des multizêtas ?

Remarques :

1. Les multitangentes sont une généralisation des séries d'Eisenstein ($r = 1$).
2. Les multitangentes apparaissent naturellement dans un problème de dynamique holomorphe.

Propriété :

1 Propriété de différentiabilité.

La fonction $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$; elle converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et vérifie, pour tout $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$:

$$\frac{\partial \mathcal{T}e^{\underline{s}}}{\partial z} = - \sum_{i=1}^r s_i \mathcal{T}e^{s_1, \dots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \dots, s_r} .$$

2 Propriété de parité.

$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , \forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^* , \mathcal{T}e^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{|\underline{s}|} \mathcal{T}e^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z) .$

3 Loi de multiplication.

$\forall (\underline{u}; \underline{v}) \in (\mathcal{S}_{df}^*)^2 , \exists E(\underline{u}; \underline{v}) \subset \mathcal{S}_{df}^*$ fini , $\mathcal{T}e^{\underline{u}} \mathcal{T}e^{\underline{v}} = \sum_{\underline{w} \in E(\underline{u}; \underline{v})} \mathcal{T}e^{\underline{w}} .$

Propriété : Renormalisation des multizêtas.

Soit $\theta \in \mathbb{C}$.

Il existe une unique extension des multizêtas à $\text{seq}(\mathbb{N}^*)$ telle que :

1. $\mathcal{Z}e^\bullet$ satisfait toujours la même loi de multiplication (issue des séries) .
2. $\mathcal{Z}e^1 = \theta$.

Propriété : Renormalisation des multitangentes.

Il existe une extension des multitangentes à $\text{seq}(\mathbb{N}^*)$ telle que :

1. $\mathcal{T}e^\bullet$ satisfait toujours la même loi de multiplication (issue des séries) .
2. $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}e^1(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$.

L'extension vérifie automatiquement : la propriété de différentiabilité.
la propriété de parité.

Remarque : Une monotangente est une multitangente de longueur 1 .

Notons : $\mathcal{MZV} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}} (\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*}$.

$$m(\underline{s}) = \max(s_1; \dots; s_r), \text{ pour tout } \underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) .$$

Propriété : Réduction en monotangentes des multitangentes convergentes.

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^* , \exists (z_2; \dots; z_{m(\underline{s})}) \in \mathcal{MZV}^{m(\underline{s})-1} , \mathcal{T}e^{\underline{s}} = \sum_{k=2}^{m(\underline{s})} z_k \mathcal{T}e^k .$$

Éléments de démonstration :

1. Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(n_1 + X)^{s_1} \dots (n_r + X)^{s_r}}$.
2. Utilisation de la seconde table de multiplication des multizêtas.

Exemples de réduction de multitangentes convergentes en monotangentes.

$$\mathcal{T}e^{2,2} = 2\zeta(2)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,3} = -3\zeta(3)\mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,2} = 3\zeta(3)\mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,2} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,4} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - 2\zeta(3)\mathcal{T}e^3 + \zeta(2)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,3} = -\frac{12}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,2} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + 2\zeta(3)\mathcal{T}e^3 + \zeta(2)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,2} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,3} = -\frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + \zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,2} = -\frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - \zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,2} = \frac{4}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$$

Propriété : Réduction en monotangentes.

$$\forall \underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) , \exists (z_1 ; \dots ; z_{m(\underline{s})}) \in \mathcal{MZV}^{m(\underline{s})} , \mathcal{T}e^{\underline{s}} = \delta^{\underline{s}} + \sum_{k=1}^{m(\underline{s})} z_k \mathcal{T}e^k ,$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \delta^{\underline{s}} = \begin{cases} \frac{(i\pi)^r}{r!} & , \text{ si } \underline{s} = 1^{[r]} \text{ et si } r \text{ est pair.} \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases} \\ z_1 = 0 \iff \delta^{\underline{s}} = 0 . \end{array} \right.$$

$$\mathcal{T}e^{1,1} = -3\zeta(2) .$$

$$\mathcal{T}e^{1,3} = -\zeta(2)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2} = -\frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1} = -\zeta(2)\mathcal{T}e^1 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1} = -\frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1} = \frac{3}{2}\zeta(2)^2 .$$

Exemple 1 : l'absence de composante $\mathcal{T}e^1$ dans la réduction en monotangente.

■ Deux approches possibles :

- 1 Toute multitangente convergente est exponentiellement plate.



La composante $\mathcal{T}e^1$, dans la réduction en monotangente, est nulle.

- 2 Les multizêtas vérifient les relations de symétralité.



On dispose d'une expression intégrale des multizêtas (sensiblement différente de celle de Gonchorav) .



La composante $\mathcal{T}e^1$, dans la réduction en monotangente, est nulle.

Exemple 1 : l'absence de composante $\mathcal{T}e^1$ dans la réduction en monotangente. (Suite)

- Ces deux approches se mêlent en l'équivalence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Résultat analytique} \\ \text{sur les MTGFs :} \\ \\ \text{Caractère exponentiellement} \\ \text{plat des MTGFs.} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Relations algébriques} \\ \text{entre MZVs :} \\ \\ \text{Quelques relations} \\ \text{de symétrie.} \end{array} \right\}$$

- Exemples de relations obtenues :

$$(ze^2)^2 = 4ze^{3,1} + 2ze^{2,2} .$$

$$ze^3ze^2 = 6ze^{4,1} + 3ze^{3,2} + ze^{2,3} .$$

$$3ze^4ze^2 - 2(ze^3)^2 = 2ze^{3,3} + 3ze^{2,4}$$

Exemple 2 : les calculs de $\mathcal{T}e^{2[r]}(z)$ et $\mathcal{Z}e^{2[r]}$.

- Deux méthodes, indépendantes l'une de l'autre, donnent :

$$\mathcal{T}_2 = \sum_{r \geq 0} \mathcal{T}e^{2[r]}(z) X^r = 1 + \frac{\text{sh}^2(\pi\sqrt{X})}{\pi^2} \mathcal{T}e^2(z) \quad (1)$$

$$\mathcal{Z}_2 = \sum_{r \geq 0} \mathcal{Z}e^{2[r]} X^r = \frac{\text{sh}(\pi\sqrt{X})}{\pi\sqrt{X}} \quad (2)$$

- La réduction en monotangente donne :

$$\mathcal{T}_2 = 1 + X \mathcal{Z}_2^2 \mathcal{T}e^2(z) .$$

Donc : (1) \iff (2)

Moralité des deux exemples :

- La réduction en monotangentes est un lien entre les multizêtas et les multitangentes beaucoup plus fort que ce qu'elle laisse paraître à première vue.
- Chaque résultat (algébrique) sur les multizêtas semble se traduire en un résultat sur les multitangentes et réciproquement.

Notons : $\mathcal{MZV} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*}$ et $\mathcal{MZV}_2 = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}_2)}$.
 $\mathcal{MTGF} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*}$. et $\mathcal{MTGF}_2 = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}_2)}$.

Conjecture : Projection sur l'espace des multitangentes.

$$\forall (\underline{s}^1 ; \underline{s}^2) \in \mathcal{S}_{df}^* \times \mathcal{S}_d^*, \quad \mathcal{Z}e^{\underline{s}^1} \mathcal{T}e^{\underline{s}^2} \in \mathcal{MTGF}_2 .$$

Remarque : Il suffit de montrer que : $\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*, \quad \mathcal{Z}e^{\underline{s}} \mathcal{T}e^2 \in \mathcal{MTGF}_2$.

Ceci a été vérifié pour toute les séquences $\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*$ de poids inférieur à 12.

Exemples de projections sur l'espace des multitangentes.

$\ \underline{s}\ = 4$	$\mathcal{Z}e^2\mathcal{T}e^2 = \frac{1}{2}\mathcal{T}e^{2,2} .$
$\ \underline{s}\ = 5$	$\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^2 = \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,2} - \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{2,3} . \quad \mathcal{Z}e^{2,1}\mathcal{T}e^2 = \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,2} - \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{2,3} .$
$\ \underline{s}\ = 6$	$\begin{aligned} \mathcal{Z}e^4\mathcal{T}e^2 &= -\frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,3} . & \mathcal{Z}e^{3,1}\mathcal{T}e^2 &= -\frac{1}{24}\mathcal{T}e^{3,3} . \\ \mathcal{Z}e^{2,2}\mathcal{T}e^2 &= -\frac{1}{8}\mathcal{T}e^{3,3} . & \mathcal{Z}e^{2,1,1}\mathcal{T}e^2 &= -\frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,3} . \end{aligned}$
$\ \underline{s}\ = 7$	$\mathcal{Z}e^5\mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{30}\mathcal{T}e^{5,2} - \frac{1}{15}\mathcal{T}e^{4,3} + \frac{1}{15}\mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{30}\mathcal{T}e^{2,5} .$ \vdots

Des corollaires conjecturaux : Autour du nettoyage des 1 dans les multizêtas et les multitangentes.

Pour les multizêtas :

Théorème : (conjecturé par J. Blumlein, démontré par J. Ecalle.)

Alors, pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}_+^\bullet$, $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}$ s'écrit (explicitement) dans \mathcal{MZV}_2 .

Autrement dit :

$$\mathcal{MZV} = \mathcal{MZV}_2 .$$

☞ J. ECALLE : *The Flexion Structure and Dimorphy : Flexion Units, Singulators, Generators, and the Enumeration of Multizeta Irreducibles*, in "Asymptotic in dynamics, geometry and PDEs ; generalized Borel summation", Eds. O. Costin, F. Fauvet, F. Menous, D. Sauzin, Publications of the Scuola Normale Superiore, Pisa, 2011, Volume 12, p. 201-218.

Des corollaires conjecturaux : Autour du nettoyage des 1 dans les multizêtas et les multitangentes.

Pour les multitangentes :

Conjecture :

Alors, pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^\bullet$, $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ s'écrit (explicitement) dans \mathcal{MTGF}_2 .

Autrement dit :

$$\mathcal{MTGF} = \mathcal{MTGF}_2 .$$

Des corollaires conjecturaux : Autour du nettoyage des 1 dans les multizêtas et les multitangentes - Exemples de nettoyage des 1.

$p = 6$	$\mathcal{T}e^{3,1,2} = \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,3} + \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{2,4} - \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{4,2} .$ $\mathcal{T}e^{2,1,3} = \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,3} - \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{2,4} + \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{4,2} .$ $\mathcal{T}e^{2,1,1,2} = -\frac{1}{3}\mathcal{T}e^{3,3} .$
$p = 7$	$\mathcal{T}e^{4,1,2} = \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{2,2,3} - \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{5,2} + \frac{7}{48}\mathcal{T}e^{4,3} + \frac{23}{48}\mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{2,5}$ $\mathcal{T}e^{3,1,3} = \frac{1}{5}\mathcal{T}e^{2,3,2} .$ $\mathcal{T}e^{2,1,4} = \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{3,2,2} + \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{5,2} + \frac{13}{24}\mathcal{T}e^{4,3} + \frac{5}{24}\mathcal{T}e^{3,4} - \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{2,5} .$

Des corollaires conjecturaux : Absences de relations entre multizêtas et multitangentes de poids différents.

Pour les multizêtas :

Conjecture :

Il n'existe pas de relation entre multizêtas de poids différents :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k, \text{ où } \mathcal{Z}_k = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{si } k = 0. \\ \{0\}, & \text{si } k = 1. \\ \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}e^{\mathfrak{s}})_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{S}_+^{\bullet} \\ \|\mathfrak{s}\| = k}}, & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Des corollaires conjecturaux : Absences de relations entre multizêtas et multitangentes de poids différents.

Pour les multitangentes :

Conjecture :

Il n'existe pas de relation entre multitangentes de poids différents :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k, \text{ où } \mathcal{T}_k = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{si } k = 0. \\ \{0\}, & \text{si } k = 1. \\ \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\substack{\underline{s} \in \mathcal{S}_+^{\bullet} \\ \|\underline{s}\| = k}}, & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Des corollaires conjecturaux : Quelles implications ?

$$\blacksquare \left\{ \begin{array}{l} \text{Projection sur l'espace} \\ \text{des multitangentes} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{nettoyage des 1} \\ \text{pour les multitangentes} \end{array} \right\}$$

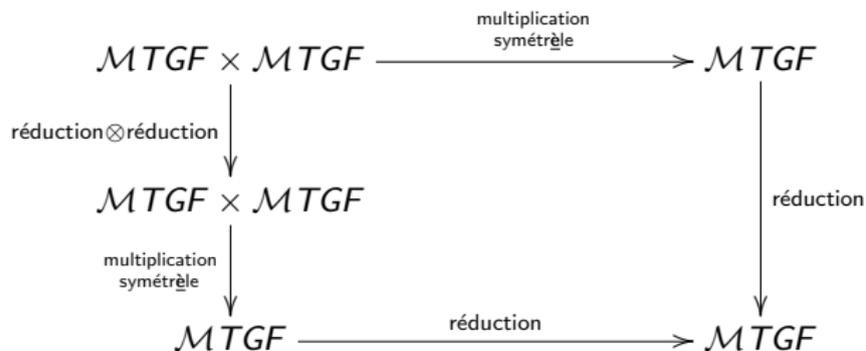
Si la projection sur l'espace des multitangentes est vraie, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{le nettoyage des 1} \\ \text{des multizêtas} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{le nettoyage des 1} \\ \text{pour les multitangentes} \end{array} \right\}$$

$$\blacksquare \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k \implies \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k \\ \text{projection sur MTGF} \end{array} \right\} \implies \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k .$$

La symétrélité de $\mathcal{T}e^\bullet$ entraîne la symétrélité de $\mathcal{Z}e^\bullet$.



Propriété :

La symétrélité de $\mathcal{T}e^\bullet$ et le diagramme commutatif précédent entraînent la symétrélité de $\mathcal{Z}e^\bullet$.

Rappel : Les multitangentes permettent de retrouver quelques relations de symétralité des multizêtas.

Les multitangentes redonnent les relations suivantes :

- Par le diagramme :

$$6Ze^{2,2} + 8Ze^4 = 5(Ze^2)^2 .$$

$$2Ze^{2,2} + Ze^4 = (Ze^2)^2 .$$

- Par l'absence de $\mathcal{T}e^1$:

$$2Ze^{2,2} + 4Ze^{3,1} = (Ze^2)^2 .$$

Conséquences : En poids 4, on obtient toutes les relations de symétrélité et de symétralité.

Les multitangentes redonnent les relations suivantes :

- Par le diagramme :

$$ze^{2,3} + ze^{3,2} + ze^5 = ze^2ze^3 .$$

$$ze^{2,1,2} + 2ze^{2,2,1} + ze^{2,3} + ze^{4,1} = ze^2ze^{2,1} .$$

$$ze^{2,1,2} + 2ze^{2,2,1} + 2ze^{2,3} + 3ze^{3,2} + 7ze^{4,1} = ze^2(ze^3 + ze^{2,1}) .$$

$$4ze^{2,3} + 6ze^{3,2} + 15ze^5 = 10ze^2ze^3 .$$

- Par l'absence de $\mathcal{T}e^1$:

$$ze^{2,3} + 3ze^{3,2} + 6ze^{4,1} = ze^2ze^3 .$$

Conséquences :

- La dernière relation n'est pas indépendante des autres.
- En poids 5, on obtient toutes les relations de symétrélité, mais il manque une relation de symétralité :

$$3ze^{2,2,1} + 6ze^{3,1,1} + ze^{2,1,2} = ze^{2,1}ze^2 .$$

En poids 6, on obtient :

- toutes les relations de symétrélité.
- mais il manque des relations de symétralité :

$$ze^3 ze^{2,1} = 5ze^{3,2,1} + 9ze^{4,1,1} + 2ze^{3,1,2} + 2ze^{2,3,1} + ze^{2,2,2} + ze^{2,1,3} .$$

$$ze^{2,2} ze^2 = 3ze^{2,2,2} + 4ze^{3,1,2} + 4ze^{3,2,1} + 4ze^{2,3,1} .$$

$$ze^{3,1} ze^2 = ze^{2,3,1} + 4ze^{3,2,1} + 9ze^{4,1,1} + ze^{3,1,2} .$$

$$(ze^{2,1})^2 = 2ze^{2,1,2,1} + 6ze^{2,2,1,1} + 12ze^{3,1,1,1} .$$

$$ze^2 ze^{2,1,1} = 4ze^{2,2,1,1} + 8ze^{3,1,1,1} + 2ze^{2,1,2,1} + ze^{2,1,1,2} .$$

- $(Ze^2)^2 = 4Ze^{3,1} + 2Ze^{2,2}$ se projette dans l'espace des multitangentes en l'égalité :

$$2Te^{3,3} = 21Te^{2,2,2} + 48Te^{2,1,3} + 48Te^{3,1,2} .$$

- Cette dernière relation se démontre indépendamment des multizêtas et permet de retrouver la relation de symétralité :

$$(Ze^2)^2 = 4Ze^{3,1} + 2Ze^{2,2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^{2,1} \mathcal{T}e^3 &= \frac{1}{4} \mathcal{T}e^2 \mathcal{T}e^{2,1,3} - \frac{1}{4} \mathcal{T}e^2 \mathcal{T}e^{3,1,2} - \frac{1}{24} \mathcal{T}e^{2,3,3} - \frac{1}{8} \mathcal{T}e^{2,2,4} - \frac{1}{8} \mathcal{T}e^{3,1,4} \\ &\quad - \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{2,1,5} + \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{5,1,2} + \frac{1}{8} \mathcal{T}e^{4,2,2} + \frac{1}{8} \mathcal{T}e^{4,1,3} + \frac{1}{24} \mathcal{T}e^{3,3,2} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3\mathcal{Z}e^{2,2,1} + 6\mathcal{Z}e^{3,1,1} + \mathcal{Z}e^{2,1,2}) \mathcal{T}e^3 &= \frac{3}{2} \mathcal{T}e^{4,1,1,2} - \frac{3}{2} \mathcal{T}e^{2,1,1,4} + 2\mathcal{T}e^{2,2,1,3} - 2\mathcal{T}e^{3,1,2,2} \\ &\quad + \mathcal{T}e^{2,3,1,2} - \mathcal{T}e^{2,1,3,2} + \frac{1}{2} \mathcal{T}e^{2,3,3} - \frac{1}{2} \mathcal{T}e^{3,3,2} \\ &\quad + \frac{3}{4} \mathcal{T}e^{2,2,4} - \frac{3}{4} \mathcal{T}e^{4,2,2} + \frac{11}{24} \mathcal{T}e^{2,6} - \frac{11}{24} \mathcal{T}e^{6,2} \\ &\quad + \frac{11}{12} \mathcal{T}e^{3,5} - \frac{11}{12} \mathcal{T}e^{5,3} . \end{aligned}$$

Ainsi, la relation $3Ze^{2,2,1} + 6Ze^{3,1,1} + Ze^{2,1,2} = Ze^{2,1}Ze^2$ est équivalente à la relation entre multitangentes :

$$\begin{aligned}
 & 36Te^{2,1,1,4} + 6Te^{2,1,2,3} + 30Te^{2,1,3,2} + 36Te^{3,1,2,2} + 9Te^{4,1,3} + 7Te^{3,3,2} \\
 & + 21Te^{4,2,2} + 11Te^{6,2} + 22Te^{5,3} \\
 = & \\
 & 36Te^{4,1,1,2} + 6Te^{3,2,1,2} + 30Te^{2,3,1,2} + 36Te^{2,2,1,3} + 9Te^{3,1,4} + 7Te^{2,3,3} \\
 & + 21Te^{2,2,4} + 11Te^{2,6} + 22Te^{3,5} .
 \end{aligned}$$

- Les multitangentes semblent être un modèle fonctionnel intéressant pour l'étude des multizêtas.
- Un lien très profond existe entre les deux type d'objets, **la réduction en monotangentes** ; un autre lien important mais conjectural existe, **la projection sur les multitangentes**.
- Les multitangentes ne permettent pas de retrouver la dimorphie des multizêtas, mais seulement $1 + \frac{1}{2}$ symétries.
- Les relations de symétralité manquantes semble se retrouver tout de même, mais de manière compliquée...