

Résumé de recherches doctorales.

Olivier Bouillot

30 novembre 2012

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Rappels et contexte mathématique. | 2 |
| 1.1 | Quelques rappels sur la sommation de Borel et la théorie de la résurgence. | 2 |
| 1.2 | Multizêtas et multitangentes. | 5 |
| 1.3 | Autour des invariants holomorphes. | 6 |
| 2 | Formule universelle et algorithmes de calculs des invariants. | 9 |
| 2.1 | Cadre de travail et notations. | 9 |
| 2.2 | Expression de l'application de cornes. | 10 |
| 2.3 | Formule universelle pour les invariants. | 10 |
| 2.4 | Méthodes de calculs des invariants. | 13 |
| 3 | Etude des multitangentes. | 16 |
| 3.1 | Définition et premières propriétés. | 16 |
| 3.2 | Réduction en monotangentes et projection sur l'espace des multitangentes. | 17 |
| 3.3 | Renormalisation des multitangentes divergentes. | 19 |
| 3.4 | Relations entre multizêtas retrouvées par l'étude des multitangentes. . . | 20 |
| 4 | Conclusion | 21 |

Nous nous proposons dans ces quelques pages de présenter un résumé de notre recherche doctorale. Celle-ci comporte deux parties distinctes et indépendantes, mais qui sont aussi étroitement liées. La première, de nature analytique, concerne le calcul effectif en séries de multizêtas des invariants holomorphes d'un difféomorphisme local f de \mathbb{C} dans le cas-type, ayant l'origine pour point fixe ; elle concerne aussi le calcul numérique de ces invariants. La seconde partie, de nature plus algébrique, traite des fonctions multitangentes ; plus précisément, elle présente une recherche des relations liant les multitangentes entre-elle, notamment celles qui sont responsables de l'invariance des quantités étudiées dans la première partie.

Ce travail, dans son ensemble, comprend à la fois de l'analyse complexe (théorie de la résurgence, dynamique holomorphe et théorie des singularités) et de la théorie des nombres (recherche de relations algébriques liant des nombres entre eux). La méthode employée, dans les deux parties, relève du calcul moulien.

Enfin, indiquons que, dans ce texte, toutes les références à un paragraphe que l'on pourra trouver renvoient au dit paragraphe de la thèse elle-même.

1 Rappels et contexte mathématique.

Avant d'introduire la notion d'invariants, nous présenterons brièvement les rudiments techniques nécessaires à leur calcul. Ensuite, nous introduirons deux objets apparentés : les multizêtas (qui sont des nombres) et les multitangentes (qui sont des fonctions) . Il s'agit des deux types de briques élémentaires des invariants holomorphes : les multitangentes interviennent naturellement dans le calcul des invariants, alors que les multizêtas permettent leur calcul.

Viendra alors notre première problématique : le calcul des invariants holomorphes. A travers l'exemple d'une équation aux différences, nous expliquerons comment le procédé de sommation de Borel permet d'arriver au prototype des résultats que l'on obtiendra. Nous introduirons ensuite la notion d'invariants et expliquerons leur complexité.

1.1 Quelques rappels sur la sommation de Borel et la théorie de la résurgence.

1.1.1 Le procédé de sommation sectoriel de Borel.

La transformation \mathcal{B} de "Borel formelle" est une opération agissant sur $\frac{1}{z}\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$, à valeurs dans $\mathbb{C}[[\zeta]]$, définie par $\mathcal{B} : \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{z^{n+1}} \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{n!} \zeta^n$.

Cette transformation est bien connue et vérifie des propriétés calculatoires simples. Elle possède un inverse (formel à ce stade), la transformation de Laplace \mathcal{L}^θ . Cet inverse est un opérateur linéaire défini sur l'ensemble des fonctions φ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \zeta \mapsto \varphi(\zeta) \text{ est analytique sur un ouvert de } \mathbb{C} \text{ contenant } \{\zeta \in \mathbb{C} ; \arg \zeta = \theta\} . & (1) \\ \exists C > 0 , \exists \tau > 0 , \forall r > 0 , |\varphi(re^{i\theta})| \leq Ce^{\tau r} . & (2) \end{cases}$$

L'idée (dûe à Emile Borel) est alors d'effectuer une transformée de Borel formelle à une série $\tilde{\varphi}$ (souvent divergente, en vue de rétablir sa convergence si ses coefficients ne

grossissent pas trop vite), puis de déterminer sa transformée de Laplace pour obtenir une somme ou un prolongement analytique de $\tilde{\varphi}$ à un demi-plan de \mathbb{C} .

Ce procédé est général et s'appelle naturellement procédé de sommation de Borel :

Définition : Etant donné $\theta \in \mathbb{R}$, nous dirons que $\tilde{\varphi} \in \frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$ est Borel-sommable dans la direction θ et nous noterons $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}, \theta}$ lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$ se prolonge analytiquement sur un voisinage Ω de $e^{i\theta} \mathbb{R}_+$.
2. $\exists C > 0, \exists \tau > 0, \forall \zeta \in \Omega, |\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C e^{\tau|\zeta|}$.

Dans ce cas, la somme de Borel correspondante, notée $S^\theta(\tilde{\varphi})$, est définie par :

$$S^\theta(\tilde{\varphi}) = \mathcal{L}^\theta(\mathcal{B}(\tilde{\varphi})) .$$

Une telle somme est alors automatiquement analytique sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} ; \Re(e^{i\theta} z) > \tau\}$.

Ce procédé est résumé par le diagramme de la figure 1 (cf. page 4).

Cependant, nous avons envie, lorsque cela est possible, de faire varier la direction de Borel-sommabilité. On dit alors qu'une série formelle $\tilde{\varphi}$ est uniformément Borel-sommable dans l'intervalle de direction $[\theta_1; \theta_2]$ lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

1. $\hat{\varphi}$ se prolonge analytiquement sur un voisinage de $\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$.
2. $\exists (C; \tau) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall \zeta \in \Omega, |\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C e^{\tau|\zeta|}$.

Pour une telle série formelle φ , il est possible de faire varier la direction de sommation entre θ_1 et θ_2 dans l'application du procédé de Borel. Les différentes sommes de Borel se prolongent alors analytiquement les unes avec les autres. Ceci vaut tant que $\hat{\varphi}$ ne possède pas de singularité sur le secteur angulaire Ω . Sinon, c'est l'apparition du phénomène de Stokes.

1.1.2 Rappels sur la résurgence.

De manière générale, l'une des idées phare de la théorie de la résurgence est de dire que les séries divergentes provenant de problèmes naturels (i.e. issues de l'étude d'équations aux différences, d'équations différentielles, de dynamique holomorphe, \dots) possèdent des transformées de Borel dont les singularités sont "analysables" et apparentées. Pour mieux comprendre ces singularités, Jean Ecalle a alors développé, à la fin des années 1970, un calcul différentiel sur une certaine classe de fonctions : le calcul différentiel étranger agissant sur l'algèbre des fonctions résurgentes.

Pour tout $\omega \in \Omega = 2i\pi\mathbb{Z}^*$, nous allons définir un opérateur linéaire "mesurant" les singularités au voisinage de Ω : $\Delta_\omega : \widetilde{\text{RES}}^{\text{simple}} \longrightarrow \widetilde{\text{RES}}^{\text{simple}}$.

Ici, $\widetilde{\text{RES}}^{\text{simple}}$ désigne l'ensemble des fonctions résurgentes dans le modèle formel. Il s'agit des séries formelles $\tilde{\varphi}$ dont la transformée de Borel $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$ possède des singularités simples, du type logarithmiques, au dessus de Ω et se prolongeant sans fin sur \mathbb{C} , c'est-à-dire qu'il existe, pour toute ligne brisée finie L , un ensemble fini $\Omega_L \subset L$ de singularités tel que φ se prolonge analytiquement le long de tous les chemins possibles obtenus en suivant L et en contournant chaque point de Ω_L soit à gauche, soit à droite.

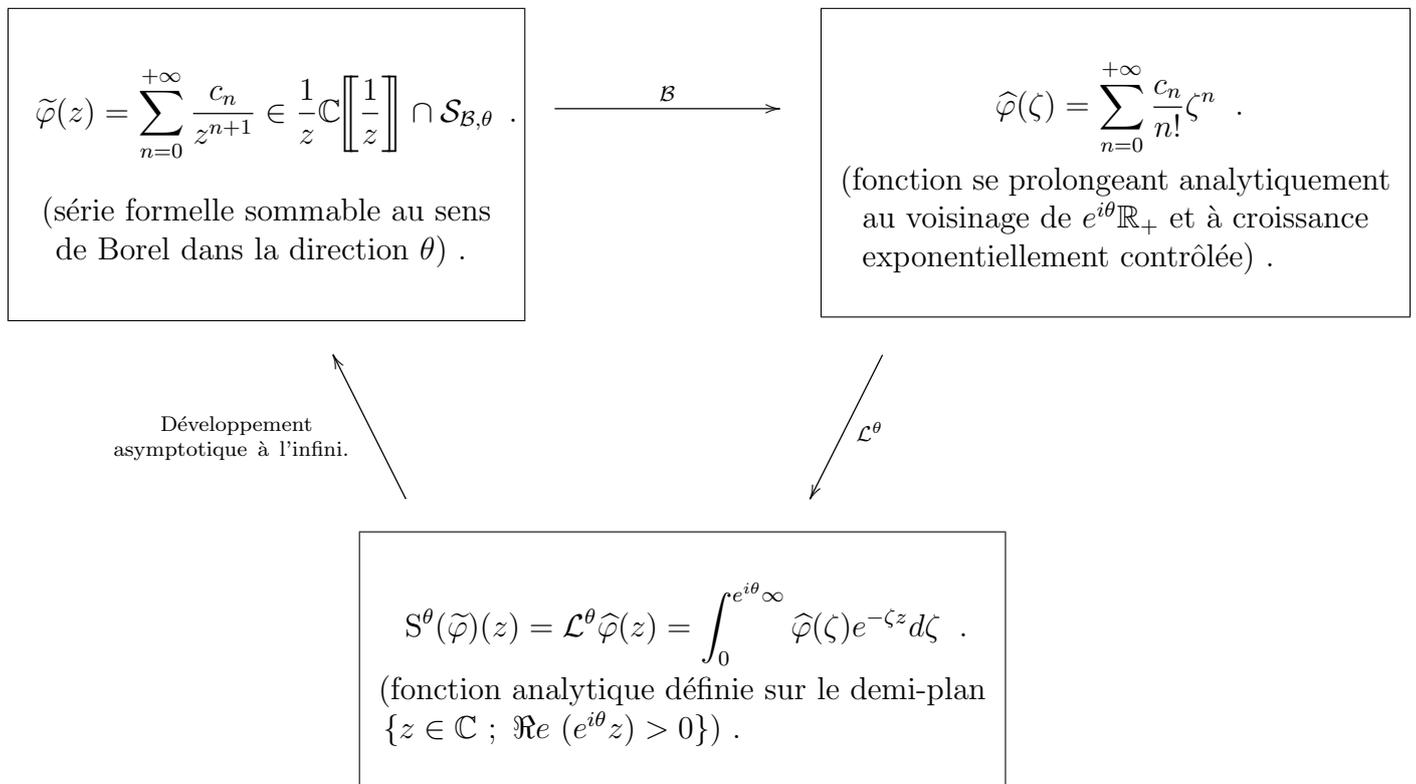


Figure 1 : Procédé de sommation de Borel dans la direction θ .

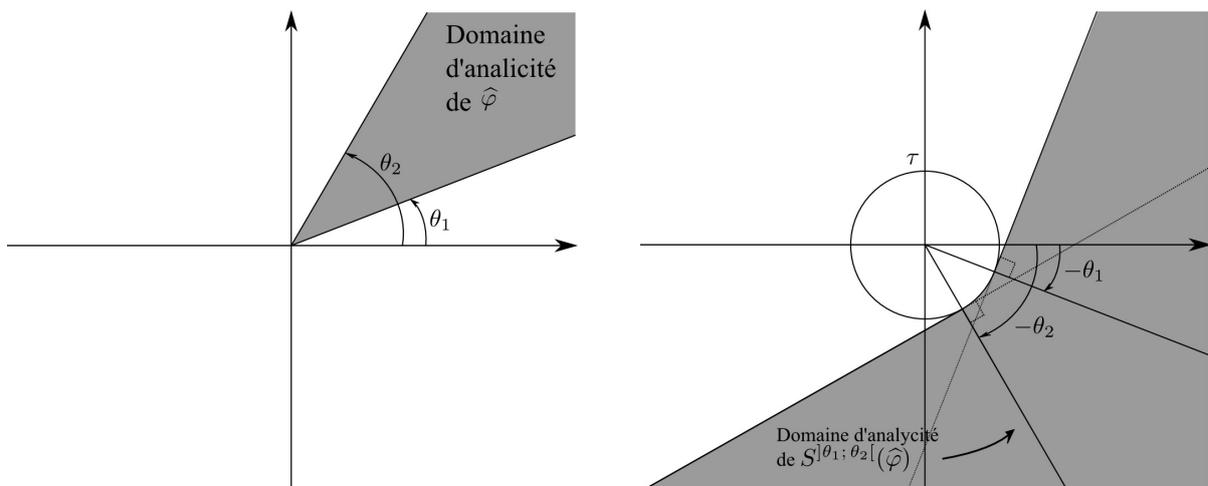
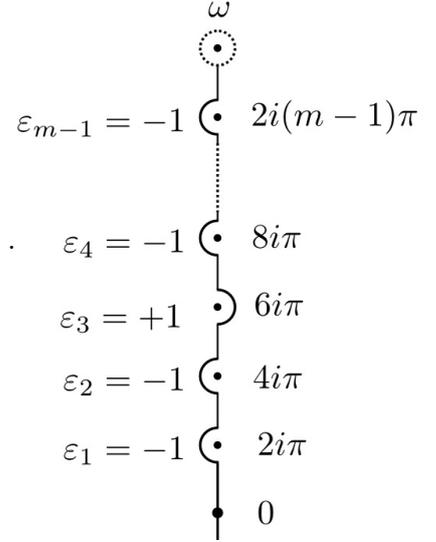


Figure 2 : Resommation sectorielle.

L'action de la dérivée étrangère Δ_ω sur $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\text{RES}}^{\text{simple}}$ est alors définie par la formule :

$$\Delta_\omega(\hat{\varphi}) = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_{\pm 1}; \dots; \varepsilon_{\pm(m-1)}) \in \{+1; -1\}^{|m|-1}} \frac{p(\varepsilon)! q(\varepsilon)!}{m!} \text{sing}_\omega(\text{cont}_{\gamma(\varepsilon)} \hat{\varphi}) .$$

Ici, $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$, $p(\varepsilon)$ et $q(\varepsilon)$ désignent respectivement le nombre de signes $+$ et $-$ dans ε . De plus, $\text{cont}_{\gamma(\varepsilon)}$ désigne le prolongement analytique de $\hat{\varphi}$ le long du chemin $\gamma(\varepsilon)$ alors que sing_ω désigne la prise de développement asymptotique au voisinage du point ω .



La définition précise de la dérivée étrangère Δ_ω est, certes, compliquée, mais il est clair qu'elle agit trivialement sur une fonction régulière en ω . L'autre point important est qu'il s'agit bien d'une dérivation.

1.2 Multizêtas et multitangentes.

1.2.1 Les multizêtas.

Les multizêtas sont les nombres définis, pour les séquences $(s_1; \dots; s_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, $r \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $s_1 \geq 2$, par les sommes suivantes :

$$\mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r} = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} .$$

Lorsque $r = 1$, ces nombres sont simplement les valeurs de la fonction ζ de Riemann appliquée aux entiers. Leur première introduction remonte à l'année 1775 lorsqu'Euler étudia le cas des multizêtas de longueur 2.

Aujourd'hui, les multizêtas interviennent dans des branches des mathématiques aussi variées que la théorie des nombres, les groupes quantiques, la théorie des noeuds, la physique mathématique, l'étude des diagrammes de Feynman, l'étude de $\mathbb{P}^1 - \{0; 1; \infty\}$, l'étude du "groupe de Galois absolu", ...

Actuellement, l'une des questions importantes est la compréhension des nombreuses relations entre ces nombres. Les plus importantes sont les relations dites de symétralité et de symétrélité qui, une fois étendues au cas divergent, semblent, de l'avis unanime des chercheurs s'intéressant à ces nombres, engendrer toutes les autres relations possibles, et donc épuiser leur arithmétique.

1.2.2 Les multitangentes.

Les multitangentes sont les fonctions définies, pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, par les sommes :

$$\mathcal{T}e^{s_1, \dots, s_r}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} .$$

Ici¹, $(s_1; \dots; s_r) \in \mathcal{S}^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2 \text{ et } s_r \geq 2\}$.

Les multitangentes sont, en fait, une généralisation à plusieurs variables des séries d'Einsenstein, définies par :

$$E_k(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^k}, \quad k \in \mathbb{N} - \{0; 1\}, \quad z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}.$$

Les multitangentes semblent être apparues en théorie de la résurgence pour la première fois dans un texte de Jean Ecalle. A notre connaissance, elles n'avaient jusque là jamais été étudiées systématiquement pour elles-mêmes, alors qu'il s'agit d'un objet mathématique intéressant et tout à fait naturel.

1.3 Autour des invariants holomorphes.

1.3.1 Etude d'une équation aux différences.

Dans tout ce paragraphe, fixons-nous un germe de fonction holomorphe $a \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left\{ \frac{1}{z} \right\}$ et étudions l'équation aux différences dont l'inconnue est la série formelle $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}(z+1) - \tilde{\varphi}(z) = a(z). \quad (3)$$

En notant $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$, où $\tilde{\varphi}$ est une solution de (3), on a $\hat{\varphi}(\zeta) = \frac{\hat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1}$, ce qui définit une fonction méromorphe sur \mathbb{C} dont les pôles ne peuvent être situés qu'en $2i\pi\mathbb{Z}^*$. Ainsi, l'équation possède une unique solution $\tilde{\varphi} \in \frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$ qui est donc S-résurgente et vérifie : $\Delta_\omega \hat{\varphi} = -\hat{a}(\omega) = (1 - e^{-\omega}) \hat{\varphi}(\omega)$, pour $\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$. Ainsi, $\hat{\varphi}$ "re-surgit" en la singularité ω .

De plus, $\tilde{\varphi}$ est sommable au sens de Borel dans les directions $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \left[$. Le principe de re-sommation sectorielle donne donc deux fonctions analytiques, φ^+ et φ^- , solutions de (3) et définies par :

$$\varphi^+ = \mathcal{L}^\theta \left(\frac{\hat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1}, \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \left[\quad \text{et} \quad \varphi^- = \mathcal{L}^\theta \left(\frac{\hat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1}, \theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \left[\right.$$

Il existe alors une constante $\tau > 0$ telle que φ^+ et φ^- soient analytiques sur des domaines du type $\mathcal{D}^+ = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} ; d(z; \mathbb{R}_-) \leq \tau\}$ et $\mathcal{D}^- = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} ; d(z; \mathbb{R}_+) \leq \tau\}$:

On vérifie alors facilement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall z \in \mathbb{C}, \Im m z < -\tau, \varphi^+(z) - \varphi^-(z) = - \sum_{\omega \in 2i\pi\mathbb{N}^*} 2i\pi \hat{a}(\omega) e^{-\omega z} . \\ \forall z \in \mathbb{C}, \Im m z > \tau, \varphi^+(z) - \varphi^-(z) = - \sum_{\omega \in -2i\pi\mathbb{N}^*} 2i\pi \hat{a}(\omega) e^{-\omega z} . \end{array} \right.$$

¹ Si Ω est un ensemble, nous désignons par $\text{seq}(\Omega)$ l'ensemble des séquences dont les éléments appartiennent à Ω . Contrairement à la notation habituelle, à savoir Ω^* , nous pourrions noter plus facilement les séquences d'entiers non nuls par $\text{seq}(\mathbb{N}^*)$, ce qui se serait noté traditionnellement par $(\mathbb{N}^*)^*$...

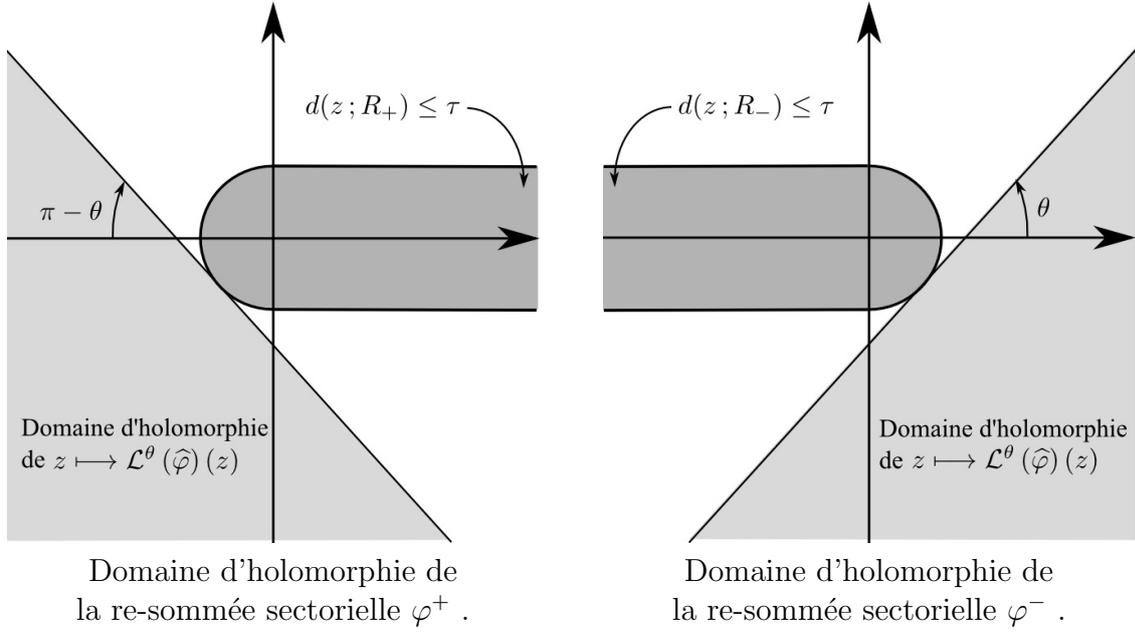


Figure 3 : **Illustration des complémentaires de D^- et D^+ .**

Enfin, on peut remarquer que $\varphi^+(z) = -\sum_{k=0}^{+\infty} a(z+k)$ et $\varphi^-(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a(z-k)$.

Alors, si $a(z) = \frac{1}{z^p}$ pour $p \geq 2$, l'expression de $\varphi^- - \varphi^+$ donne une monotangente (c'est-à-dire une multitangente de longueur 1) et son développement en série de Fourier.

En résumé, la résolution de cette équation produit des fonctions S-résurgentes ; la méthode établit un premier lien entre ce calcul et les multitangentes. Qui plus est, celle-ci, convenablement itérée, nous sera à nouveau utile pour calculer les invariants holomorphes des difféomorphismes tangents à l'identité et renforcera le lien avec les multitangentes.

1.3.2 Notion d'itérateur direct et d'itérateur réciproque.

On sait que tout difféomorphisme local f de \mathbb{C} , ayant l'origine pour point fixe, est formellement conjugué à un difféomorphisme du type $f_{p,\rho} = \exp(X_{p,\rho}) \cdot Id$. Après avoir effectué pour des raisons techniques le changement de variable $z = x^{-1}$, envoyant l'origine à l'infini, le champ de vecteurs $X_{p,\rho}$ devient (en notant toujours ∂_z la dérivée ordinaire par rapport à la variable z) :

$$X_{p,\rho} = \frac{1}{p} \frac{z^{-p}}{1 + \rho z^{-p}} z \partial_z .$$

On vérifie facilement que l'équation de conjugaison $f \circ u = u \circ f_{p,\rho}$, d'inconnue u , admet alors une unique solution formelle du type $u(z) = z + \varphi(z)$, où $\varphi \in \frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$. Celle-ci s'appelle itérateur réciproque de f , elle est notée $*f$ et vérifie par construction :

$$f \circ *f = *f \circ f_{p,\rho} . \tag{4}$$

De même, appelons aussi itérateur direct de f , et notons f^* , l'inverse de $*f$. Il s'agit de l'unique série formelle du type $v(z) = z + \psi(z)$, où $\psi \in \frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$, vérifiant $v \circ f = f_{p,\rho} \circ v$.

Le cas-type correspond au cas où le champ de vecteurs $X_{p,\rho}$ est le plus simple possible : c'est obtenu lorsque $(p; \rho) = (1; 0)$. Dans ce cas, $f_{p,\rho}$ devient alors : $f_{p,\rho}(z) = z + 1 = l(z)$. Son nom provient du fait qu'il est représentatif de ce qui se passe pour les autres classes de conjugaison formelle. Dorénavant, nous nous placerons dans ce cas.

1.3.3 L'équation du pont, porteuse des invariants analytiques.

L'équation (4) se réécrit alors sous la forme :

$$\tilde{\varphi}(z+1) - \tilde{\varphi}(z) = a(z + \tilde{\varphi}(z)), \text{ où } a(z) = f(z) - (z+1). \quad (5)$$

On est alors dans une situation similaire à celle de l'équation aux différences (3), puisque le second membre de (5) s'interprète comme une perturbation du second membre de (3). La méthode de résolution de (3) permet alors de trouver "l'équation du pont", qui s'écrit : $\Delta_\omega^* f(z) = \mathbb{A}_\omega^* f(z)$, pour tout $\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$. Ici, pour tout $\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$, \mathbb{A}_ω est un opérateur différentiel d'ordre 1, de la forme $\mathbb{A}_\omega = A_\omega \partial_z$ où $A_\omega \in \mathbb{C}$.

L'importante suite scalaire des $(A_\omega)_{\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*}$ est une suite d'invariants. Par invariance, on entend conjugaison du difféomorphisme local f par un autre difféomorphisme local.

De plus, cette suite forme un système complet d'invariants. Cela signifie qu'elle permet d'énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que deux difféomorphismes soient analytiquement conjugués : deux difféomorphismes de \mathbb{C} tangents à l'identité, d'invariants $(A_\omega^1)_{\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*}$ et $(A_\omega^2)_{\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*}$ respectivement, sont analytiquement conjugués si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$, on ait : $A_\omega^2 = e^{-\omega c} A_\omega^1$.

Enfin, cette suite forme un système libre d'invariants : la suite $(A_\omega)_{\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*}$ cesse d'être un système complet dès qu'on lui retire un élément quelconque.

S'agissant de *fonctions*, les qualificatifs "holomorphe" et "analytique" sont presque synonymes. S'agissant d'*invariants*, on va leur donner des qualifications bien distinctes :

1. Un invariant sera dit *analytique* (par opposition à *formel*) s'il est invariant relativement aux changements de cartes, ou conjugaison analytique (par opposition à la conjugaison formelle).
2. Un invariant sera dit *holomorphe* s'il est fonction holomorphe du difféomorphisme f , c'est-à-dire de l'infinité des coefficients de Taylor².

Dans notre contexte, c'est-à-dire lorsque le multiplicateur $f'(0)$ vaut 1 ou est une racine de l'unité (ce qui est presque la même chose), la suite $(A_\omega)_{\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*}$ est une suite d'invariants analytiques et holomorphes, générant un système complet et libre.

1.3.4 Des objets complexes, mais explicitement calculables.

De nombreux dynamiciens posent régulièrement la question : «Peut-on calculer ces invariants ?» Ils ont idée que cela n'est pas possible, mais y attachent beaucoup d'importance et seraient très heureux d'être capables de les calculer. En effet, ces nombres codent

² A l'exclusion du premier coefficient non nul.

complètement la dynamique du difféomorphisme. Pouvoir les calculer, avec autant de décimales que l'on veut, permettrait de faire avancer plus vite certaines questions.

Malheureusement, ces invariants holomorphes ont la réputation infondée d'être pour certains incalculables, pour d'autres très difficiles à calculer. Une première explication tient aux différentes causes de divergence en dynamique holomorphe. Il y en a trois : la présence de petits diviseurs liouvilliens, la présence de petits diviseurs mécaniques ou encore notre contexte. Dans les deux premières classes, la situation est sans espoir. Dans la troisième classe, la situation est toute autre : le calcul explicite est possible, mais coûteux (à l'exception des deux premiers invariants) . Une autre explication de cette réputation est liée aux méthodes géométriques que les dynamiciens utilisent, pourtant très performantes, mais assez mal adaptées dans ce contexte.

Bien entendu, même si dans notre cadre, ces nombres sont calculables, ils n'en sont pas moins très compliqués. Il ne peut en être autrement puisque les objets auxquels ils sont liés (les ensembles de Julia ou de Mandelbrot), ainsi que leurs ingrédients, les multizêtas, sont tous très complexes. Mais, par définition même, ils sont parfaitement calculables. La réalisation explicite de ce calcul est l'objet central de toute la première partie de ce travail.

2 Formule universelle et algorithmes de calculs des invariants.

L'objectif de la première partie de ce travail est de convaincre que les invariants holomorphes sont des objets calculables à haute précision, mais aussi que l'on connaît leur structure interne (à savoir des rationnels, des multizêtas et des coefficients de Taylor). Alors que les invariants holomorphes ont la réputation d'être incalculables, on se propose de montrer la possibilité de leur calcul par différentes méthodes. Précisément, dans cette partie, on exposera une formule explicite et universelle à la base d'un des algorithmes de calcul.

2.1 Cadre de travail et notations.

Considérons un difféomorphisme f tangent à l'identité dont le résidu itératif est nul, c'est-à-dire s'exprimant à l'infini sous la forme :

$$f(z) = z + 1 + \gamma^+(z) , \text{ où } \gamma^+(z) = \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{z^{n-1}} .$$

On suppose que la série définissant γ^+ est convergente au voisinage de $+\infty$, ce qui s'exprime par : $\exists(C_0; C_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $|a_n| \leq C_0 C_1^n$. Notons aussi $g(z) = f(z) - 1$, de sorte que : $f = l \circ g$, où $l(z) = z + 1$.

On dispose de deux itérateurs direct et réciproque formels, ${}^*f(z) = z + \tilde{\varphi}(z)$ et $f^*(z) = z + \tilde{\psi}(z)$, vérifiant les équations du pont :

$$\begin{cases} \forall \omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^* , \Delta_\omega f^* = -A_\omega e^{-\omega(f^* - id)} . \\ \forall \omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^* , \Delta_\omega {}^*f = A_\omega \partial_z . \end{cases}$$

Ces deux itérateurs formels permettent de définir des itérateurs sectoriels, \mathbf{f}_+^* , \mathbf{f}_-^* , ${}^*\mathbf{f}_+$ et ${}^*\mathbf{f}_-$, qui sont des fonctions holomorphes sur des domaines du type \mathcal{D}^+ et \mathcal{D}^- respectivement.

La différence $\varphi^+ - \varphi^-$ considérée lors de la résolution de l'équation (3) admet ici comme analogue l'application de cornes π^+ définies par : $\pi^+ = \mathbf{f}_+^* \circ {}^*\mathbf{f}_-$. Celle-ci est définie sur tout \mathbb{C} privé d'une bande contenant l'axe des abscisses. Il est aisé de voir que $\pi^+ - id$ est une fonction 1-périodique dont les coefficients de Fourier sont³ les invariants holomorphes de f .

2.2 Expression de l'application de cornes.

Bien qu'il s'agisse d'un objet très compliqué, on dispose d'une formule explicite pour l'application de cornes π^+ :

$$\pi^+(z) = z + \sum_{r \geq 1} \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+ \cdot z \quad . \quad (6)$$

Ici, $\Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+$ est un opérateur agissant sur les fonctions tests comme suit :

$$\begin{cases} \Gamma_n^+ \cdot \varphi(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{(g(z+n) - z)^k}{k!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial z^k} . \\ \Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+ = \Gamma_{n_r}^+ \circ \dots \circ \Gamma_{n_1}^+ . \end{cases}$$

Ce résultat important revient à Jean Ecalle. Malheureusement, il est peu connu car la démonstration que son auteur en a donné est elliptique ; aussi, la démonstration utilise les notations mouliennes. Notre contribution dans ce résultat a été de préciser et présenter des éléments de calcul moulien (cf. Annexe A) mais surtout de reprendre la preuve originale en présentant tous les détails omis (cf. §2).

Rappelons aussi que la convergence de (6) est normale sur tout compact de \mathbb{C} contenu dans l'ensemble de définition de π^+ . Avec ce mode de convergence, la formule (6) sera notre point de départ.

2.3 Formule universelle pour les invariants.

A partir de maintenant, on notera $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq p\}$.

Expression de l'application de cornes et des invariants : Il s'agit de déduire de (6) l'expression des invariants holomorphes. Pour cela, on va développer l'expression de $\Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+ \cdot z$, l'insérer dans (6), puis permuter les sommes pour faire apparaître des multitangentes.

On obtient typiquement le résultat suivant (cf. §3) :

³ Il ne s'agit pas à proprement parler des invariants holomorphes A_ω , mais des A_ω^+ qui dépendent polynomialement des A_ω . Mais ce détail technique est sans importance.

Théorème 1 : Considérons la famille de rationnels $H_{\underline{s}}^{\underline{n}}$, où $(\underline{s}; \underline{n}) \in \text{seq}(\mathbb{N}_3) \times \text{seq}(\mathbb{N}_2)$, définie récursivement par :

$$H_{\underline{s}, s_{l+1}}^{\underline{n}} = \sum_{\substack{(\underline{n}'; \underline{n}'') \in (\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})^2 \\ \underline{s}' \in \text{seq}(\mathbb{N}_2) \\ \underline{n}' \cdot \underline{n}'' = \underline{n}, \underline{s}' \leq \underline{s} \\ \|\underline{s}'\| + l(\underline{n}'') = \|\underline{s}\| \\ s_{l+1} + l(\underline{n}'') = \|\underline{n}''\|}} (-1)^{\|\underline{s}\| - \|\underline{s}'\|} H_{\underline{s}'}^{\underline{n}'} \left(\prod_{k=1}^{l(\underline{s})} \binom{s_k - 1}{s'_k - 1} \right).$$

Notons aussi A_{\bullet} le comoule défini sur $\text{seq}(\mathbb{N}_2)$ par :

$$\forall \underline{n} \in \text{seq}(\mathbb{N}_2), A_{\underline{n}} = a_{n_1} \cdots a_{n_r}.$$

Alors, l'application de cornes π^+ est donnée par les expressions suivantes :

$$\pi^+ = \sum_{\substack{(\underline{s}; \underline{n}) \in \text{seq}(\mathbb{N}_2) \times \text{seq}(\mathbb{N}_3) \\ l(\underline{n}) \geq l(\underline{s}) \\ \|\underline{n}\| = \|\underline{s}\| + 1}} A_{\underline{n}} H_{\underline{s}}^{\underline{n}} \mathcal{T}e^{\underline{s}} \quad (7)$$

$$= \sum_{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}_2)} He_{\underline{s}} \mathcal{T}e^{\underline{s}} \quad (8)$$

$$= \sum_{\underline{n} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)} A_{\underline{n}} \mathcal{T}^{\underline{n}}. \quad (9)$$

Ici, les expressions (8) et (9) se déduisent de (7) après regroupement des séquences $\underline{n} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$ et $\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}_2)$ respectivement. Remarquons aussi que (8) est une contraction moule-comoule.

En fait, pour démontrer ce théorème, une permutation de sommes est nécessaire, mais celle-ci n'est pas simple à justifier. C'est une difficulté de taille, mais puisqu'il s'agit des coefficients de Fourier de π^+ que l'on cherche à calculer, la convergence de (6) étant normale sur tout compact, il n'est pas difficile de permuter l'intégrale de Fourier avec la somme. Le calcul se poursuit alors en montrant que chaque intégrale à calculer est une intégrale de Fourier d'une multitangente (cf. §3). Il reste donc à calculer les coefficients de Fourier des multitangentes, ce qui n'est pas difficile et est fait dans la seconde partie (cf. Partie 2, §7). On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 2 : Notons $\mathcal{MZV} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*}$, où $\mathcal{S}_d^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2\}$.

Notons aussi $\text{sg}(N)$ le signe de l'entier N et $A_{\underline{n}} = a_{n_1} \cdots a_{n_r}$.

Alors, il existe des coefficients explicites $(\widehat{\tau}_N^{\underline{n}})_{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)} \in \mathcal{MZV}^{\text{seq}(\mathbb{N}_3)}$, tels que les invariants holomorphes de f admettent l'expression suivante :

$$\forall N \in \mathbb{Z}^*, A_{2iN\pi} = \text{sg}(N) \sum_{\underline{n} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)} \widehat{\tau}_N^{\underline{n}} A_{\underline{n}}. \quad (10)$$

Ce qui est remarquable dans cet énoncé, c'est l'universalité des coefficients $(\widehat{\tau}_n^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)}$: il s'agit de multizêtas indépendants de f !

Essentiellement, les $(\widehat{\tau}_n^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)}$ sont les coefficients de Fourier des fonctions 1-périodiques $\mathcal{T}^{\underline{n}} \in \mathcal{MTGF} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*}$ (où $\mathcal{S}_{df}^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2 \text{ et } s_r \geq 2\}$) . Le théorème 2 étant démontré, il n'est alors plus difficile d'obtenir une démonstration du fait que $\pi^+ - id_{\mathbb{C}}$ est somme de sa série de Fourier.

Ainsi, on passe des formules (6) à (10) en remplaçant les multitangentes par des multizêtas, et inversement : les expressions sont donc similaires.

Exemple : Choisissons f en posant $g(z) = (\exp(\alpha z^{-2} \partial_z)) \cdot z = z(1 + 3\alpha z^{-3})^{1/3}$. Alors : $f(z) = l \circ g(z) = z + 1 + \frac{\alpha}{z^2} + \mathcal{O}(z^{-3})$.

Si $\mathcal{T}a^{\underline{s}}$ désigne une combinaison linéaire de multitangentes faites pour simplifier l'écriture, alors on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_f^+ &= +\alpha \cdot \mathcal{T}a^2 \\ &\quad -\alpha^2 \cdot (2\mathcal{T}a^{3,2}) \\ &\quad +\alpha^3 \cdot (4\mathcal{T}a^{3,3,2} + 6\mathcal{T}a^{4,2,2}) \\ &\quad -\alpha^4 \cdot (8\mathcal{T}a^{3,3,3,2} + 12\mathcal{T}a^{3,4,2,2} + 12\mathcal{T}a^{4,2,3,2} + 24\mathcal{T}a^{4,3,2,2} + 24\mathcal{T}a^{5,2,2,2}) \\ &\quad +\mathcal{O}(\alpha^5) . \end{aligned}$$

Après réduction des multitangentes en monotangentes (cf. partie 2, §3) , et en utilisant les valeurs des multizêtas réduits, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_f^+ &= +\alpha \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot \\ &\quad +\alpha^2 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot (-6\zeta(3)) \\ &\quad +\alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot \left(-\frac{32}{5}\zeta(2)^3 + 36\zeta(3)^2\right) + \alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\zeta(2)^2\right) + \alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\zeta(2)^2\right) \\ &\quad +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot \left(\frac{576}{5}\zeta(3)\zeta(2)^3 - 216\zeta(3)^3 - 210\zeta(9)\right) \\ &\quad +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^4 \cdot \left(14\zeta(7) + \frac{18}{5}\zeta(3)\zeta(2)^2\right) + \alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^6 \cdot \left(6\zeta(2)\zeta(3) - \frac{10}{3}\zeta(5)\right) \\ &\quad +\mathcal{O}(\alpha^5) . \end{aligned}$$

Enfin, $A_{\pm 2\pi i}(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c_n \alpha^n$ est une fonction entière de l'unique paramètre α , de type exponentiel en $\alpha^{1/2}$. Ses 12 premiers coefficients, de signes alternés, valent :

| | |
|--|--|
| $c_1 = -\mathbf{39.4784176043574344753...}$ | $c_7 = -\mathbf{356.388791016996809...}$ |
| $c_2 = +\mathbf{284.7318264428106410205...}$ | $c_8 = +\mathbf{131.76870562724...}$ |
| $c_3 = -\mathbf{788.4456763395103611766...}$ | $c_9 = -\mathbf{38.5440209553...}$ |
| $c_4 = +\mathbf{1183.670897479215553310...}$ | $c_{10} = +\mathbf{9.1457604...}$ |
| $c_5 = -\mathbf{1124.013101882737214516...}$ | $c_{11} = -\mathbf{1.796...}$ |
| $c_6 = +\mathbf{738.577609773162031453...}$ | $c_{12} = +\mathbf{0.3...}$ |

2.4 Méthodes de calculs des invariants.

Nous avons déjà rappelé que les invariants holomorphes ont la réputation infondée d'être pour certains incalculables, pour d'autres très difficiles à calculer. Cela ne peut être vrai puisque ce sont des coefficients de Fourier.

Afin de convaincre du contraire, nous présentons, en les comparant, trois méthodes de calcul numérique des invariants (cf. §6) .

2.4.1 Méthode 0 :

En tant que coefficients de Fourier, les invariants sont exprimables à l'aide d'une intégrale dans le plan multiplicatif :

$$A_{2i\pi n} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{z_0}^{z_0+1} (l^{o(-p)} \circ f^{o(2p)} \circ l^{o(-p)}(z) - z) e^{-2in\pi z} dz .$$

Cette méthode est appelée la méthode 0 , car elle n'est pas véritablement exploitable. Du moins, numériquement, ce sera la plus mauvaise des méthodes.

2.4.2 Méthode 1, issue de l'asymptotique des coefficients :

Considérons un germe $\widehat{\varphi}$ de fonction holomorphe en 0, prolongeable sur un disque de rayon $r = |\omega|$, où ω est une singularité de $\widehat{\varphi}$ supposée unique⁴. Exprimons $\widehat{\varphi}$ sous la forme :

$$\widehat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} J(n) \zeta^n .$$

Le principe consiste à déterminer cette singularité à partir de la connaissance de l'asymptotique des coefficients de $\widehat{\varphi}$. Supposons que les coefficients $J(n)$ admettent le développement asymptotique : $J(n) = e^{-n\nu_0} J_{\nu_0}(n) + o(e^{-n\nu_0} J_{\nu_0}(n))$, où $J_{\nu_0}(n) \in \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{n} \right] \right]$.

En écrivant $J_{\nu_0}(n) = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_k}{n^k}$, on peut alors considérer la transformation de Borel de J_{ν_0} . Celle-ci est reliée à $\widehat{\varphi}$ par :

$$\widehat{\varphi}(\zeta) = \widehat{J}_{\nu_0} \left(\log \left(1 + \frac{\zeta}{\zeta_0} \right) \right) .$$

Il s'agit d'une méthode simple et très utile mais qui ne permet de calculer que la première paire d'invariants non nuls.

2.4.3 Méthode 2, issue de l'analyse résurgente dans le plan de Borel.

On sait qu'il existe un isomorphisme entre le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} et $\widetilde{\mathbb{C} - 2\pi i \mathbb{Z}}$. Celui-ci est explicite et est donné par $z \mapsto -\ln(1 - \lambda(z))$, où λ est la fonction automorphe classique. Plus précisément, cet isomorphisme est donné par :

$$z \mapsto -\ln(1 - \lambda(z)) = 16 \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} u_n e^{2in\pi z} , \text{ où } u_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d .$$

⁴ Cette hypothèse d'unicité de la singularité n'est pas restrictive.

On dispose alors de trois homographies dans le demi-plan de Poincaré :

$$R(z) = z + 2 \quad , \quad S(z) = \frac{z}{-2z + 1} \quad , \quad T(z) = \frac{z - 2}{2z - 3} \quad .$$

Leurs images dans $\mathbb{C} \setminus \widetilde{2i\pi\mathbb{Z}}$ correspondent respectivement à la rotation d'angle π autour de 0, la translation de pas $-2i\pi$ et enfin la translation de pas $2i\pi$. Ainsi, pour connaître la valeur de $A_{2in\pi}$, il suffit de connaître les valeurs limites en $2i\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)$ par la droite et par la gauche. On transforme le chemin suivi pour calculer usuellement les dérivées étrangères par transformation conforme.

Cette méthode est très efficace si ω est petit ; plus ω est grand, plus $\inf_{j,w} \mathfrak{S}(h_{\omega,j}(w))$ sera petit, ce qui force à approcher la frontière de \mathcal{H} où les calculs sont coûteux.

2.4.4 Méthode 3, reposant sur les formules universelles.

Contrairement aux deux méthodes précédentes, la méthode que nous allons décrire maintenant permet de calculer tous les invariants. L'idée générale est de tronquer la série (10) donnant le n-ième invariant. Mais pour cela, il est nécessaire d'avoir un ordre de grandeur du reste.

Evaluation du reste. Toute la section 4 est consacrée à une majoration des invariants. Elle permet d'aboutir à une majoration fine du reste :

Propriété 1 : $\exists (K_0; K_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall p_0 \in \mathbb{N}, \left| \sum_{\substack{\mathbf{p} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3) \\ \|\mathbf{p}\| > p_0}} \widehat{\tau}_n^{\mathbf{p}} A_{\mathbf{p}} \right| \leq K_0 e^{2K_1|n|\pi} \left(\frac{2e|n|\pi}{p_0} \right)^{p_0} .$

Cela provient d'estimations déjà faites par Jean Ecalle, que nous avons reprises, complétées, adaptées et surtout mises en forme avec le souci d'optimiser les constantes apparaissant. Ces majorations sont le coeur de l'algorithme ; la méthode est très proche de celle déjà vue lors de la résolution de l'équation (3) :

1. on exprime l'itérateur f^* à l'aide d'opérateurs notés H_n^+ et L ;
2. on exprime $\widehat{f}^* = \mathcal{B}(f^*)$;
3. on majore $\widehat{f}^* = \mathcal{B}(f^*)$ dans un secteur du type $]\theta_1; \theta_2[\subset \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$;
4. on déduit de ces trois premiers points une majoration de \mathbf{f}_+^* sur un demi-plan ;
5. on reprend les majorations du point 3 en vue de majorer \mathbf{f}_-^* , après avoir exprimé l'inverse de $z + \varphi(z) \in z + \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$;
6. on déduit des points 3 et 4 que π^+ est bien définie sur un demi plan supérieur et inférieur, mais surtout on obtient une majoration de $\pi^+ - id_{\mathbb{C}}$;
7. on conclut par une majoration des coefficients de Fourier de $\pi^+ - id_{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire des invariants.

Accélération de la convergence. En vue d'accélérer la convergence de l'algorithme, il est souhaitable d'augmenter légèrement la valuation du difféomorphisme f , c'est-à-dire d'augmenter la puissance du premier terme de $f(z) - z - 1$ en conjuguant f à $\varphi_c(z) = (1 + cz^{-(p+1)})^{\frac{1}{p-1}}$, pour un c bien choisi. Cela est possible, car un conjugué de f possède les mêmes invariants holomorphes que f . Globalement, la valuation augmentée, les coefficients de Taylor se trouvent être beaucoup plus compliqués. Il faut donc utiliser cela avec précaution.

Une autre manière d'augmenter la vitesse de calcul est de négliger les termes de f d'ordre élevé, ce qui est justifié par une majoration similaire à celle dans la propriété précédente.

L'algorithme. L'algorithme de calcul des invariants, basé sur la formule universelle (10) se divise en trois étapes :

1. L'augmentation de la valuation de f .
2. La troncature de f pour négliger ses derniers termes.
3. Le calcul de la somme partielle.

2.4.5 Comparaison des méthodes.

Dans le cas-type :

- La méthode 1 permet de calculer les deux premiers invariants rapidement et avec une précision extrême (une centaine de décimales en une heure de calculs Maple) . De plus, elle est peu sensible à la taille des coefficients de f .
- La méthode 2 est elle aussi peu sensible à la taille des coefficients de f , mais elle est de moins en moins efficace lorsque les indices ω croissent.

Elle pourrait aussi s'étendre (théoriquement et via la synthèse des difféomorphismes) aux paires successives d'invariants.

- La méthode 3 est la plus satisfaisante théoriquement car elle fournit l'expression exacte des invariants holomorphes en fonction des coefficients de Taylor de f et du seul ingrédient transcendant, qui sont les multizêtas. Elle permet donc d'étudier les invariants en fonction de paramètres, ce que ne permettaient pas les deux premières méthodes.

A l'inverse de la méthode 2, elle est peu sensible à la taille de ω , mais en revanche très sensible à la taille de f .

- Pour des f et ω "grands", ou même "moyens", les méthodes 2 et 3 se valent à peu près. Ni l'une ni l'autre n'est très performante. La méthode 3 a l'avantage de l'universalité : elle vaut pour tous les f , mais nécessite la tabulation préalable de nombreux multizêtas. La méthode 2 fait l'économie de cette tabulation, mais nécessite le calcul de plusieurs centaines de coefficients de Taylor.

Ce qui change hors du cas-type.

Lorsque $p = 1$ mais $\rho \neq 0$, les trois méthodes restent inchangées pratiquement.

Lorsque $p \geq 2$, il y a des ramifications. La première méthode fonctionne sans changement, si ce n'est qu'elle fournit les $2p$ invariants les plus proches. En dehors de la ramification, la méthode de la transformation conforme ne change pas. Quant à la troisième méthode, il faut distinguer :

1. l'expression de π^+ , qui semble être toujours vraie, mais avec des multitangentes ramifiées ;
2. l'expression des invariants, qui change : il devrait y avoir des multizêtas ramifiées. Les changements sont sérieux.

3 Etude des multitangentes.

La formule universelle montre en quoi les multitangentes (resp. les multizêtas) sont l'unique ingrédient transcendant entrant dans la construction de l'application de cornes (resp. les invariants analytiques). Cette formule permet de comprendre, précisément et au niveau microscopique, quelles sont les propriétés des multitangentes et multizêtas qui sont responsables de cette invariance. C'est là une première raison de s'intéresser aux relations entre ces objets.

Une seconde raison tient aux analogies manifestes entre multitangentes et multizêtas, qui sont définis par des sommes analogues et vérifient une même table de multiplication.

La partie arithmétique de nos travaux permet d'apporter un éclairage nouveau sur les multitangentes, les invariants analytiques et les multizêtas : appelons **multizêtas dynamiques** toute famille de nombres qui, substitués aux "*vrais*" multizêtas, préserve les invariants par conjugaison, appelons aussi **multizêtas dimorphiques** toute famille de nombres satisfaisant aux deux classiques familles de "relations quadratiques" qui sont vérifiées par les "*vrais*" multizêtas et qui, de l'avis général, paraissent épuiser la totalité de leur arithmétique.

Il se trouve que :

1. les propriétés des *multizêtas dynamiques* sont plus faibles que celles des *multizêtas dimorphiques* ;
2. les propriétés des *multizêtas dynamiques* sont précisément celles qui se déduisent de leurs analogues chez les multitangentes ;
3. les *multizêtas dynamiques* et les *multizêtas dimorphiques* constituent deux \mathbb{Q} -anneaux engendrés chacun par une famille dénombrable d'*irréductibles*, mais avec des *irréductibles dynamiques* plus "nombreux" (car sujets à moins de contraintes) et plus faciles à décrire que les *irréductibles dimorphiques*.

Ces trois assertions proviennent de l'étude des relations liant les multitangentes entre elles.

3.1 Définition et premières propriétés.

Avant toute chose, rappelons qu'un moule n'est rien d'autre qu'une application définie sur un ensemble de séquences (d'éléments de Ω), c'est-à-dire sur un monoïde $\text{seq}(\Omega)$ ou une partie de $\text{seq}(\Omega)$. Rappelons aussi qu'un moule M^\bullet , défini sur un alphabet Ω possédant une structure de semi-groupe, est dit symétrel lorsque :

$$\forall(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\text{seq}(\Omega))^2, M^\alpha M^\beta = \sum_{\gamma \in \text{sh}\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} M^\gamma.$$

Ici, $\text{sh}\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$ désigne le produit de battage contractant des séquences $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$.

Alors, nous disposons de la propriété suivante résumant les principales propriétés élémentaires des multitangentes (cf. §2) :

Propriété 2 : Soit $\mathcal{S}_{df}^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2 \text{ et } s_r \geq 2\}$.

1. La fonction $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est correctement définie pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$.
2. La fonction $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$, elle converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, et vérifie, pour tout $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$ et tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\frac{\partial \mathcal{T}e^{\underline{s}}}{\partial z}(z) = - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} s_i \mathcal{T}e^{s_1, \dots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \dots, s_{l(\underline{s})}}(z) .$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}e^{\bullet}(z)$ est un moule symétriel, i.e. :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \forall (\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\mathcal{S}_{df}^*)^2, \mathcal{T}e^{\underline{\alpha}}(z) \mathcal{T}e^{\underline{\beta}}(z) = \sum_{\underline{\gamma} \in \text{shel}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} \mathcal{T}e^{\underline{\gamma}}(z) .$$

4. $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$, $\mathcal{T}e^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{T}e^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z)$.

3.2 Réduction en monotangentes et projection sur l'espace des multitangentes.

Le principe qui semble régir les multitangentes est le suivant : tout résultat sur les multitangentes se traduit en un résultat sur les multizêtas, et réciproquement. Ainsi, la rigidité des multitangentes provient de la rigidité des multizêtas. Effectivement, un résultat simple mais extrêmement profond indique que chaque multitangente s'exprime de manière élémentaire sous la forme d'une somme de produits d'un nombre rationnel, d'une \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multizêtas et enfin d'une monotangente⁵. Ces relations, appelées *réduction en monotangentes*, réalisent un lien fort entre multitangentes et multizêtas. Précisément, nous disposons du théorème suivant :

Théorème 3 : Notons : ${}^i B_{\underline{k}}^{\underline{s}} = \left(\prod_{l=1}^{i-1} (-1)^{k_l} \right) \left(\prod_{l=i+1}^r (-1)^{s_l} \right) \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^r \binom{s_l + k_l - 1}{s_l - 1} \right)$.

$$\mathcal{Z}_{i,k}^{\underline{s}} = \sum_{\substack{k_1, \dots, \widehat{k_i}, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \dots + \widehat{k_i} + \dots + k_r = k}} {}^i B_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z}e^{s_r + k_r, \dots, s_{i+1} + k_{i+1}} \mathcal{Z}e^{s_1 + k_1, \dots, s_{i-1} + k_{i-1}} .$$

Alors, pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=2}^{s_i} \mathcal{Z}_{i, s_i - k}^{\underline{s}} \mathcal{T}e^k(z) .$$

La démonstration repose sur une décomposition en éléments simples. Mais, ce qui est remarquable dans ce résultat, c'est l'absence de composante $\mathcal{T}e^1$, ce qui redonne une partie d'une des deux tables de multiplication des multizêtas. Cette absence peut se démontrer

⁵ Une monotangente est une multitangente de longueur 1, c'est-à-dire pour laquelle $r = 1$. Il s'agit en fait d'une série qu'Eisenstein a considéré pour développer sa théorie des fonctions périodiques.

par un argument analytique (cf. §7) ou en utilisant les relations entre multizêtas tout juste mentionnées. Rappelons encore une fois que ce résultat est beaucoup plus profond qu'il n'y paraît car il réalise un lien fort entre multitangentes et multizêtas : tout résultat sur les multitangentes semble se traduire en un résultat sur les multizêtas, grâce à son utilisation.

Voici quelques exemples de relations de réductions :

| | | |
|---|--|---|
| <div style="text-align: center; border: 1px solid black; border-radius: 5px; padding: 2px; width: fit-content; margin: 0 auto 10px auto;">Poids 4</div> $\mathcal{T}e^{2,2} = 2\zeta(2)\mathcal{T}e^2 .$ <hr style="width: 30%; margin: 10px auto;"/> <div style="text-align: center; border: 1px solid black; border-radius: 5px; padding: 2px; width: fit-content; margin: 0 auto 10px auto;">Poids 5</div> $\mathcal{T}e^{2,3} = -3\zeta(3)\mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$ $\mathcal{T}e^{3,2} = 3\zeta(3)\mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$ $\mathcal{T}e^{2,1,2} = 0 .$ | | <div style="text-align: center; border: 1px solid black; border-radius: 5px; padding: 2px; width: fit-content; margin: 0 auto 10px auto;">Poids 6</div> $\mathcal{T}e^{2,4} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - 2\zeta(3)\mathcal{T}e^3 + \zeta(2)\mathcal{T}e^4 .$ $\mathcal{T}e^{3,3} = -\frac{12}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$ $\mathcal{T}e^{4,2} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + 2\zeta(3)\mathcal{T}e^3 + \zeta(2)\mathcal{T}e^4 .$ $\mathcal{T}e^{2,2,2} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$ $\mathcal{T}e^{2,1,3} = -\frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + \zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$ $\mathcal{T}e^{3,1,2} = -\frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - \zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$ $\mathcal{T}e^{2,1,1,2} = \frac{4}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$ |
|---|--|---|

En fait, le lien déjà mentionné semble encore plus profond, puisque admettant probablement une sorte de réciproque. Rappelons que l'on note $\mathcal{MZV} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*}$ et $\mathcal{MTGF} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*}$.

Conjecture 1 : \mathcal{MTGF} est un \mathcal{MZV} -module, ce qui signifie que tout produit d'un multizêta et d'une multitangente est une \mathbb{Q} -combinaison linéaires de multitangentes.

Cette conjecture a été vérifiée pour tout multizêta dont le poids (c'est-à-dire la somme des arguments) est inférieur à 16. Elle permettrait de pouvoir traduire tout résultat sur les multizêtas en des résultats sur les multitangentes. En particulier, un tel résultat montrerait par exemple que :

1. le nettoyage⁶ des multizêtas entraîne le nettoyage des multitangentes (cf §6) ;
2. l'absence conjecturale de \mathbb{Q} -combinaison linéaire entre multizêtas de poids différents serait équivalente à l'absence de \mathbb{Q} -combinaison linéaire entre multitangentes de poids différents (cf. §8) ; cela donnerait un équivalent fonctionnel de cette conjecture sur les multizêtas.

Démontrer cette conjecture aurait donc des conséquences arithmétiques importantes sur la nature de multizêtas.

⁶ Par nettoyage des multizêtas (resp. multitangentes), on entend une expression des multizêtas

3.3 Renormalisation des multitangentes divergentes.

Tout comme les multizêtas divergents, c'est-à-dire définis par une série divergente (dont le premier argument est alors $s_1 = 1$), peuvent être renormalisés, les multitangentes divergentes peuvent aussi être renormalisée (cf. §4) . La situation dans le cas des multitangentes est plus compliquée, puisqu'il y a deux sources possibles de divergence : on somme sur un simplexe de \mathbb{Z}^r et non de \mathbb{N}^r .

Après renormalisation, nous souhaitons garder les propriétés essentielles vérifiées par les multitangentes. Il s'agit de :

1. $\mathcal{T}e^1(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$;
2. la symétréilité du moule $\mathcal{T}e^\bullet(z)$ prolongé ;
3. la propriété de différentiabilité ;
4. la propriété de parité ;
5. la propriété de réduction en monotangentes.

Pour surmonter la double source de divergence, nous allons découper l'espace de sommation des multitangentes de sorte à séparer les sources de divergence. Une fois cela fait, il nous suffit d'appliquer deux fois la méthode mise en oeuvre pour renormaliser les multizêtas, une fois au voisinage de $+\infty$, la seconde fois au voisinage de $-\infty$.

On obtient ce premier résultat :

Théorème 4 : Il existe un prolongement symétréil du moule $\mathcal{T}e^\bullet$ à $\text{seq}(\mathbb{N}^*)$, à valeurs dans $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})$, vérifiant $\mathcal{T}e^\bullet = \mathcal{H}e_+^\bullet \times \mathcal{C}e^\bullet \times \mathcal{H}e_-^\bullet$ et $\mathcal{T}e^1(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$.

Il possède automatiquement les propriétés suivantes :

1. $\forall \underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*)$, $\frac{\partial \mathcal{T}e^{\underline{s}}}{\partial z} = - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} s_i \mathcal{T}e^{\underline{s} + e_i}$.
2. $\forall \underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*)$, $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}e^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{T}e^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z)$.

(resp. multitangentes) sous la forme d'une \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multizêtas (resp. multitangentes) sans 1.

Notons qu'un résultat récent de F. Brown montre que tout multizêta peut s'écrire comme une \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multizêtas ne possédant que des 2 et des 3 . Cela contient donc le nettoyage des 1 des multizêtas. Néanmoins, ce dernier est tout de même intéressant, pour plusieurs raisons :

- a. Le résultat du nettoyage des multizêtas date d'une décennie et est algorithmique, contrairement au résultat de F. Brown.
- b. La combinatoire sous-jacente au nettoyage des multizêtas est très intéressante.
- c. Le résultat du nettoyage des multizêtas admet un parallèle pour les multitangentes, alors que le résultat de F. Brown n'en admet pas un (ou du moins pas un qui soit évident à découvrir et formuler) : si une multitangente s'écrivait comme somme de multitangentes ayant uniquement des 2 et des 3, sa réduction ne contiendrait que des monotangentes $\mathcal{T}e^2$ et $\mathcal{T}e^3$, donc elle ne contiendrait que des 2 et des 3 ...

Ici, $\mathcal{H}e^{\underline{s}}$ est une fonction de z définie par la somme définissant les multizêtas en ayant substitué chaque n_i par $n_i + z$.

Il ne reste plus qu'à vérifier la réduction en monotangentes. Pour cela, considérons la série formelle associée à $\mathcal{T}e^{\bullet}(z)$. Connaissant la série formelle associée à $\mathcal{Z}e^{\bullet}$, en séparant à nouveau les sources de divergence, on retrouve l'expression des multitangentes en fonction de monotangentes :

Théorème 5 : Avec les mêmes notations que pour le théorème 3, et en notant aussi

$$\delta^{\underline{s}} = \begin{cases} \frac{(i\pi)^r}{r!} & , \text{ si } \underline{s} = 1^{[r]} \text{ et si } r \text{ est pair} \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} ,$$

on a pour toute séquence $\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*)$:

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \delta^{\underline{s}} + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{s_i} \mathcal{Z}_{i, s_i - k}^{\underline{s}} \mathcal{T}e^k(z) .$$

De plus, si $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$, alors la somme portant sur l'indice k commence à 2.

3.4 Relations entre multizêtas retrouvées par l'étude des multitangentes.

Conjecturalement, trois familles de relations engendrent toutes les relations entre les multizêtas ; il s'agit de la symétrélité déjà définie des multizêtas, de la symétralité⁷ des multizêtas et d'une famille liant symétrélité et symétralité simultanément dites relations de double mélange. Cette dernière famille peut se déduire des deux autres aisément lorsque l'on considère les multizêtas convergents et divergents.

Nous souhaitons savoir quelles relations entre multizêtas sont retrouvées par l'utilisation des multitangentes. Ce sont ces relations qui sont responsables de la différence entre les notions de *multizêtas dynamiques* et *multizêtas dimorphiques*. Essentiellement, nous allons retrouver $1 + \frac{1}{2}$ symétries.

3.4.1 Les relations de symétrélité et de troisième type.

Nous disposons de deux procédés pour multiplier deux multitangentes entre elles, donnés par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}TGF \otimes \mathcal{M}TGF & \xrightarrow{\text{multiplication}} & \mathcal{M}TGF \\ \text{symétr}\acute{e} & & \\ \text{réduction} \otimes \text{réduction} \downarrow & & \downarrow \text{réduction} \\ \mathcal{M}TGF \otimes \mathcal{M}TGF & & \\ \text{multiplication} \downarrow & & \\ \text{symétr}\acute{e} & & \\ \mathcal{M}TGF & \xrightarrow{\text{réduction}} & \mathcal{M}TGF \end{array}$$

⁷ Un moule M^{\bullet} , défini sur un alphabet Ω^* , est dit symétral lorsque :

$$\forall (\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\Omega^*)^2, M^{\underline{\alpha}} M^{\underline{\beta}} = \sum_{\underline{\gamma} \in \text{sh}\underline{a}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} M^{\underline{\gamma}} .$$

Ici, $\text{sh}\underline{a}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$ désigne le produit de battage des séquences $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$.

Dans ce diagramme commutatif, le mot “réduction” désigne l’extension par linéarité à tout \mathcal{MTGF} de la réduction d’une multitangente en monotangentes ; l’expression “réduction \otimes réduction” désigne le produit tensoriel de “réduction” par elle-même ; enfin l’expression “multiplication symétrèle” désigne l’extension par bilinéarité de la multiplication suivant la loi de symétrélité de deux multitangentes.

Bien sûr, ces deux procédés donnent des résultats égaux. Mais, ce qui est intéressant ici, ce sont les différences d’écritures, et donc l’obtention de relations entre multizêtas. En particulier, ce diagramme permet d’obtenir toutes les relations de symétrélité, ainsi qu’une partie des relations du troisième type. Néanmoins, on obtient énormément de combinaisons linéaires entre des relations du troisième type alors que l’on souhaiterait obtenir ces relations indépendamment les autres des autres.

Un autre moyen de récupérer des relations de symétrélité semble être de regarder les composantes $\mathcal{T}e^k$ absentes dans la réduction en monotangentes. A ce propos, nous avons posé la conjecture suivante :

Conjecture 2 : Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$.

1. Si la composante $\mathcal{T}e^k$, $k \in \llbracket 2; \max(s_1; \dots; s_r) \rrbracket$, n’apparaît pas dans la réduction en monotangentes de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$, alors $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est de parité opposée à celle de k (et donc éventuellement nulle) .
2. Les multitangentes convergentes identiquement égales à zéro sont exactement les multitangentes $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ avec $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^* \cap \text{seq}(\{1; 2\})$, symétrique, de poids impair et de longueur supérieure à 2.
3. Les relations obtenues par l’annulation des composantes $\mathcal{T}e^k$ absentes dans la réduction en monotangentes de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ proviennent des relations de symétrélité des multizêtas.

3.4.2 Des relations de symétralité.

L’annulation de la composante $\mathcal{T}e^1$ dans la réduction en monotangentes des multitangentes convergentes permet d’obtenir des relations entre multizêtas. Il s’agit en fait de relations provenant de la symétralité des multizêtas. Précisément, nous retrouvons les relations de symétralité pour des longueurs 1×1 ; lorsque les longueurs sont plus grandes, nous obtenons des combinaisons linéaires de relations de symétralité.

4 Conclusion

Pendant nos travaux doctoraux, nous avons travaillé à la fois en analyse, sur les invariants des difféomorphismes, mais aussi en algèbre/arithmétique, sur les multizêtas et multitangentes, avec notamment la recherche de relation entre ces objets.

Concernant les invariants, nous avons donc montré que ceux-ci sont étudiables, contrairement à ce que laissait croire leur réputation ; nous avons mis en évidence une formule universelle permettant de préciser leur structure interne et leur lien avec les multizêtas, mais permettant aussi de les calculer, de les étudier comme fonctions des coefficients de Taylor ; enfin, nous avons produit trois méthodes de calcul numérique de ces nombres, tout en comparant leur efficacité.

Ainsi, les invariants holomorphes sont certes coûteux mais parfaitement calculables. Ils suggèrent d'intéressantes questions arithmétiques, tant sur les multitangentes et sur les multizêtas que sur les relations des premiers aux seconds. Beaucoup de questions d'autres natures restent encore en suspens, comme celle de l'asymptotique des invariants dans laquelle la formule universelle pourrait intervenir.

Notre contribution dans l'étude des relations entre multitangentes a permis de montrer l'importance des multitangentes, tant du point de vue des invariants que du point de vue des multizêtas. Nous avons exhibé de nombreuses propriétés à leur sujet, les plus élémentaires étant des propriétés de parité et de différentiabilité, la symétréité ; mais nous en avons montré aussi de plus subtiles comme la renormalisation des multitangentes divergentes. Nous avons aussi donné des propriétés arithmétiques des multitangentes (la \mathbb{Q} -indépendance linéaire des monotangentes, bien sûr, mais aussi la transcendance des multitangentes non nulles) qui montrent bien l'importance de ces objets naturels pour l'étude des multizêtas.

Enfin, en lien avec les invariants, notre dernière contribution, et non des moindres, a été de commencer à rechercher quelles relations entre multizêtas il est possible de retrouver en travaillant sur les multitangentes : il s'avère que l'on récupère une table et demi de multiplication sur les deux, mais aussi de nombreuses relations du troisième type. Récupérer la symétréité des multizêtas est naturel puisque multizêtas et multitangentes sont des sommes itérées ; néanmoins, récupérer une partie de l'autre table de multiplication (provenant d'intégrales itérées) est beaucoup plus étonnant, car les combinatoires entre sommes itérées et intégrales itérées sont fondamentalement différentes. C'est cette recherche de relations qui explique la différence de propriétés entre les *multizêtas dynamiques* et les *multizêtas dimorphiques*.