

Invariants analytiques des difféomorphismes et multizêtas

Soutenance de thèse

Olivier Bouillot

19 octobre 2011

1 Evaluation des invariants holomorphes d'un difféomorphisme tangent à l'identité.

- Définition du cadre de travail.
- Définition des invariants holomorphes.
- Méthodes de calcul des invariants.
- Comparaison des méthodes.

2 Etude des multitangentes.

- Définition et premières propriétés.
- Réduction en monotangentes.
- La "multitangente attitude".
- Des conjectures.

Soit $\mathcal{T} = \{f \in \mathbb{C}\{x\} ; f(x) = \lambda x + \mathcal{O}(x^2) , \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}^*\}$.

But : Décrire les classes de conjugaison de $\mathcal{T}$.

- Cas hyperbolique : $|\lambda| \neq 1$.

$f \in \mathcal{T}$ est holomorphiquement conjugué à $x \mapsto \lambda x$. (Koenig)

- Cas elliptique : $|\lambda| = 1$ et $\lambda = e^{2i\pi\theta}$, $\theta \notin \mathbb{Q}$.

Il existe une condition diophantienne, optimale, d  e à Bryuno, qui garantit la linéarisation analytique de tous les f commençant par λ .

(Siegel pour une condition non optimale, Bryuno pour l'optimalité et la suffisance, R  ssman, Yoccoz pour l'optimalité et la nécessité, Perez-Marco)

- Cas parabolique : $|\lambda| = 1$ et $\lambda = e^{2i\pi\frac{p}{q}}$.

$f \in \mathcal{T}$ n'est pas conjugué à $x \mapsto \lambda x$ (sauf si f est d'ordre fini) .

- A l'infini, tout difféomorphisme tangent à l'identité est formellement conjugué à : $z \mapsto z + z^{1-p} - \rho z^{1-2p}$, où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\rho \in \mathbb{C}$.

p et ρ sont les deux invariants formels.

- On s'intéresse à la classe type : $(p; \rho) = (1; 0)$, i.e.

$$f(z) = z + 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

On pose aussi $l : z \mapsto z + 1$.

Définition des invariants de f .

$$\blacksquare \exists f^* \in \mathbb{Z} + \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right], f^* \circ f = I \circ f^* .$$

$$\exists {}^*f \in \mathbb{Z} + \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right], f \circ {}^*f = {}^*f \circ I .$$

$$\blacksquare \pi_f^+ = f_+^* \circ {}^*f_- \text{ commute avec } I \text{ et est invariante par conjugaison.}$$

Définition :

Les invariants de f , notés $(A_{2in\pi}^+(f))_{n \in \mathbb{Z}^*}$, sont les coefficients de Fourier de $\pi_f^+ - id_{\mathbb{C}}$.

Pourquoi travailler dans le plan de Borel ?

- 1 Dans le plan multiplicatif, il est nécessaire de faire de l'analyse de Fourier. Dans le plan de Borel, les invariants seront localisés en un point.
- 2 Le passage au plan de Borel permet de traiter divers sur-groupe de $\mathcal{T}$ (à croissance Gevrey 2^- par exemple), qui n'ont plus aucune interprétation dans le plan multiplicatif mais qui possèdent néanmoins des classes de conjugaisons non-triviales et des invariants en tout point analogues à ceux des difféomorphismes analytiques.
- 3 Le passage au plan de Borel nous fournira deux des quatre méthodes de calcul numérique que nous allons exposer.

■ Singularités simples.

Soit $\widehat{\varphi}$, holomorphe sur un disque ouvert D .

$\widehat{\varphi}$ possède une singularité simple en un point ω adhérent à D lorsque :

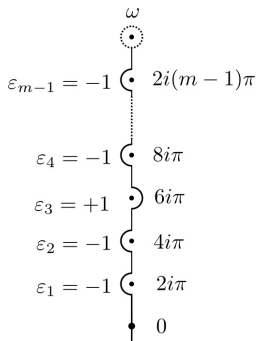
$$\widehat{\varphi}(\zeta) \underset{(\zeta \rightarrow \omega)}{=} \frac{C}{2i\pi(\zeta - \omega)} + \frac{1}{2i\pi} \widehat{\Phi}(\zeta - \omega) \log(\zeta - \omega) + \text{reg}(\zeta - \omega) .$$

On notera cette égalité sous la forme :

$$\text{sing}_{\omega} \widehat{\varphi} = C\delta + \widehat{\Phi} \in \mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\{\zeta\} .$$

■ Prolongement sans fin.

Un germe φ de fonction holomorphe en 0 se prolonge sans fin sur $\mathbb{C}$ lorsque, pour toute ligne brisée finie L , il existe un ensemble fini $\Omega_L \subset L$ de singularités tel que φ se prolonge analytiquement le long de tous les chemins possibles obtenus en suivant L et en contournant chaque point de Ω_L soit à gauche, soit à droite.



■ Fonctions résurgentes dans le modèle convolutif.

Les fonctions résurgentes sont les germes en 0 de fonctions holomorphes se prolongeant sans fin sur $\mathbb{C}$ et à singularités simples.

■ Fonctions résurgentes dans le modèle formel.

Dans le modèle formel, les fonctions résurgentes sont les séries formelles de $\frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$ dont la transformée de Borel est une fonction résurgente dans le modèle convolutif.

Notation : On note RES l'ensemble des fonctions résurgentes dans l'un ou l'autre des modèles.

Exemples : f^* est $*f$ sont résurgentes : leurs transformées de Borel sont définies uniformes sur $\mathbb{C} - \widetilde{2\pi i \mathbb{Z}}$.

Pour tout $\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$, on définit une dérivation, par rapport à la convolution, “mesurant” les singularités au voisinage de ω :

$$\Delta_\omega : \text{RES} \longrightarrow \text{RES} ,$$

$$\forall \omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^* , \Delta_\omega(\hat{\varphi}) = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_{\pm 1}; \dots; \varepsilon_{\pm(m-1)}) \in \{+1; -1\}^{|m|-1}} \frac{p(\varepsilon)! q(\varepsilon)!}{m!} \text{sing}_\omega(\text{cont}_{\gamma(\varepsilon)}\hat{\varphi}) .$$

Plus simplement, on définit $\Delta_\omega^+ : \text{RES} \longrightarrow \text{RES}$ en ne considérant que des contournements par la droite : ce n’est plus une dérivation.

Propriété : $\forall \omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^* , \Delta_\omega^{+*} f = A_\omega^+ \partial_z^* f .$

Problématique : Calculer numériquement les $A_{2in\pi}^+(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$.

- **Méthode 0** : Analyse de Fourier dans le plan multiplicatif.

$$A_{2in\pi}^+(f) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{[z; z+1]} \left(I^{\circ(-p)} \circ f^{\circ(2p)} \circ I^{\circ(-p)}(z) - z \right) e^{-2in\pi z} dz .$$

Numériquement, c'est très mauvais.

- **Méthode 1** : Asymptotique des coefficients.
- **Méthode 2** : Analyse résurgente dans le plan de Borel et transformation conforme.
- **Méthode 3** : Méthode universelle.

Méthode 1 : Asymptotique des coefficients.

Soit $\hat{\varphi}$ un germe de fonction holomorphe en 0, prolongeable sur un disque de rayon $r = |\omega|$, où ω est une singularité de $\hat{\varphi}$ supposée unique.

Exprimons $\hat{\varphi}$ sous la forme :

$$\hat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} J(n) \zeta^n .$$

Supposons que les coefficients $J(n)$ admettent le développement asymptotique :

$$J(n) = e^{-n\nu_0} J_{\nu_0}(n) + o(e^{-n\nu_0} J_{\nu_0}(n)) \quad , \text{ où } J_{\nu_0}(n) \in \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{n} \right] \right] .$$

Alors :

$$\hat{\varphi}(\zeta) = \hat{J}_{\nu} \left(\log \left(1 + \frac{\zeta}{\zeta_0} \right) \right) .$$

■ Application :

Cela permet de calculer la première paire d'invariants holomorphes avec une excellente précision.

■ Exemple :

Pour $f(z) = z + 1 + \frac{1}{10z^2}$, on trouve :

$$\begin{aligned} A_1 &\approx -14.91351103557842215407015963733918802397 \dots \\ &\quad -7.429352270694850476346650109888076885387 \dots i . \end{aligned}$$

On obtient environ 60 décimales en 20 minutes de calculs, avec Maple.

Méthode 2 : Analyse résurgente dans le plan de Borel et transformation conforme.

- Les itérateurs direct et réciproque $f^*(z)$ et ${}^*f(z)$ ont des transformées de Borel $\widetilde{f^*(\zeta)}$ et $\widetilde{{}^*f(\zeta)}$ qui sont définies uniformes sur la surface de Riemann $\mathcal{R} = \mathbb{C} - 2\pi i \mathbb{Z}$.
- L'application remarquablement explicite :

$$w \mapsto -\log(1 - \lambda(w)) = 16 \sum_{\substack{n \text{ impair} \\ \geq 1}} \mu_n e^{2\pi i n w} \quad \text{avec}$$
$$\lambda = \text{fonction modulaire} \quad ; \quad \mu_n := \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d$$

envoie conformément le demi-plan de Poincaré $\mathcal{P} = \{\Im(w) > 0\}$ sur $\mathcal{R}$.

Méthode 2 : Analyse résurgente dans le plan de Borel et transformation conforme (suite) .

- Sur $\mathcal{P}$ les dérivations étrangères Δ_ω d'indice $\omega \in 2\pi i\mathbb{Z}^*$ revêtent une forme très simple:

$$\forall \varphi : \quad \Delta_\omega \cdot \varphi \equiv \sum_j \varphi \circ h_{\omega,j} \quad (\text{somme finie})$$

avec des homographies entières $h_{\omega,j} \in Sl_2(\mathbb{Z})$.

- Inconvénient : Si ω est grand, $\inf_{j,w} \Im(h_{\omega,j}(w))$ est petit, ce qui force à approcher la frontière de $\mathcal{P}$, où les calculs sont coûteux.
- Précision à escompter :

n		nombre de coeff de f^* ou f		précision de $A_{\pm 2\pi in}$
1		200		80 décimales
2		400		70 décimales
3		600		65 décimales
...		...		...

- Notons $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq k\}$, pour $k \in \mathbb{N}$.
- $\text{seq}(E)$ désigne l'ensemble des séquences finies dont les éléments sont dans l'ensemble E .
- La séquence vide est notée $\emptyset$.

- Notons f sous la forme $f(z) = z + 1 + \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{z^{n-1}}$.
- $A_\bullet$ défini sur $\text{seq}(\mathbb{N}_3)$ par : $A_{\underline{s}} = a_{s_1} \cdots a_{s_r}$.
 $\mathcal{A}_\bullet$ défini sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ par : $\mathcal{A}_{\underline{s}} = A_{\underline{s}_1} \cdots A_{\underline{s}_r}$.

Méthode 3 : Définitions des multizêtas et des multitangentes.

On note : $\mathcal{S}_d^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2\}$.

$\mathcal{S}_{df}^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2 \text{ et } s_r \geq 2\}$.

Définition des multizêtas.

Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*$.

On pose : $\mathcal{Z}e^{\underline{s}} = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} \text{ .}$

Définition des multitangentes.

Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$.

On pose : $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} \text{ .}$

On note alors :
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{MZV} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_+^*} \text{ .} \\ \mathcal{MTGF} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}^*} \text{ .} \end{array} \right.$$

On développe chaque $A_n^+(f)$ comme fonction entière de f , i.e. de l'infinité des coefficients de Taylor de f :

Théorème : Soit f un difféomorphisme tangent à l'identité, convergent, s'exprimant à l'infini sous la forme $f(z) = z + 1 + \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{z^{n-1}}$.

Alors :

- 1 Il existe des coefficients $\tau^\bullet$, explicites, définis sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{MTGF}$ tels que :

$$\pi_f^+ = \sum_{\underline{s} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \tau^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}}.$$

- 2 Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, il existe des coefficients $\hat{\tau}_n^\bullet$, explicites, définis sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{MZV}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, A_n^+(f) = \sum_{\underline{s} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \hat{\tau}_n^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}}.$$

Méthode 3 : Exemple de calculs d'invariants.

- Choix d'une fonction d'épreuve à un paramètre :

$$f = l \circ g \text{ avec } f(z) = z + 1 + \frac{\alpha}{z^2} + \mathcal{O}(z^{-3}) ,$$

$$\text{où : } l(z) = z + 1 .$$

$$g(z) = (\exp(\alpha z^{-2} \partial_z)) \cdot z = z(1 + 3\alpha z^{-3})^{1/3} .$$

- Posant $\sigma : z \mapsto -z$, on voit qu'ici $\sigma \circ f \circ \sigma$ est conjugué à f^{-1} .

Donc $\pi_f^+ - id_{\mathbb{C}}$ est paire, i.e. π_f^+ s'exprimera en fonction des seules monotangentes *paires*

$$\mathcal{T}e^{s_1}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^{s_1}} , \quad \text{avec } s_1 \text{ pair.}$$

- π_f^+ en fonction des multitangentes :

$$\begin{aligned}\pi_f^+ = & +\alpha \cdot \mathcal{T}a^2 \\ & -\alpha^2 \cdot (2\mathcal{T}a^{3,2}) \\ & +\alpha^3 \cdot (4\mathcal{T}a^{3,3,2} + 6\mathcal{T}a^{4,2,2}) \\ & -\alpha^4 \cdot (8\mathcal{T}a^{3,3,3,2} + 12\mathcal{T}a^{3,4,2,2} + 12\mathcal{T}a^{4,2,3,2} + 24\mathcal{T}a^{4,3,2,2} + 24\mathcal{T}a^{5,2,2,2}) \\ & +\mathcal{O}(\alpha^5)\end{aligned}$$

Méthode 3 : Exemple de calculs d'invariants (suite) .

- π_f^+ en fonction des monotangentes et des multizêtas non réduits :

$$\begin{aligned}\pi_f^+ = & +\alpha \cdot \mathcal{T}e^2 && +\alpha^2 \mathcal{T}e^2 \cdot (-6\zeta(3)) \\ & +\alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot (+26\zeta(6) + 2\zeta(4,2) - 16\zeta(2,4) + 36\zeta(3,3)) \\ & +\alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^4 \cdot (+\zeta(4) - 2\zeta(2,2)) + \alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\zeta(2)\right) \\ & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot (-86\zeta(9) + 52\zeta(5,4) + 68\zeta(7,2) - 34\zeta(4,5) \\ & \quad - 156\zeta(3,6) + 224\zeta(2,7) - 246\zeta(6,3) - 16\zeta(4,3,2) \\ & \quad + 56\zeta(5,2,2) - 216\zeta(3,3,3) + 96\zeta(3,2,4) - 12\zeta(4,2,3) \\ & \quad + 64\zeta(2,3,4) - 12\zeta(3,4,2) + 64\zeta(2,5,2) + 96\zeta(2,4,3)) \\ & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^4 \cdot (+2\zeta(7) + 34\zeta(2,5) + 30\zeta(5,2) - 10\zeta(3,4) - 18\zeta(4,3) \\ & \quad + 12\zeta(2,2,3) + 16\zeta(2,3,2) + 20\zeta(3,2,2)) \\ & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^6 \cdot \left(+\frac{13}{3}\zeta(5) + 4\zeta(2,3) + \frac{14}{3}\zeta(3,2)\right) \\ & +\mathcal{O}(\alpha^5)\end{aligned}$$

Méthode 3 : Exemple de calculs d'invariants (suite) .

- π_f^+ en fonction des monotangentes et des multizêtas réduits :

$$\begin{aligned}\pi_f^+ = & +\alpha \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot \quad \quad \quad +\alpha^2 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot (-6\zeta(3)) \\ & +\alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot \left(-\frac{32}{5}\zeta(2)^3 + 36\zeta(3)^2\right) + \alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\zeta(2)^2\right) \\ & +\alpha^3 \cdot \mathcal{T}e^6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\zeta(2)^2\right) \\ & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^2 \cdot \left(\frac{576}{5}\zeta(3)\zeta(2)^3 - 216\zeta(3)^3 - 210\zeta(9)\right) \\ & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^4 \cdot \left(14\zeta(7) + \frac{18}{5}\zeta(3)\zeta(2)^2\right) \\ & +\alpha^4 \cdot \mathcal{T}e^6 \cdot \left(6\zeta(2)\zeta(3) - \frac{10}{3}\zeta(5)\right) \\ & +\mathcal{O}(\alpha^5)\end{aligned}$$

Méthode 3 : Exemple de calculs d'invariants (fin) .

- Les invariants $A_{\pm 2\pi i}(f)$ comme fonctions entières du paramètre α :

$A_{\pm 2\pi i}(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c_n \alpha^n$ est une fonction entière de l'unique paramètre α , de type exponentiel en $\alpha^{1/2}$.

Ses 12 premiers coefficients, de signes alternés, valent :

c_1	=	− 39 .4784176043574344753...
c_2	=	+ 284 .7318264428106410205...
c_3	=	− 788 .4456763395103611766...
c_4	=	+ 1183 .670897479215553310...
c_5	=	− 1124 .013101882737214516...
c_6	=	+ 738 .577609773162031453...
c_7	=	− 356 .388791016996809...
c_8	=	+ 131 .76870562724...
c_9	=	− 38 .5440209553...
c_{10}	=	+ 9 .1457604...
c_{11}	=	− 1 .796...
c_{12}	=	+ 0 .3...

Comparaison des méthodes.

Calcul de $A_{2in\pi}^+(f)$	Dépendance en f .	Dépendance en n .	Paramètres ?
Méthode 0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
Méthode 1	+	—	—
Méthode 2	+	—	—
Méthode 3	—	+	+

Calcul de $A_{2in\pi}^+(f)$	$\rho \neq 0$.	$p \geq 1$.
Méthode 0	$\emptyset$	$\emptyset$
Méthode 1	+	+
Méthode 2	+	+
Méthode 3	+	—

Pourquoi étudier les relations entre multitangentes ?

- Les *multitangentes* (resp. *multizêtas*) sont l'unique ingrédient transcendant entrant dans la construction des invariants holomorphes π_f^+ (resp. $A_\omega(f)$). Il s'agit donc de comprendre quelles sont précisément les propriétés des multitangentes et multizêtas qui sont responsables de cette invariance.
- Il existe des analogies manifestes entre multitangentes et multizêtas, qui sont définis par des sommes analogues et vérifient une même table de multiplication.

Liens entre les deux parties (suite).

Appelons **multizêtas dynamiques** toute famille de nombres qui, substitués aux 'vrais' *multizêtas*, préservent l'invariance des $A_\omega(f)$.

Appelons **multizêtas dimorphiques** toute famille de nombres satisfaisant aux deux classiques familles de "relations quadratiques" qui sont vérifiées par les 'vrais' *multizêtas* et qui, de l'avis général, paraissent épuiser la totalité de leur arithmétique.

Il se trouve:

- 1 que les propriétés des *multizêtas dynamiques* sont plus faibles que celles des *multizêtas dimorphiques*.
- 2 que les dites propriétés des *multizêtas dynamiques* sont précisément celles qui se déduisent de leurs analogues chez les multitangentes.
- 3 que les *multizêtas dynamiques* et les *multizêtas dimorphiques* constituent deux $\mathbb{Q}$ -anneaux engendrés chacun par une famille dénombrable d'*irréductibles*, mais avec des *irréductibles dynamiques* plus 'nombreux' (car sujets à moins de contraintes) et plus faciles à décrire que les *irréductibles dimorphiques*.

1 Evaluation des invariants holomorphes d'un difféomorphisme tangent à l'identité.

- Définition du cadre de travail.
- Définition des invariants holomorphes.
- Méthodes de calcul des invariants.
- Comparaison des méthodes.

2 Etude des multitangentes.

- Définition et premières propriétés.
- Réduction en monotangentes.
- La "multitangente attitude".
- Des conjectures.

Définitions des multizêtas et des multitangentes.

On note : $\mathcal{S}_d^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2\}$.

$\mathcal{S}_{df}^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) ; s_1 \geq 2 \text{ et } s_r \geq 2\}$.

Définition des multizêtas.

Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*$.

On pose : $\mathcal{Z}e^{\underline{s}} = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} \quad .$

Définition des multitangentes.

Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$.

On pose : $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} \quad .$

Propriété :

1 Propriété de différentiabilité.

La fonction $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ pour toute séquence $\underline{s} \in S_{df}^*$; elle converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et vérifie, pour tout $\underline{s} \in S_{df}^*$:

$$\frac{\partial \mathcal{T}e^{\underline{s}}}{\partial z} = - \sum_{i=1}^r s_i \mathcal{T}e^{s_1, \dots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \dots, s_r} .$$

2 Propriété de parité.

$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , \forall \underline{s} \in S_{df}^* , \mathcal{T}e^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{||\underline{s}||} \mathcal{T}e^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z) .$

3 Loi de multiplication.

$\forall (\underline{u}; \underline{v}) \in (S_{df}^*)^2 , \exists E(\underline{u}; \underline{v}) \subset S_{df}^* \text{ fini} , \mathcal{T}e^{\underline{u}} \mathcal{T}e^{\underline{v}} = \sum_{\underline{w} \in E(\underline{u}; \underline{v})} \mathcal{T}e^{\underline{w}} .$

Réduction en monotangentes, version 1.

Remarque : Une monotangente est une multitangente de longueur 1 .

Notons : $\mathcal{MZV} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}} (\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_d^*}$.

$$m(\underline{s}) = \max(s_1; \dots; s_r), \text{ pour tout } \underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) .$$

Propriété : Réduction en monotangentes des multitangentes convergentes.

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*, \exists (z_1; \dots; z_{m(\underline{s})}) \in \mathcal{MZV}^{m(\underline{s})}, \mathcal{T}e^{\underline{s}} = \sum_{k=1}^{m(\underline{s})} z_k \mathcal{T}e^k .$$

Propriété : Réduction en monotangentes des multitangentes convergentes.

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*, \exists (z_{\textcolor{red}{2}}; \dots; z_{m(\underline{s})}) \in \mathcal{MZV}^{m(\underline{s})-\textcolor{red}{1}}, \mathcal{T}e^{\underline{s}} = \sum_{k=\textcolor{red}{2}}^{m(\underline{s})} z_k \mathcal{T}e^k .$$

Éléments de démonstration :

1. Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(n_1 + X)^{s_1} \dots (n_r + X)^{s_r}}$.

2. Utilisation de la seconde table de multiplication des multizêtas.

Exemples de réduction de multitangentes convergentes en monotangentes.

$$\mathcal{T}e^{2,4} = \frac{8}{5} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^2 - 2\zeta(3) \mathcal{T}e^3 + \zeta(2) \mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,3} = -\frac{12}{5} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,2} = \frac{8}{5} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^2 + 2\zeta(3) \mathcal{T}e^3 + \zeta(2) \mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,2} = \frac{8}{5} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,3} = -\frac{2}{5} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^2 + \zeta(3) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,2} = -\frac{2}{5} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^2 - \zeta(3) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,2} = \frac{4}{5} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^2 .$$

Propriété : Réduction en monotangentes.

$$\forall \underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) , \exists (z_1 ; \dots ; z_{m(\underline{s})}) \in \mathcal{MZV}^{m(\underline{s})} , \mathcal{T}e^{\underline{s}} = \delta^{\underline{s}} + \sum_{k=1}^{m(\underline{s})} z_k \mathcal{T}e^k ,$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \delta^{\underline{s}} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(i\pi)^r}{r!} & , \text{ si } \underline{s} = 1^{[r]} \text{ et si } r \text{ est pair.} \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{array} \right. \\ z_1 = 0 \iff \delta^{\underline{s}} = 0 . \end{array} \right.$$

$$\mathcal{T}e^{1,1} = -3\zeta(2) .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1} = -\zeta(2)\mathcal{T}e^1 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,4} = \zeta(3)\mathcal{T}e^2 - \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,1} = -\zeta(3)\mathcal{T}e^2 - \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,3} = \zeta(3)\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,2} = -2\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,3,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,1} = 2\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,1} = -\zeta(3)\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

La “multitangente attitude”.

La “multitangente attitude” :

Il existe des liens très forts entre les multizêtas et les multitangentes :

chaque résultat (arithmétique) sur les multizêtas semble se traduire en un résultat sur les multitangentes et réciproquement.

Exemple de l'absence de composante $\mathcal{T}e^1$ dans la réduction en monotangentes.

- 1 Toute multitangente convergente est exponentiellement plate.



La composante $\mathcal{T}e^1$, dans la réduction en monotangentes, est nulle.

- 2 On dispose d'une expression intégrale des multizêtas.



Les multizêtas suivent une loi de multiplication relativement à la représentation intégrale.



La composante $\mathcal{T}e^1$, dans la réduction en monotangentes, est nulle.

Conjecture 1 : Multitangentes nulles.

Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}_{df}^*$.

$$\text{Alors : } \mathcal{T}e^{\underline{s}} = 0 \iff \begin{cases} \underline{s} = \overleftarrow{\underline{s}} . \\ ||\underline{s}|| \text{ est impair} . \\ \underline{s} \in \text{seq}(\{1; 2\}) . \end{cases}$$

Exemple : $\mathcal{T}e^{2,1,2} = 0$.

❖ Faux, si $\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) - \mathcal{S}_{df}^*$:

$$\mathcal{T}e^{1,1,1} = -\zeta(2)\mathcal{T}e^1 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,3,1} = 0 .$$

Conjecture 2 : Nettoyage des 1.

Soit $\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*)$.

Alors :

$$\exists m \in \mathbb{N}^* , \exists (r_1 ; \dots ; r_m) \in \mathbb{Q}^m , \exists (\underline{s}^1 ; \dots ; \underline{s}^m) \in \text{seq}(\mathbb{N}_2)^m , \mathcal{T}e^{\underline{s}} = \sum_{k=1}^m r_k \mathcal{T}e^{\underline{s}^k} .$$

Exemples de nettoyage de 1.

$p = 6$	$\mathcal{T}e^{3,1,2} = \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,3} + \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{2,4} - \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{4,2} .$ $\mathcal{T}e^{2,1,3} = \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,3} - \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{2,4} + \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{4,2} .$ $\mathcal{T}e^{2,1,1,2} = -\frac{1}{3}\mathcal{T}e^{3,3} .$
$p = 7$	$\mathcal{T}e^{4,1,2} = \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{2,2,3} - \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{5,2} + \frac{7}{48}\mathcal{T}e^{4,3} + \frac{23}{48}\mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{2,5}$ $\mathcal{T}e^{3,1,3} = \frac{1}{5}\mathcal{T}e^{2,3,2} .$ $\mathcal{T}e^{2,1,4} = \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{3,2,2} + \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{5,2} + \frac{13}{24}\mathcal{T}e^{4,3} + \frac{5}{24}\mathcal{T}e^{3,4} - \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{2,5} .$

Une autre conjecture autour du nettoyage des 1.

Conjecture 3 : Second lien entre multizêtas et multitangentes.

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_d^* , \mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^2 \in \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{\sigma}})_{\underline{\sigma} \in \mathcal{S}_{df}^*} .$$

$ \underline{s} = 6$	$\mathcal{Z}e^4\mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,3} . \quad \mathcal{Z}e^{3,1}\mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{24}\mathcal{T}e^{3,3} .$ $\mathcal{Z}e^{2,2}\mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{8}\mathcal{T}e^{3,3} . \quad \mathcal{Z}e^{2,1,1}\mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,3} .$
$ \underline{s} = 7$	$\mathcal{Z}^5\mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{30}\mathcal{T}e^{5,2} - \frac{1}{15}\mathcal{T}e^{4,3} + \frac{1}{15}\mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{30}\mathcal{T}e^{2,5} .$ $\mathcal{Z}e^{4,1}\mathcal{T}e^2 = \frac{1}{12}\mathcal{T}e^{2,2,3} - \frac{1}{12}\mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{40}\mathcal{T}e^{5,2} - \frac{1}{20}\mathcal{T}e^{4,3} +$ $\frac{1}{20}\mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{40}\mathcal{T}e^{2,5} .$

Absence de $\mathbb{Q}$ -combinaison linéaire nulle entre multitangentes de poids différents.

Conjecture 4 :

Il n'existe pas de $\mathbb{Q}$ -combinaison linéaire nulle entre multizêtas de poids différents.

Conjecture 4' :

Il n'existe pas de $\mathbb{Q}$ -combinaison linéaire nulle entre multitangentes de poids différents.

Remarque :

- 1 $(\mathcal{T}e^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre.
- 2 Toute multitangente non nulle est transcendante.

Relations entre les différentes conjectures.

Second liens entre MZVs et MTGFs $\implies$ Nettoyage des 1 .

Pas de $\mathbb{Q}$ -combinaison
nulle entre MZVs $\implies$ Pas de $\mathbb{Q}$ -combinaison
nulle entre MTGFs .

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Second liens entre MZVs et MTGFs} \\ \text{Pas de } \mathbb{Q}\text{-combinaison} \\ \text{nulle entre MTGFs} \end{array} \right\} \implies \text{Pas de } \mathbb{Q}\text{-C. L. nulle entre} \\ \text{MZVs de poids différents.}$

- Les invariants holomorphes sont certes couteux mais parfaitement calculables.
- Ils suggèrent d'intéressantes questions arithmétiques, tant sur les multitan-gentes et sur les multizêtas que sur les relations des premiers aux seconds.