

Professeur référent : Olivier Bouillot
Université Paris-Sud XI
Travail d'Étude et de Recherche

Fonctions elliptiques

Découverte d'un monde périodique

Malek Ait-Kaci
Sébastien Besnier

Orsay, le 4 novembre 2012

Table des matières

1	Fonctions elliptiques : définition et premiers résultats	6
1.1	Les fonctions méromorphes et périodiques	6
1.2	Théorèmes de Liouville	8
2	Exemples de Weierstaß	13
2.1	La fonction \wp de Weierstraß	13
2.2	Un théorème de structure	16
3	Exemples de Jacobi	18
3.1	Construction originale des fonctions trigonométriques	18
3.2	Définitions et formules de dérivation et d'addition des fonctions de Jacobi	20
3.3	Illustrations graphiques	23
3.4	Extension aux nombres complexes	26
4	Liens entre \wp et sn	30
4.1	Un lien entre \wp et sn	30
4.2	Expression de \wp en fonction de sn^2	31
4.3	Expression de sn^2 en fonction de \wp	31
5	Conclusion	32
5.1	Lien entre fonctions et intégrales elliptiques	32
5.2	Courbes elliptiques	33
5.3	Fonctions admettant un théorème d'addition algébrique	33

Introduction

Pourquoi *elliptique* ?

Comment calculer le périmètre d'une ellipse ? Une des premières réactions pourrait être de se dire que le calcul de l'aire étant relativement aisé, celui du périmètre ne devrait pas poser de problèmes majeurs. Malheureusement, il n'en est rien !

En effet, considérons une ellipse dans le repère orthonormé (O, x, y) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

avec $b \geq a > 0$. En effectuant le changement de variable $\tilde{y} = \frac{a}{b}y$, l'équation s'écrit

$$x^2 + \tilde{y}^2 = a^2 ,$$

ce qui est l'équation d'un cercle d'aire $a^2\pi$ dans le repère (O, x, \tilde{y}) . Pour repasser dans le repère (O, x, y) , il suffit de dilater la figure verticalement d'un facteur $\frac{b}{a}$; l'aire de l'ellipse est donc de $ab\pi$.

Calculons maintenant le périmètre sur le premier cadran; x prend alors ses valeurs dans l'intervalle $[0; a]$, et on peut exprimer y comme une fonction de x :

$$y(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} .$$

La longueur de la courbe est alors donnée par :

$$\int_0^a \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_0^a \frac{\sqrt{1 - (b^2 - a^2)\frac{x^2}{a^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dx .$$

En posant $k^2 = b^2 - a^2$ et en effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{a}$, on est ramené à calculer :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx .$$

Cette intégrale ne peut pas s'exprimer de façon explicite grâce aux fonctions usuelles et on l'appelle *intégrale elliptique de seconde espèce*.

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons en réalité aux *fonctions elliptiques de première espèce*. C'est à dire qu'on travaille sur les fonctions f qui vérifient

$$x = \int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2x^2}} dx \tag{1}$$

où $k \in [0; 1[$ est appelé le *module*. Cette intégrale n'est pas celle que nous avons obtenu pour calculer le périmètre de l'ellipse. Elle apparaît cependant naturellement lorsqu'on cherche à résoudre le problème du pendule simple ; nous allons en donner une heuristique sans chercher à justifier tous les calculs. Prenons donc un pendule de masse m , suspendu à un fil de longueur l , soumis à l'accélération g de la pesanteur terrestre. L'angle entre le fil et la verticale est noté θ . En termes énergétiques, le problème est traduit de la façon suivante :

$$\frac{1}{2}m(l\partial_t\theta)^2 + mgl(1 - \cos(\theta)) = E$$

où E est une constante positive représentant l'énergie mécanique ; le premier terme correspond à l'énergie cinétique, le second à l'énergie potentiel. En bon mathématiciens, empressons nous de prendre toutes les constantes égales à 1 ; notons également $E = 2k^2$ en imposant¹ $k \in [0; 1[$. L'équation devient alors :

$$\frac{1}{2}(\partial_t\theta)^2 + 1 - \cos(\theta) = 2k^2 ,$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$(\partial_t\theta)^2 = 4(k^2 - \sin^2(\frac{\theta}{2})) . \tag{2}$$

Effectuons alors le changement de variable $\phi = \arcsin\left(\frac{1}{k}\sin\frac{\theta}{2}\right)$. En dérivant $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k\sin(\phi)$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\partial_t\theta = k\cos(\phi)\partial_t\phi .$$

En élevant au carré, on a alors :

$$(\partial_t\theta)^2 = \frac{4k^2(1 - \sin^2(\phi))}{1 - \sin^2(\frac{\theta}{2})}(\partial_t\phi)^2 .$$

L'équation (2) devient :

$$\frac{4k^2(1 - \sin^2(\phi))}{1 - k^2\sin^2(\phi)}(\partial_t\phi)^2 = 4k^2(1 - \sin^2(\phi)) ,$$

d'où

$$(\partial_t\phi) = \sqrt{1 - k^2\sin^2(\phi)} .$$

En notant ϕ^{-1} la fonction réciproque de ϕ , on a alors² :

$$(\phi^{-1})'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(t)}} ,$$

ce qui implique (en posant $u = \sin(t)$) :

$$\phi^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(t)}} = \int_0^{\sin(x)} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - k^2u^2}} .$$

1. Cette limitation traduit le fait qu'on souhaite étudier un mouvement oscillant ; en effet, si l'énergie mécanique est trop grande, le pendule tourne autour de son axe au lieu d'osciller.

2. Les physiciens diraient $\frac{d\phi}{dt} = \text{truc}$, donc $\frac{dt}{d\phi} = \frac{1}{\text{truc}}$, mais nous sommes des gens sérieux.

On a alors :

$$x = \int_0^{\sin(\phi(x))} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}} ;$$

autrement dit, nous avons trouvé f comme nous le cherchions en (1), il s'agit de la fonction déterminée (pour $k \neq 0$) par $f = \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On dénomme kf par sn , et on définit $\text{cn} = \sqrt{1 - \text{sn}^2}$ et $\text{dn} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2}$.

On peut alors constater que ces fonctions ont des propriétés semblables aux fonctions trigonométriques³ (formules d'addition et de dérivation). De plus, pour $k \neq 0$, en les étendant au plan complexe grâce aux formules d'addition, on s'aperçoit qu'il s'agit de fonctions méromorphes doublement périodiques (dans un sens qui sera précisé dans le document).

De quoi parle ce mémoire ?

Nous prenons en fait dans ce mémoire le contre-pied de cette approche en définissant une fonction elliptique comme une fonction méromorphe sur \mathbb{C} doublement périodique.

Nous nous intéressons dans le premier chapitre aux fonctions périodiques et méromorphes sur \mathbb{C} . Cette étude nous conduit rapidement au théorème 1.2 qui nous apprend que de telles fonctions ne peuvent pas avoir plus de trois périodes, à moins d'être constantes. Suivent ensuite des théorèmes attribués à Liouville portant sur les zéros et pôles d'une fonction elliptique. Le chapitre se finit en définissant la notion *d'ordre d'une fonction elliptique* (théorème 1.16); la suite du mémoire étudiera les deux types de fonction d'ordre 2 (à savoir les fonctions de Weierstraß et de Jacobi) et leurs interactions.

Le second chapitre introduit la fonction de Weierstraß \wp . Le résultat le plus intéressant de ce chapitre est sans aucun doute le théorème de structure 2.6 affirmant que n'importe quelle fonction elliptique s'exprime comme fraction rationnelle de \wp et de sa dérivée.

Le troisième chapitre définit rigoureusement les fonctions sn , cn et dn de Jacobi, introduites ci-dessus. L'essentiel du chapitre est un long fleuve (tranquille ?) où l'on construit petit à petit ces fonctions, en les définissant tout d'abord sur un segment de \mathbb{R} , puis en les étendant à \mathbb{R} , et enfin à \mathbb{C} . On y trouvera également des représentations illustrant la dépendance en k de ces fonctions.

Pour ces deux types de fonction (Weierstraß et Jacobi), on établit des formules d'addition.

Le quatrième et dernier chapitre donne finalement les liens entre les fonctions de Weierstraß et de Jacobi.

3. En prenant $k = 0$, on retombe d'ailleurs exactement sur les fonctions trigonométriques

Chapitre 1

Fonctions elliptiques : définition et premiers résultats

1.1 Les fonctions méromorphes et périodiques

Ω désignera dans cette section un ouvert connexe. De plus, sans précisions supplémentaires, un *disque* sera ouvert.

En guise d'entrée en matière, cette section se propose de montrer un premier théorème de structure sur l'ensemble des fonctions méromorphes. Nous classifions ces fonctions par leurs propriétés de périodicité ; nous verrons notamment qu'une fonction méromorphe ne peut avoir plus de deux périodes distinctes (dans un sens à préciser). Pour cela, nous donnons la définition suivante de période :

Définition 1.1 Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est périodique de période λ si pour tout z dans Ω , $z + \lambda \in \Omega$ et $f(z + \lambda) = f(z)$.

On note alors Λ l'ensemble des périodes de f .

Notons que 0 est toujours une période, et $\Lambda = \mathbb{C}$ si, et seulement si, f est entière et constante. Il est également immédiat que Λ est un \mathbb{Z} -module. Le théorème annoncé plus haut s'écrit alors :

Théorème 1.2 Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe non constante et Λ son ensemble de périodes. Il y a alors exactement trois possibilités :

- $\Lambda = \{0\}$,
- il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda$, de module minimal,
- il existe un couple $(\lambda_1; \lambda_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tel que $\Im\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \neq 0$, $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2$, et $(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ minimal (pour l'ordre lexicographique¹ sur \mathbb{R}^2) pour cette propriété.

Lorsque nous serons dans le troisième cas, nous appellerons alors λ_1 et λ_2 des périodes fondamentales.

Remarque 1.3 En général, il n'y a pas unicité des périodes fondamentales, comme l'illustre la figure 1.1.

1. C'est à dire défini par : $(x; y) \preccurlyeq (x'; y') \Leftrightarrow x < x'$ ou $(x = x'$ et $y \leq y')$

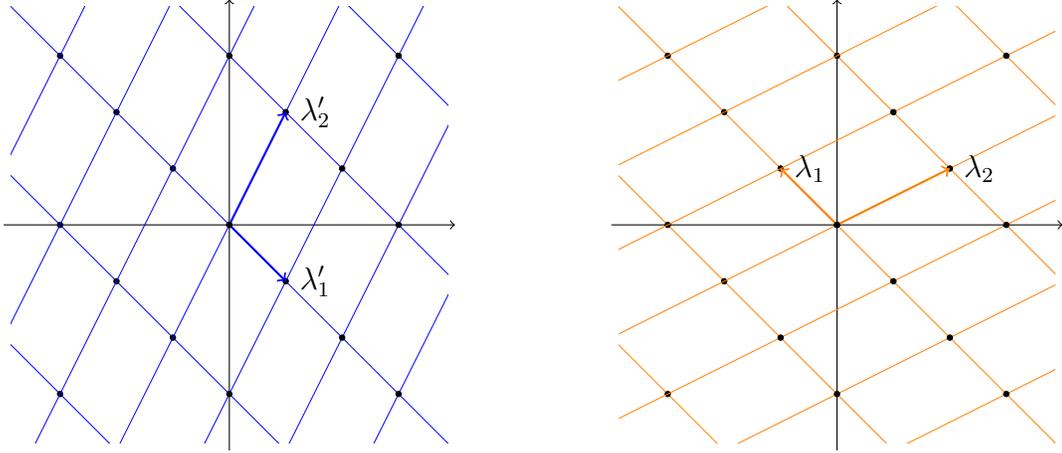


Figure 1.1 – Illustration du troisième cas du théorème : dans les deux graphiques, les points noirs représentent les éléments de Λ . $(\lambda_1; \lambda_2)$ et $(\lambda'_1; \lambda'_2)$ sont deux choix distincts de périodes fondamentales.

Nous pouvons immédiatement déduire du théorème le résultat suivant, dû à Jacobi :

Corollaire 1.4 *Une fonction méromorphe avec trois périodes indépendantes est constante.*

Si $\Lambda = \{0\}$, on est dans le premier cas. On suppose donc maintenant $\Lambda \neq \{0\}$.

La démonstration du théorème se découpe en deux temps principaux. On montre d'abord que l'ensemble des périodes est discret ; ceci est une conséquence du *principe des zéros isolés*. Pour finir, on construit une base (de \mathbb{Z} -module) (à un ou deux éléments selon les cas) de l'ensemble des périodes.

Nous commençons donc la preuve par un résultat topologique :

Lemme 1.5 *L'ensemble Λ des périodes est discret dans \mathbb{C} ; c'est à dire qu'il ne contient pas de points d'accumulation.*

Preuve. *Supposons par l'absurde que l'ensemble Λ possède un point d'accumulation λ_∞ dans \mathbb{C} . On peut alors trouver une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de périodes distinctes de λ_∞ telle que $\lambda_n \rightarrow \lambda_\infty$. Soit $z_0 \in \Omega$. Comme f est périodique, $f(z_0) = f(z_0 + \lambda_n)$; par continuité de f , on a de plus $f(z_0 + \lambda_n) \rightarrow f(z_0 + \lambda_\infty)$ et donc $f(z_0) = f(z_0 + \lambda_\infty)$. En considérant alors la fonction méromorphe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f(z) - f(z_0)$, on constate que $z_0 + \lambda_\infty$ est un zéro non isolé de g . Donc g est nulle et f constante, ce qui contredit notre hypothèse.*

□

Λ étant discret dans \mathbb{C} , l'ensemble $\{|\lambda|; \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}\}$ l'est également et il existe un élément λ_1 de Λ tel que $|\lambda_1| = \min\{|\lambda|; \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}\}$.

Les $\mathbb{Z}\lambda_1$ sont des éléments de Λ situés sur la droite $\mathbb{R}\lambda_1$; par minimalité de $|\lambda_1|$, ce sont les seuls éléments de cette droite appartenant à Λ : si $z = r\lambda_1 \in \Lambda$ avec $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on construit² $z' = z - E(r)\lambda_1 \in \Lambda$ qui est de norme $(r - E(r))|\lambda_1| < |\lambda_1|$.

² E désigne la partie entière inférieure.

Si $\Lambda \setminus \mathbb{Z}\lambda_1$ est vide, $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1$ et nous sommes alors dans le second cas du théorème.

Supposons maintenant $\Lambda \setminus \mathbb{Z}\lambda_1$ non vide et notons λ_2 un élément de valeur absolue minimale de cet ensemble (il existe bien par le lemme 1.5); par construction, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$. Le résultat suivant va nous permettre de conclure que nous sommes alors dans le troisième cas du théorème :

Lemme 1.6 *Si $\Lambda \setminus \mathbb{Z}\lambda_1 \neq \emptyset$, tout élément λ de Λ possède une unique représentation :*

$$\lambda = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2, (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}) .$$

Preuve. Comme λ_2 n'est pas sur la droite vectorielle engendrée par λ_1 , (λ_1, λ_2) forme une base \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . Ainsi, il existe μ_1, μ_2 dans \mathbb{R} tels que $\lambda = \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2$. Prenons maintenant deux entiers n_1, n_2 tels que $|\mu_j - n_j| \leq \frac{1}{2}$, pour $j = 1, 2$ et considérons $\lambda' = \lambda - n_1\lambda_1 - n_2\lambda_2 = (\mu_1 - n_1)\lambda_1 + (\mu_2 - n_2)\lambda_2 \in \Lambda$. De plus, λ_1 et λ_2 n'étant pas colinéaires, l'inégalité triangulaire suivante est stricte :

$$\begin{aligned} |\lambda'| &< |\mu_1 - n_1||\lambda_1| + |\mu_2 - n_2||\lambda_2| \\ &\leq \frac{1}{2}|\lambda_1| + \frac{1}{2}|\lambda_2| \\ &\leq |\lambda_2| . \end{aligned}$$

Ainsi, par minimalité de $|\lambda_2|$, λ' est un élément de $(n\lambda_1)_{n \in \mathbb{Z}}$ et donc on peut trouver un entier n tel que $\lambda' = n\lambda_1$. Finalement, $\lambda = (n_1 + n)\lambda_1 + n_2\lambda_2$. L'unicité annoncée découle immédiatement de l'unicité d'écriture d'un vecteur dans une base dans un espace vectoriel.

□

Le théorème 1.2 est donc démontré. Le cas des fonctions méromorphes admettant exactement deux périodes est le sujet principal de ce mémoire.

Définition 1.7 *Une fonction méromorphe sur \mathbb{C} admettant exactement deux périodes fondamentales distinctes est appelée fonction elliptique.*

Nous pouvons dès à présent constater que l'ensemble des fonctions elliptiques sur un réseau donné est un corps différentiel³. La suite du chapitre aura pour objet de donner quelques propriétés intéressantes de ces fonctions.

1.2 Théorèmes de Liouville

On va déterminer dans cette partie des propriétés sur les zéros et les pôles d'une fonction elliptique. Ces résultats intéressants en soi permettront aussi de préparer le terrain à un théorème de structure sur l'ensemble des fonctions elliptiques. Pour cela, donnons nous un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2$ avec $(\lambda_1; \lambda_2)$ des périodes fondamentales.

Définition 1.8 *On appelle un parallélogramme fondamental de Λ l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{\alpha; \alpha + \lambda_1; \alpha + \lambda_1 + \lambda_2; \alpha + \lambda_2\}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.*

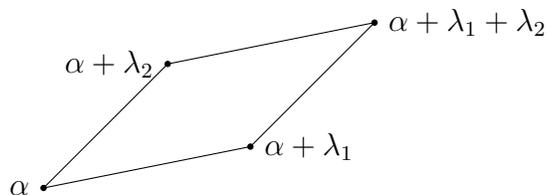


Figure 1.2 – Un parallélogramme fondamental issu de α

Le résultat préliminaire suivant concerne les résidus de f et nous sera utile pour démontrer le théorème 1.10.

Théorème 1.9 Soient f une fonction elliptique et P un parallélogramme fondamental de Λ tel que f n'ait ni zéro ni pôle sur la frontière⁴ de P .

Alors la somme des résidus de f dans P est nulle.

Preuve. D'après le théorème des résidus :

$$\int_{\partial P} f(z) dz = 2i\pi \sum_{a \in S} \text{Res}(f, a) ,$$

où S est l'ensemble des pôles de f dans P . Or comme f est de période λ_2 , on a :

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\lambda_1} f(z) dz = \int_{\alpha+\lambda_2}^{\alpha+\lambda_2+\lambda_1} f(z) dz .$$

De même, f est de période λ_1 . Les intégrales sur les deux autres segments s'annulent aussi. On a donc :

$$2i\pi \sum_{a \in S} \text{Res}(f, a) = 0 .$$

□

Le théorème qui suit sera un argument clef pour le théorème de structure 2.6 page 16.

Théorème 1.10 Soient f une fonction elliptique et P un parallélogramme fondamental de Λ tel que f n'ait ni zéro ni pôle sur la frontière de P . Notons $\{a_i\}_{i \in I}$ les points singuliers⁵ (zéros et pôles) de f à l'intérieur de P , et m_i l'ordre de multiplicité de a_i .

Alors :

$$\sum_{i \in I} m_i = 0 .$$

3. Un corps différentiel K est un corps muni d'une opération de dérivation $\partial : K \rightarrow K$ tel que ∂ soit un morphisme de groupe additif et vérifie l'égalité de Leibniz : $\partial(uv) = \partial(u)v + u\partial(v)$. Ici, ∂ est la dérivation holomorphe.

4. On peut toujours trouver un tel P , le nombre de zéros et pôles de f dans un parallélogramme étant fini ; en effet, l'ensemble de ces zéros et pôles est discret et le parallélogramme est compact.

5. Où I est un ensemble fini d'indice.

Preuve. Comme f est elliptique, f' l'est et $\frac{f'}{f}$ l'est aussi⁶. On peut alors appliquer le théorème 1.8 à $\frac{f'}{f}$:

$$0 = \int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi \sum_{a \in S} \text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right),$$

où S est l'ensemble des pôles de $\frac{f'}{f}$ dans P . On termine en se rappelant que $\text{Res}(f'/f, a_i) = m_i$.

□

Pour unifier le discours, nous posons la définition suivante :

Définition 1.11 (Point singulier) Si u est un pôle d'ordre k , nous dirons que u est un point singulier d'ordre $-k$, et si u est un zéro d'ordre k , nous dirons alors que u est un point singulier d'ordre k . Nous noterons alors $\text{ord}_u f$ l'ordre⁷ d'un point singulier u .

Remarque 1.12 Nous pouvons alors reformuler le théorème 1.10 en disant que la somme des ordres des points singuliers de f sur le tore \mathbb{C}/Λ est égale à zéro. Nous utiliserons cette vision dans la suite.

Corollaire 1.13 Soient f une fonction elliptique et P un parallélogramme fondamental de Λ tel que f n'ait ni zéro ni pôle sur la frontière.

Alors, f a au moins deux pôles en comptant l'ordre de multiplicité.

Preuve. En effet, si f n'a aucun pôle, elle est holomorphe et bornée, donc constante et n'est donc pas elliptique. Si f possède un unique pôle de multiplicité 1 le théorème 1.10 est mis en défaut.

□

Le théorème 1.15 donne un joli résultat. Le point astucieux de la preuve est la démonstration du lemme suivant :

Lemme 1.14 Soit f une fonction elliptique, α dans le domaine de définition de f et λ une période de f .

Alors :

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\lambda} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Preuve. Soit γ un chemin de α à $\alpha + \lambda$ évitant les pôles et zéros de f . Comme $\frac{f'(\alpha + \lambda)}{f(\alpha + \lambda)} = \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}$, $f(\gamma)$ est un chemin fermé. On a alors

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\lambda} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{f(\gamma)} \frac{d\omega}{\omega} = 2i\pi \text{Ind}(f(\gamma), 0).$$

Comme l'indice d'une fonction est à valeur entière, le lemme est bien démontré.

□

6. On a vu que l'ensemble des fonctions elliptiques était un corps différentiel.

7. Noter qu'il s'agit d'un entier relatif.

Théorème 1.15 Soient f une fonction elliptique et P un parallélogramme fondamental de Λ tel que f n'ait ni zéro ni pôle sur la frontière. Notons $\{a_i\}_{i \in I}$ les points singuliers de f à l'intérieur de P et m_i l'ordre de multiplicité de a_i .

Alors :

$$\sum_{i \in I} m_i a_i = 0 \pmod{\Lambda} .$$

Preuve. Pour tout a_i , il existe une fonction g holomorphe sur un voisinage de a_i , non nulle telle que $f(z) = (z - a_i)^{m_i} g(z)$. Donc :

$$\begin{aligned} z \frac{f'(z)}{f(z)} &= z \left(\frac{m_i}{z - a_i} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right) \\ &= m_i + \frac{m_i a_i}{z - a_i} + z \frac{g'(z)}{g(z)} . \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{Res} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)}, a_i \right) = m_i a_i .$$

Par le théorème des résidus :

$$\int_{\partial P} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi \sum_{i \in I} m_i a_i .$$

Regardons à présent le membre de gauche de cette égalité :

$$\begin{aligned} \int_{\partial P} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{\alpha}^{\alpha+\lambda_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\alpha+\lambda_2}^{\alpha+\lambda_2+\lambda_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &\quad + \int_{\alpha+\lambda_1}^{\alpha+\lambda_1+\lambda_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\alpha+\lambda_2}^{\alpha} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz . \end{aligned}$$

Or, avec le changement de variable $w = z - \lambda_2$, $\frac{f'}{f}$ étant λ_2 -périodique, on a :

$$\int_{\alpha+\lambda_2}^{\alpha+\lambda_2+\lambda_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\alpha}^{\alpha+\lambda_1} (w + \lambda_2) \frac{f'(w)}{f(w)} dw .$$

D'où :

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\lambda_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\alpha+\lambda_2}^{\alpha+\lambda_2+\lambda_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \lambda_2 \int_{\alpha}^{\alpha+\lambda_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz .$$

En effectuant un travail similaire sur l'autre paire d'intégrales, on obtient :

$$\int_{\partial P} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \lambda_2 \int_{\alpha}^{\alpha+\lambda_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \lambda_1 \int_{\alpha}^{\alpha+\lambda_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz .$$

Le lemme 1.14 permet alors de trouver k, k' entiers tels que

$$2i\pi \sum_{i \in I} m_i a_i = 2i\pi (\lambda_1 k + \lambda_2 k') .$$

□

Nous pouvons dégager la notion d'ordre d'une fonction elliptique.

Théorème 1.16 (Définition de la notion d'ordre) Soient f une fonction elliptique, P un parallélogramme fondamental de Λ et $c \in \mathbb{C}$ tel que $f - c$ n'ait ni zéro ni pôle sur le bord de P .

Alors le nombre de solutions de l'équation $f(z) = c$ situées à l'intérieur de P ne dépend que de f et est égal au nombre de pôle de f . On appelle alors ce nombre ordre⁸ de f .

Preuve. D'après le principe de l'argument⁹ en notant respectivement Z et S le nombre de zéros et de pôles de $f - c$ contenus dans P (avec multiplicité), on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z) - c} dz = Z - S .$$

En procédant comme dans le théorème 1.9, on obtient :

$$\int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z) - c} dz = 0 ,$$

d'où $Z = S$. Il ne reste plus qu'à remarquer que les pôles de $f - c$ sont les pôles de f pour conclure. □

Le corollaire 1.13 se reformule alors en disant que toute fonction elliptique est au moins d'ordre 2.

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons aux fonctions elliptiques d'ordre 2. Elles sont de deux types, celles possédant un pôle d'ordre 2 (de type Weierstraß), et celles possédant deux pôles simples (de type Jacobi) à l'intérieur d'un parallélogramme fondamental. Nous montrerons que l'on peut passer d'une famille à l'autre.

8. Attention à ne pas confondre avec l'ordre d'un point singulier défini en 1.11.

9. Principe de l'argument : si γ est un lacet simple positivement orienté formant le bord ∂K d'un compact régulier K , alors $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_{f,K} - P_{f,K}$, où $Z_{f,K}$ et $P_{f,K}$ représentent respectivement le nombre de zéros et de pôles de f dans K comptés avec leur multiplicité.

Chapitre 2

Exemples de Weierstraß

2.1 La fonction \wp de Weierstraß

Dans le chapitre précédent, nous avons établi quelles formes devaient avoir les fonctions méromorphes périodiques. Il est aisé de construire des fonctions ne présentant qu'une seule période¹ ; cependant, il est moins évident de construire des fonctions non triviales admettant deux périodes fondamentales distinctes. Cette section va en exhiber un exemple² : la fonction \wp de Weierstraß.

Pour cela, donnons nous un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2$ avec $\Im(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \neq 0$. La fonction \wp que nous allons définir va dépendre du réseau choisi ; ainsi, en toute rigueur, nous devrions la noter \wp_Λ . Cependant, pour ne pas alourdir les notations nous la noterons simplement \wp .

Propriété 2.1 (Définition de la fonction \wp de Weierstraß) *Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, nous définissons*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda'} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

où λ dans $\Lambda' = \Lambda \setminus \{0\}$.

La série de fonctions définissant \wp est uniformément convergente sur tout compact disjoint de Λ . Par conséquent, comme chaque $z \mapsto \frac{1}{(z-\lambda)^2} + \frac{1}{\lambda^2}$ est méromorphe, \wp est également méromorphe.

Comme pour z dans un compact disjoint de Λ , on a $\left| \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| = O\left(\frac{1}{|\lambda|^3}\right)$, il suffit de montrer le lemme suivant pour établir cette proposition :

Lemme 2.2 *Si $\alpha > 2$, alors $\sum_{\lambda \in \Lambda'} \frac{1}{|\lambda|^\alpha}$ converge³.*

Preuve. *Le résultat découle de l'équivalence de normes en dimension finie. Comme (λ_1, λ_2) forme une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , l'application définie par $N(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2) = \max(|x_1|, |x_2|)$ est une norme, qui est équivalente à $|\cdot|$. Il suffit donc de montrer que la série*

$$\sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{\max(|n_1|, |n_2|)}$$

-
1. Penser par exemple aux fonctions trigonométriques.
 2. Nous verrons dans la section suivante que cet exemple sera en fait fondamental.
 3. La réciproque est également vraie : si $\alpha \leq 2$, la série diverge

est convergente. Cette série se découpe suivant les quatre quadrants et vaut donc

$$4 \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^\alpha} + 4 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{\max(n_1, n_2)^\alpha} .$$

Or peut majorer la somme sur tous les couples (n_1, n_2) par deux fois la somme sur les couples tels que $n_1 \geq n_2$. La série est donc majorée par

$$4 \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^\alpha} + 8 \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{n_1}{n_1^\alpha}$$

qui converge car $\alpha > 2$.

□

La périodicité de \wp n'est pas immédiate, nous utiliserons celle de \wp' pour l'établir :

Propriété 2.3 \wp est paire et Λ -périodique.

Preuve. La parité de \wp est quasi immédiate : il suffit de réaliser que sommer sur les points du réseau ou sur leurs opposées revient au même (il s'agit d'un changement d'indice de sommation).

La convergence de la série définissant \wp étant uniforme sur tout compact, on peut donc dériver terme à terme pour calculer \wp' :

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^3}$$

(noter que l'on somme cette fois sur Λ tout entier). \wp' est alors clairement Λ -périodique ; dit autrement,

$$\frac{\partial}{\partial z} (\wp(z + \lambda_1) - \wp(z)) = 0 .$$

Comme $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ est connexe, il existe donc $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$\wp(z + \lambda_1) = \wp(z) + C,$$

d'où, en prenant $z = -\lambda_1/2$,

$$\wp(\lambda_1/2) = \wp(-\lambda_1/2) + C .$$

Or \wp étant paire, on a $C = 0$. En raisonnant de même avec λ_2 , on a bien montré que \wp est Λ -périodique.

□

Pour conclure nous donnons deux propriétés sur la fonction \wp . La propriété 2.4 est une formule d'addition, alors que la propriété 2.5 donne une équation différentielle vérifiée par \wp ; nous aurons des résultats de même nature pour les fonctions de Jacobi dans le chapitre suivant.

Propriété 2.4 Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}/\Lambda$, z_1 et z_2 non nuls, en notant M_{z_1, z_2} la matrice

$$M_{z_1, z_2} = \begin{pmatrix} \wp(z_1) & \wp'(z_1) & 1 \\ \wp(z_2) & \wp'(z_2) & 1 \\ \wp(z_1 + z_2) & -\wp'(z_1 + z_2) & 1 \end{pmatrix}$$

on a $\det(M_{z_1, z_2}) = 0$.

Preuve. Soit z_1 et z_2 non nuls dans \mathbb{C}/Λ . Supposons dans un premier temps que $\wp(z_1) \neq \wp(z_2)$.

Soient $A, B \in \mathbb{C}$ tel que $\wp'(z_i) = A\wp(z_i) + B$ pour $i \in \{1, 2\}$, et soit $\phi(z) = \wp'(z) - A\wp(z) - B$. Il est facile de voir que ϕ est elliptique et possède un pôle d'ordre 3 en 0. D'après le théorème 1.10, ϕ possède donc trois zéros (comptés avec multiplicités) dans le tore. Il existe donc $z_3 \in \mathbb{C}/\Lambda$ tels que z_1, z_2 et z_3 sont les zéros de ϕ (éventuellement, $z_3 = z_1$ ou z_2).

D'après le théorème 1.15, on a alors $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \pmod{\Lambda}$. D'où :

$$\phi(z_3) = 0 = \wp'(-z_1 - z_2) - A\wp(-z_1 - z_2) - B .$$

Or \wp étant paire et \wp' impaire, on a :

$$-\wp(z_1 + z_2) = A\wp(z_1 + z_2) - B .$$

En injectant cette identité dans le calcul du déterminant (développer par rapport à la dernière colonne), on arrive sans difficulté à la relation annoncée.

Dans le cas où $\wp(z_1) = \wp(z_2)$, on considère $\xi_h = z_2 + h$ tel que $\xi_h \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$. Pour h proche de 0, on a bien $\wp(z_1) \neq \wp(\xi_h)$ et donc $\det(M_{z_1, \xi_h}) = 0$. Par continuité de l'application $h \mapsto \det(M_{z_1, \xi_h})$, on a alors $\det(M_{z_1, z_2}) = 0$.

□

Propriété 2.5 La fonction \wp vérifie l'équation différentielle suivante

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

où $g_2 = 60 \sum_{\lambda \in \Lambda'} \frac{1}{\lambda^4}$ et $g_3 = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda'} \frac{1}{\lambda^6}$.

Nous nous contenterons d'esquisser la preuve de cette propriété :

Preuve. L'idée de la preuve est de développer \wp en série de Laurent autour de ces pôles, puis grâce à ce développement, remarquer que $z \mapsto \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) + g_3$ se prolonge en 0 en ces pôles ; elle sera alors bornée donc constante d'après le théorème de Liouville.

□

L'introduction indiquait page 3 que l'on cherchait à étudier des fonctions f tels que :

$$x = \int_0^{f(x)} \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

Or, d'après l'équation différentielle obtenue, on aurait plutôt un polynôme de degré 3 sous la racine. Nous laisserons le lecteur se convaincre qu'un changement de variable approprié permet de passer d'une forme à l'autre.

2.2 Un théorème de structure

Dans la section précédente, nous avons exhibé une fonction elliptique. Nous allons voir ici qu'en réalité, il n'y en a pas "beaucoup d'autres". En se fixant un réseau Λ comme précédemment, nous allons en effet montrer le théorème suivant :

Théorème 2.6 *Le corps des fonctions elliptiques est engendré par \wp et \wp' . Autrement dit, une fonction elliptique est une fraction rationnelles en \wp et \wp' .*

Le reste de cette section est dédiée à la démonstration de ce résultat. Nous aurons notamment besoin du théorème de Liouville 1.10 énoncé page 9.

Revenons à la preuve du théorème 2.6 : comme une fonction peut toujours se décomposer en une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, il suffit alors de montrer le théorème pour les fonction présentant une parité. De plus, comme \wp' est impaire, si f est impaire, le produit $f\wp'$ est paire. Nous pouvons donc nous contenter d'établir le résultat suivant pour prouver le théorème :

Propriété 2.7 *Soit f une fonction elliptique paire, alors elle s'écrit comme une fraction rationnelle en \wp .*

Nous aurons alors directement le corollaire suivant :

Corollaire 2.8 *Soit f une fonction elliptique impaire, alors $f = \frac{1}{\wp'}g$ où g est une fraction rationnelle en \wp .*

Démontrons maintenant la proposition 2.7 et prenons f comme dans l'énoncé. L'idée est de construire une fonction g , fraction rationnelle en \wp dont les points singuliers, considérés avec leurs multiplicités, sont exactement ceux de f . Ainsi, g/f sera entière et bornée, donc constante par le théorème de Liouville, ce qui démontrera le résultat.

La succession de remarques suivantes va nous permettre de construire une telle fonction g .

Lemme 2.9 *Soit f une fonction elliptique paire.*

1. *Si u est un point singulier de f d'ordre k , alors il en est de même pour $-u$.*
2. *Si u est un point singulier tel que $u = -u \pmod{\Lambda}$ (i.e. $2u = 0 \pmod{\Lambda}$), alors u est d'ordre au moins deux.*
3. *Soit $u \neq 0 \pmod{\Lambda}$ et $h_u : z \mapsto \wp(z) - \wp(u)$. Si $2u \neq 0 \pmod{\Lambda}$, alors u et $-u$ sont les deux seuls zéros de h_u (sur le tore) et ils sont simples. Sinon, u est le seul zéro de h_u et est d'ordre 2.*
4. *Si u est un point singulier de f tel que $2u = 0, u \neq 0 \pmod{\Lambda}$, alors u est d'ordre pair.*

Preuve. *Soit f une fonction elliptique paire.*

1. *Comme f est elliptique paire, les fonctions $z \in \mathbb{C}/\Lambda \mapsto f(z)$ et $z \in \mathbb{C}/\Lambda \mapsto f(-z)$ sont identiques. Donc si u est un point singulier d'ordre k , il en va de même pour $-u$.*

2. Soit u un point singulier tel que $u = -u \pmod{\Lambda}$; f étant paire, f' est impaire et $f'(u) = -f'(-u)$. Comme f' est Λ -périodique, on a $f'(u) = -f'(u)$ d'où $f'(u) = 0$.
3. Comme \wp (et donc h_u) ne possède qu'un seul pôle sur le tore (à savoir $0 \pmod{\Lambda}$) qui est d'ordre 2, d'après la remarque 1.12, la somme des ordres des zéros de h_u doit aussi être 2. Donc si $2u \neq 0 \pmod{\Lambda}$, u et $-u$ sont deux zéros simples de h_u ; d'après le 2., si $2u = 0 \pmod{\Lambda}$, u est au moins d'ordre 2, donc exactement d'ordre 2. Dans les deux cas, h_u n'a pas d'autres zéros.
4. Pour u un zéro, si $f(u)/h_u(u) \neq 0$ alors $\text{ord}_u f = 2$. Si $f(u)/h_u(u) = 0$, comme f/h_u est elliptique et paire, on peut lui appliquer le 2. et recommencer. Pour u un pôle, raisonner de même en considérant fh_u .

□

Nous avons maintenant assez de matériel pour construire g . D'après le 1. du lemme précédent, l'ensemble

$$Z = \{u \neq 0 \pmod{\Lambda}; u \text{ est un point singulier de } f\}$$

se partitionne donc en $\bigcup_{i=1}^r \{u_i, -u_i\}$. Pour chaque u_i , trouvons un entier m_i tel que la fonction $g_i : z \mapsto [\wp(z) - \wp(u_i)]^{m_i}$ présente une singularité du même ordre que f en u_i . Les 3. et 4. du lemme nous permettent alors de poser :

$$\begin{array}{lll} m_i = \text{ord}_{u_i} f & \text{si} & 2u_i \neq 0 \pmod{\Lambda} \\ m_i = \frac{1}{2} \text{ord}_{u_i} f & \text{si} & 2u_i = 0 \pmod{\Lambda} . \end{array}$$

Donc par construction, la fonction $g : z \mapsto \prod_{i=0}^r g_i(z)$ a bien le même ordre que f en tout $z \neq 0 \pmod{\Lambda}$. Grâce au théorème 1.10, cela reste vrai en $0 \pmod{\Lambda}$. Nous avons donc démontré la propriété 2.7 et le théorème 2.6.

Pour conclure ce chapitre, nous allons donner explicitement l'expression de \wp'' (qui est elliptique) en fonction de \wp et \wp' . En exprimant les fonctions sous forme de séries, le résultat semble très complexe à obtenir. En revanche, en se servant de l'équation de la propriété 2.5, le problème devient trivial. En effet, en dérivant l'expression

$$\wp'^2 = 4\wp^3 + g_2\wp + g_3,$$

on obtient

$$2\wp'\wp'' = 12\wp'\wp^2 + g_2\wp',$$

puis

$$\wp'' = 6\wp^2 + \frac{1}{2}g_2 .$$

Chapitre 3

Exemples de Jacobi

Nous allons dans ce chapitre définir les fonctions de Jacobi sn , cn et dn qui sont des analogues des fonctions trigonométriques. Afin de faire le lien entre ces deux types de fonctions, nous commençons dans une première partie par définir de manière non conventionnelle les fonctions trigonométriques. La construction des fonctions de Jacobi sera très fortement calquée sur cette définition. Nous verrons à la fin du chapitre qu'elles sont elliptiques.

3.1 Construction originale des fonctions trigonométriques

Considérons la fonction

$$u : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad A = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} .$$
$$x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Cette fonction est impaire, strictement croissante sur $[0; 1]$, valant¹ 0 en 0 et A en 1. La fonction u est donc une bijection de $[-1; 1]$ sur $[-A; A]$ et sa fonction réciproque u^{-1} est aussi impaire et strictement croissante. On pose alors les définitions suivantes.

Définition 3.1 *Pour $x \in [-A; A]$, on définit le sinus et le cosinus par*

$$\begin{cases} \sin(x) &= u^{-1}(x), \\ \cos(x) &= \sqrt{1 - \sin^2(x)} . \end{cases}$$

1. Il est bien connu que $A = \frac{\pi}{2}$; cependant, on suppose ici qu'on ne le sait pas et on définit le nombre π par $\pi = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

À partir de ces définitions, on retrouve très simplement les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(0) = 0 \qquad \qquad \qquad \cos(0) = 1, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \qquad \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\sin(x)) = \frac{1}{u'(\sin(x))} = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \cos(x), \\ \frac{\partial}{\partial x}(\cos(x)) = \frac{-2 \cos(x) \sin(x)}{2\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = -\sin(x). \end{array} \right.$$

De ces formules de dérivation on retrouve aisément les formules d'addition usuelles :

Propriété 3.2 Pour x, y dans $[-A; A]$ tels que $x + y$ soit aussi dans $[-A; A]$, on a

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x), \\ \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y). \end{aligned}$$

Preuve. Considérons la fonction f définie par

$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x).$$

En dérivant partiellement, on a $\partial_x f = \partial_y f$; on en déduit que $f(x, y) = F(x + y)$ où F est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Comme $F(x) = f(x, 0) = \sin(x)$, la première formule est bien établie. Pour obtenir la seconde, on peut dériver la première par rapport à x .

□

Pour l'instant, ces fonctions sont définies sur $[-A; A]$. Cherchons à étendre la définition du sinus et du cosinus à \mathbb{R} tout entier tout en préservant ces formules d'addition. Pour $x \in [A; 2A]$, cela impose :

$$\sin(x) = \sin((x - A) + A) = \sin(x - A) \cos(A) + \sin(A) \cos(x - A) = \cos(x - A).$$

De manière similaire, pour $x \in [A; 2A]$ on obtient

$$\cos(x) = -\sin(x - A).$$

Par récurrence, on définit alors facilement \sin et \cos sur \mathbb{R}^+ , puis sur \mathbb{R} tout entier grâce aux propriétés de parité.

Remarque 3.3 Nous aurions pu étendre ces définitions par un tout autre moyen. En effet, connaissant les formules de dérivation, on peut en déduire les développements en série entière du sinus et du cosinus grâce à la formule de Taylor-McLaurin. Les rayons des séries entières étant infinis, on peut alors définir ces deux fonctions trigonométriques sur le plan complexe tout entier. Les formules d'additions sont évidemment encore conservées.

3.2 Définitions et formules de dérivation et d'addition des fonctions de Jacobi

Soit $k \in [0; 1[$, on pose :

$$u : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} .$$

$$x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

Par les mêmes arguments que dans la section précédente, u est une bijection de $[-1; 1]$ dans $[-K; K]$, ce qui nous permet de poser les définitions suivantes.

Définition 3.4 Pour x dans $[-K; K]$ on définit les fonctions sn , cn , dn par :

$$\begin{cases} \text{sn}(x) &= u^{-1}(x), \\ \text{cn}(x) &= \sqrt{1 - \text{sn}^2(x)}, \\ \text{dn}(x) &= \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(x)} \end{cases}$$

(les fonctions cn et dn sont bien définies car sn prend ses valeurs dans $[-1; 1]$). Ces fonctions dépendent de k , qu'on appelle le module ; c'est pourquoi on notera parfois $\text{sn}(x, k)$, $\text{cn}(x, k)$ et $\text{dn}(x, k)$ lorsqu'il sera utile de mettre le module en évidence.

Remarque 3.5 On retrouve très facilement les fonctions trigonométriques à partir des fonctions de Jacobi. En effet, pour $k = 0$, on a $\text{sn}(\cdot, 0) = \sin$ et $\text{cn}(\cdot, 0) = \cos$. De plus, on pourrait prendre $k = 1$ dans les définitions ci-dessus, et on aurait $\text{sn}(\cdot, 1) = \sinh$; en revanche, nous n'avons pas d'identité équivalente entre cn et \cosh . C'est cette dissymétrie qui nous pousse à ne définir ces fonctions que pour $k \in [0, 1[$; ce choix évitera de distinguer le cas $k = 1$ dans la plupart des raisonnements.

On peut alors déterminer des propriétés immédiates pour ces fonctions de manière analogue au travail fait pour les fonctions trigonométriques :

$$\begin{cases} \text{sn}(0) = 0, & \text{cn}(0) = 1, & \text{dn}(0) = 1, \\ \text{sn}(K) = 1, & \text{cn}(K) = 0, & \text{dn}(K) = \sqrt{1 - k^2}. \end{cases}$$

Posons $k' = \sqrt{1 - k^2}$, qu'on appellera le *co-module*. Pour $x \in [-K; K]$ on, a les identités :

$$\begin{cases} \text{sn}^2(x, k) + \text{cn}^2(x, k) = 1, \\ \text{dn}^2(x, k) + k^2 \text{sn}^2(x, k) = 1, \\ k^2 \text{cn}^2(x, k) + k'^2 = \text{dn}^2(x, k), \\ \text{cn}^2(x, k) + k'^2 \text{sn}^2(x, k) = \text{dn}^2(x, k). \end{cases}$$

Les fonctions de Jacobi vérifient les formules de dérivations suivantes, analogues à celle des fonctions trigonométriques.

Propriété 3.6 Pour tout x dans $] - K; K[$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[\operatorname{sn}(x)] = \operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x), \\ \frac{d}{dx}[\operatorname{cn}(x)] = -\operatorname{sn}(x)\operatorname{dn}(x), \\ \frac{d}{dx}[\operatorname{dn}(x)] = -k^2\operatorname{sn}(x)\operatorname{cn}(x). \end{cases}$$

Preuve. Pour la première expression, on part de la définition de la fonction u . Pour tout $x \in] - 1; 1[$,

$$\frac{d}{dx}[u(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

D'où, pour tout $x \in] - K; K[$,

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sn}(x)] = \sqrt{1-\operatorname{sn}(x)^2}\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}(x)^2} = \operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x).$$

Pour la seconde expression, on dérive l'identité $\operatorname{sn}^2(x) + \operatorname{cn}^2(x) = 1$, et on obtient :

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{cn}(x)]\operatorname{cn}(x) - \frac{d}{dx}[\operatorname{sn}(x)]\operatorname{sn}(x) = 0.$$

Comme $x \in] - K, K[$, $\operatorname{cn}(x) \neq 0$, on peut simplifier par $\operatorname{cn}(x)$:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{cn}(x)] = \operatorname{dn}(x)\operatorname{sn}(x).$$

La dernière expression se détermine de manière similaire.

□

Comme pour les fonctions trigonométriques on peut déterminer des formules addition à partir de ces formules de dérivation.

Théorème 3.7 Pour $(x, y) \in [0; K]^2$ tel que $x+y \in [-K; K]$, en posant $\beta_{xy} = 1 - k^2\operatorname{sn}^2(x)\operatorname{sn}^2(y)$, on a

$$\begin{aligned} \beta_{xy}\operatorname{sn}(x+y) &= \operatorname{sn}(x)\operatorname{cn}(y)\operatorname{dn}(y) + \operatorname{sn}(y)\operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x), \\ \beta_{xy}\operatorname{cn}(x+y) &= \operatorname{cn}(x)\operatorname{cn}(y) - \operatorname{sn}(x)\operatorname{sn}(y)\operatorname{dn}(x)\operatorname{dn}(y), \\ \beta_{xy}\operatorname{dn}(x+y) &= \operatorname{dn}(x)\operatorname{dn}(y) - k^2\operatorname{sn}(x)\operatorname{sn}(y)\operatorname{cn}(x)\operatorname{cn}(y). \end{aligned}$$

Preuve. Nous démontrons uniquement la première formule, les autres s'en déduisent grâce aux différentes identités énoncées plus haut.

La démonstration est très semblable à celle des formules d'additions pour les fonctions trigonométriques ; pour x, y dans $[0; K]$ tels que $x+y$ reste dans $[0; K]$, nous définissons f par (comme $|k|, |\operatorname{sn}| \in [0, 1[$, β_{xy} est bien non nul) :

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sn}(x)\operatorname{cn}(y)\operatorname{dn}(y) + \operatorname{sn}(y)\operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x)}{\beta_{xy}}$$

et montrons que $f(x, y) = \operatorname{sn}(x+y)$.

Pour abrégier les notations posons :

$$\begin{cases} s_x = \operatorname{sn}(x), & s_y = \operatorname{sn}(y), \\ c_x = \operatorname{cn}(x), & c_y = \operatorname{cn}(y), \\ d_x = \operatorname{dn}(x), & d_y = \operatorname{dn}(y), \end{cases}$$

En dérivant partiellement par rapport à x , on obtient

$$\begin{aligned} \beta_{xy}^2 \partial_x f &= \beta_{xy} [c_x d_x c_y d_y + s_y (-s_x d_x d_x + c_x (-k^2 s_x c_x))] - [(s_x c_y d_y + s_y c_x d_x) (-k^2 s_y^2 (2s_x c_x d_x))] \\ &= \beta_{xy} [c_x d_x c_y d_y - s_x s_y (d_x^2 + k^2 c_x^2)] + 2k^2 s_x c_x d_x s_y^2 (s_x c_y d_y + s_y c_x d_x) \\ &= c_x d_x c_y d_y (\beta_{xy} + 2k^2 s_x^2 s_y^2) - s_x s_y [\beta_{xy} (d_x^2 + k^2 c_x^2) - 2k^2 s_y^2 c_x^2 d_x^2] \\ &= c_x d_x c_y d_y (1 + k^2 s_x^2 s_y^2) - s_x s_y (d_x^2 d_y^2 + k^2 c_x^2 c_y^2) . \end{aligned}$$

Cette expression étant symétrique en x et y , tout comme celle de la fonction f , on en conclut que $\partial_x f = \partial_y f$. On a donc $f(x, y) = F(x + y)$ pour une certaine fonction F . Or comme :

$$F(x) = f(x, 0) = \frac{\operatorname{sn}(x) \operatorname{cn}(0) \operatorname{dn}(0) + \operatorname{sn}(0) \operatorname{cn}(x) \operatorname{dn}(x)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(0)} = \operatorname{sn}(x),$$

on a bien $f(x, y) = F(x + y) = \operatorname{sn}(x + y)$.

□

Comme pour les fonctions trigonométriques, on cherche à étendre les domaines de définitions de ces fonctions à \mathbb{R} tout en préservant ces formules d'addition. Pour $x \in [K; 2K]$, cela impose :

$$\operatorname{sn}(x) = \operatorname{sn}((x - K) + K) = \frac{\operatorname{sn}(x - K) \operatorname{cn}(K) \operatorname{dn}(K) + \operatorname{sn}(K) \operatorname{cn}(x - K) \operatorname{dn}(x - K)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(x - K) \operatorname{sn}^2(K)},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{sn}(x) = \frac{\operatorname{cn}(x - K) \operatorname{dn}(x - K)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(x - K)} = \frac{\operatorname{cn}(x - K)}{\operatorname{dn}(x - K)} .$$

De la même manière on a :

$$\begin{cases} \operatorname{cn}(x) = -k' \frac{\operatorname{sn}(x - K)}{\operatorname{dn}(x - K)} , \\ \operatorname{dn}(x) = \frac{k'}{\operatorname{dn}(x - K)} . \end{cases}$$

Remarque 3.8 En prenant $x = K$, on obtient

$$\operatorname{sn}(2K) = 0, \quad \operatorname{cn}(2K) = -1 \quad \text{et} \quad \operatorname{dn}(2K) = 1 .$$

En prenant $y = 2K$ dans les formules du théorème 3.7, on obtient alors pour x dans \mathbb{R}

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(x + 2K) = -\operatorname{sn}(x), \\ \operatorname{cn}(x + 2K) = -\operatorname{cn}(x), \\ \operatorname{dn}(x + 2K) = \operatorname{dn}(x) . \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que sn et cn sont $4K$ -périodiques et que dn est $2K$ -périodique.

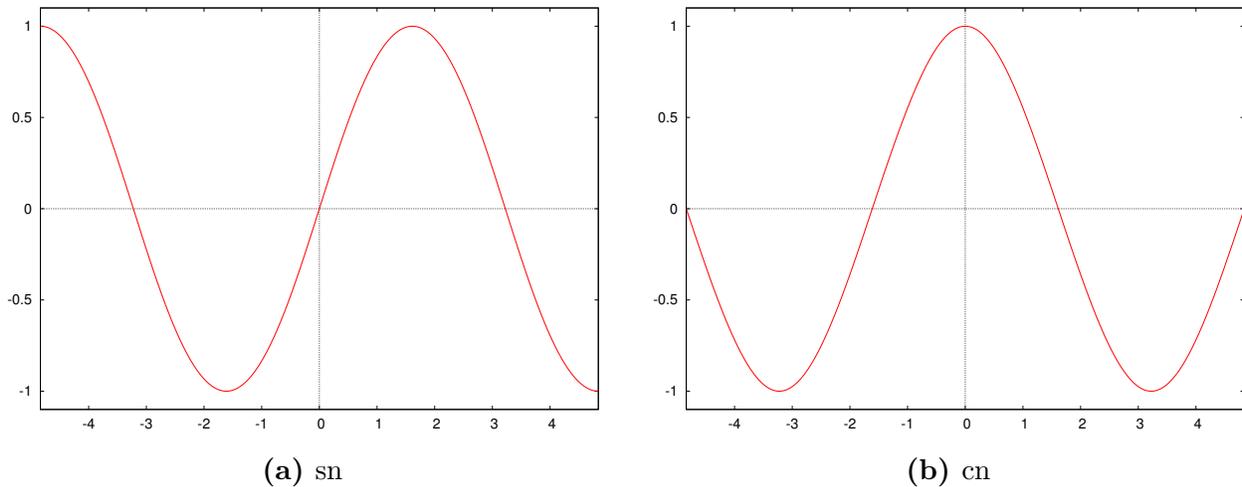


Figure 3.1 – Tracés pour $k = 0, 1$.

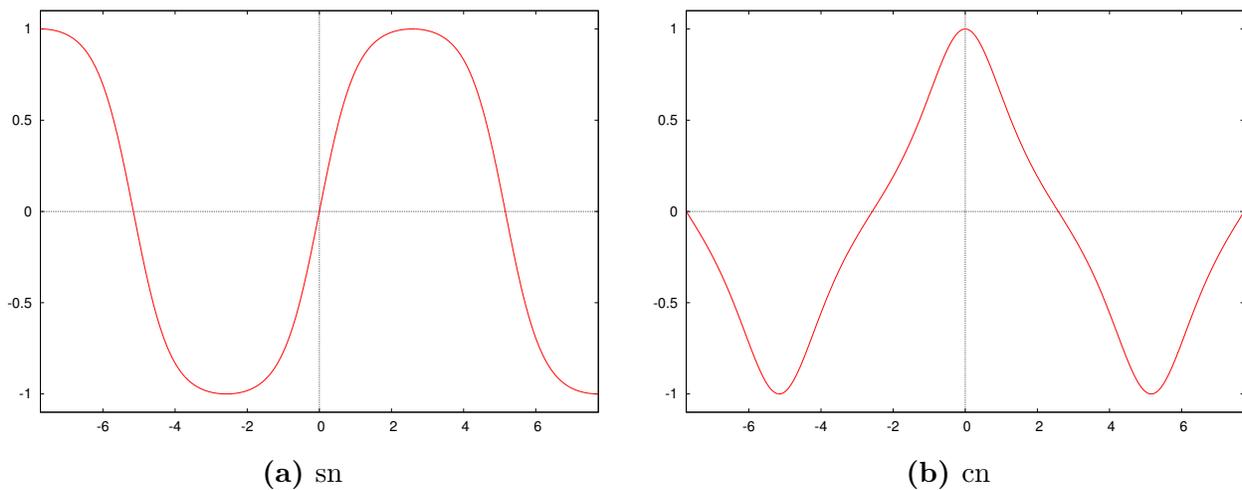


Figure 3.2 – Tracés pour $k = 0, 9$.

3.3 Illustrations graphiques

La visualisation des représentations graphiques des fonctions de Jacobi apporte des informations intéressantes.

Comme le montre la figure 3.1, pour k petit, les fonctions sn et cn sont très proches des fonctions *sinus* et *cosinus*.

Pour k proche de 1, la période augmente, et on observe un aplatissement de la courbe de sn , ainsi qu'un changement de concavité de celle de cn , comme l'illustre la figure 3.2. L'augmentation de la période provient du fait que la fonction

$$k \in [0, 1[\mapsto K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

est croissante de $\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$.

Lorsque k "tend" vers 1, l'allure des courbes est radicalement différente de celles des fonctions trigonométriques. Celle de sn "tend" vers une fonction créneau, les paliers étant de plus en plus espacés ; celle de cn "tend" vers un peigne de Dirac, les pics étant eux aussi de plus en plus espacés (voir la figure 3.3). Le terme "tendre" n'est absolument pas utilisé de façon rigoureuse ici, mais pour donner une idée du comportement de ces courbes ; en effet, il n'y a aucune convergence (pas même ponctuelle) de $\text{sn}(\cdot, k)$ (*resp.* $\text{cn}(\cdot, k)$) vers $\text{sn}(\cdot, 1)$ (*resp.* $\text{cn}(\cdot, 1)$) lorsque $k \rightarrow 1^-$.

Ce comportement se comprend très bien physiquement : en reprenant l'introduction de ce mémoire, on observe que $k \text{sn} = \sin(\theta/2)$ où θ est l'angle entre la verticale et le fil du pendule. Rappelons que l'énergie mécanique est $E = 2k^2$ et que $k = 1$ est la valeur critique pour laquelle le pendule tourne complètement autour de son axe au lieu d'osciller. Ainsi, lorsque k est proche de 1, le pendule va avoir de grandes oscillations et restera "suspendu" quasiment à la verticale un long moment avant de redescendre.

Notons par ailleurs qu'il y a une brusque transition lorsque nous passons de $k = 1 - \epsilon$ à $k = 1$: nous passons d'une fonction bornée périodique à une fonction non périodique non bornée ! Ces constatations nous confortent dans le choix d'avoir exclu 1 pour le domaine de définition de k .

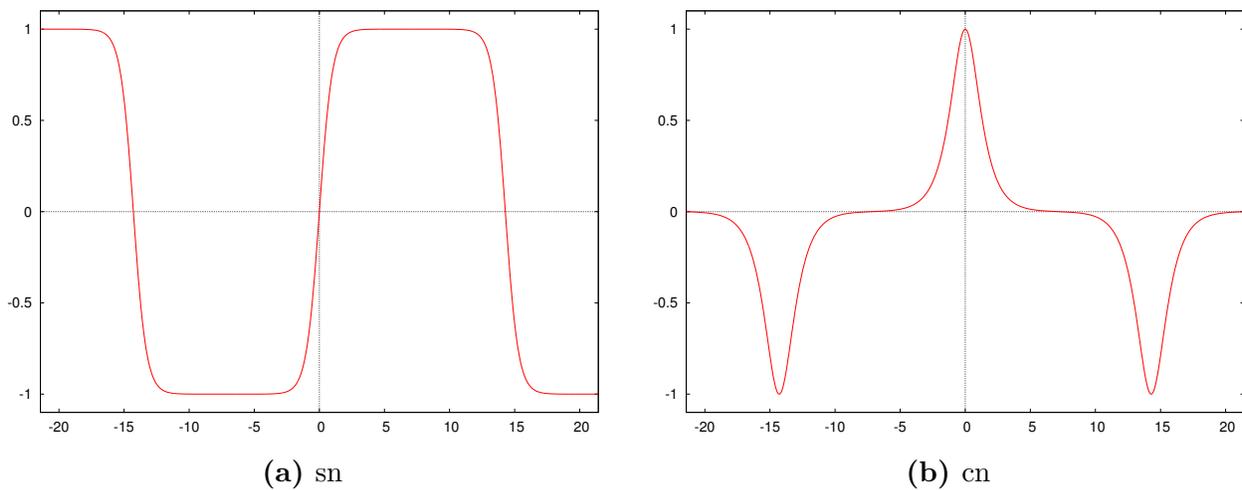
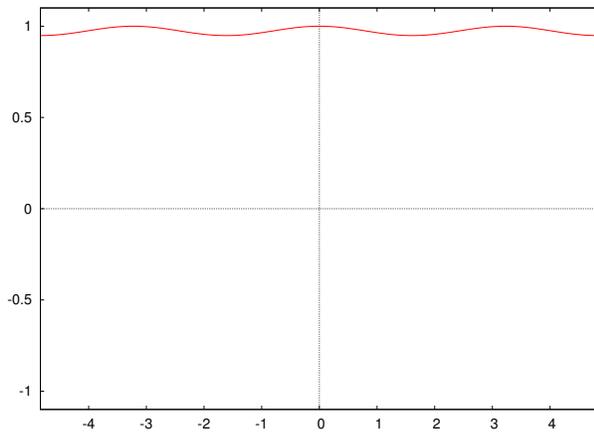


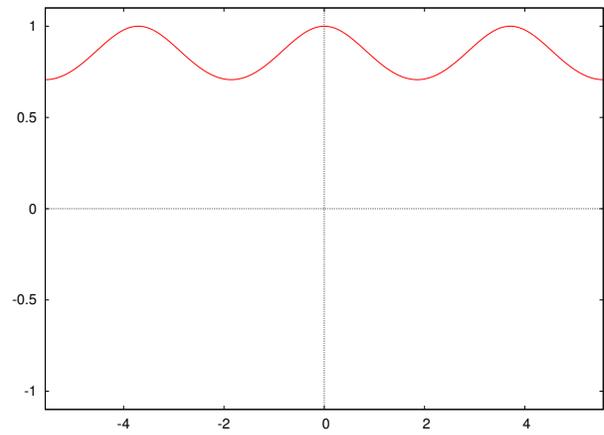
Figure 3.3 – Tracés pour $k = 0,99999$.

La figure 3.4 montre que pour de faibles valeurs de k , dn est quasi-constante. Pour $k = 0,5$, la courbe est très similaire à celle d'un cosinus que l'on aurait compressé puis translaté. Pour des valeurs de k proche de 1, la courbe ressemble à une chaînette. Lorsque k "tend" vers 1, on retrouve le même phénomène de pics qu'avec la fonction cn .

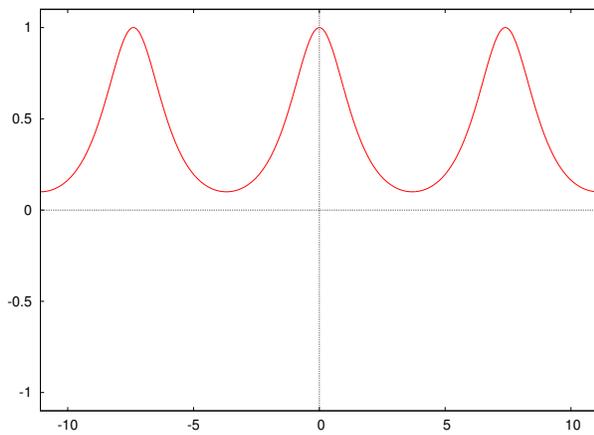
Finalement, la figure 3.5 montre la superposition des courbes des trois fonctions de Jacobi. On peut noter que pour k très proche de 1, les fonctions dn et cn sont quasi-identiques au signe près. Ce comportement s'explique très bien grâce à la formule : $k^2 \text{cn}^2(\cdot, k) + k'^2 = \text{dn}^2(\cdot, k)$ (rappelons que $k^2 + k'^2 = 1$, donc lorsque k est proche de 1, k' est proche de 0).



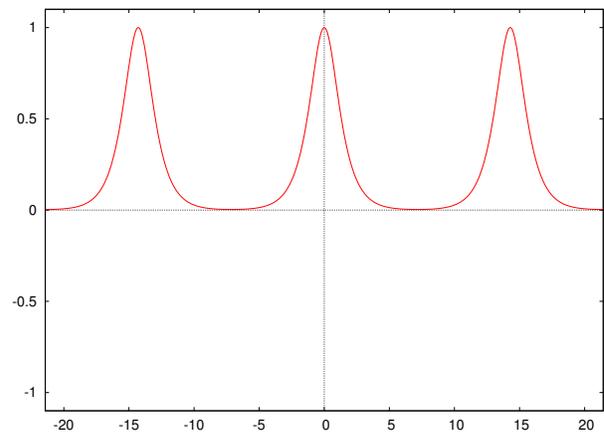
(a) $k = 0,1$



(b) $k = 0,5$

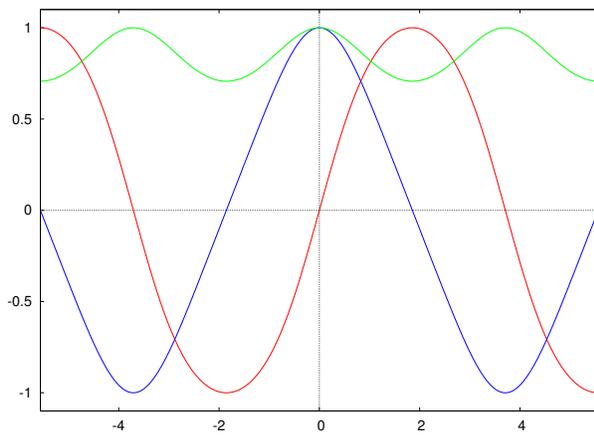


(c) $k = 0,99$

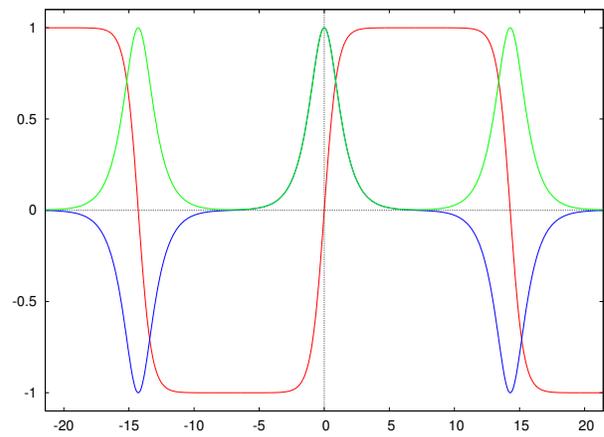


(d) $k = 0,99999$

Figure 3.4 – Tracés de dn pour différentes valeurs de k .



(a) $k = 0,5$



(b) $k = 0,99999$

Figure 3.5 – Tracés des fonctions de Jacobi pour différentes valeurs de k ; sn est en rouge, cn en bleu et dn en vert.

3.4 Extension aux nombres complexes

On cherche maintenant à étendre la définition des fonctions de Jacobi au plan complexe tout entier. Nous commençons tout d'abord à les définir sur l'axe $i\mathbb{R}$.

Pour cela, considérons la fonction suivante :

$$v : \mathbb{R} \rightarrow]-K', K'[\quad \text{où} \quad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k'^2t^2}}$$

$$x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+k^2t^2}}$$

(on rappelle que $k' = \sqrt{1-k^2}$). L'expression de K' est à mettre en regard avec celle de K : la seule différence consiste en la substitution de k en k' . Le changement de variable $u^2 = \frac{t^2}{1+t^2}$ permet (après un calcul laissé au lecteur) de montrer que l'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = K'$. La fonction v est donc une bijection, de même que la fonction suivante :

$$w : i\mathbb{R} \rightarrow i] - K', K'[$$

$$ix \mapsto i v(x)$$

Le changement de variable formel $t = i\tau$ nous donne alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$w(ix) = iv(x) = \int_0^{ix} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-k^2\tau^2}} .$$

Ce jeu d'écriture fait apparaître l'intégrante à l'origine de notre définition première de sn . Nous posons alors la définition suivante.

Définition 3.9 Pour $y \in]-K', K'[$, $\text{sn}(iy) := w^{-1}(iy)$.

La prochaine propriété permettra facilement d'étendre la fonction sn à $i\mathbb{R}$ tout entier.

Propriété 3.10 Pour $y \in]-K', K'[$, $\text{sn}(iy, k) = i \frac{\text{sn}(y, k')}{\text{cn}(y, k')}$.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$. Dans l'intégrale définissant $v(x)$, en effectuant le changement de variable $t = \tan \psi$, et en notant $\phi = \arctan x$ on a :

$$v(x) = \int_0^\phi \frac{d\psi}{\sqrt{\cos^2(\psi)}\sqrt{1+k^2\tan^2(\psi)}} = \int_0^\phi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2(\psi)}} .$$

Comme $\phi \in]-\pi/2; \pi/2[$, le changement de variable $\alpha = \sin(\psi)$ est légal et on a alors :

$$v(x) = \int_0^{\sin(\phi)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-k'^2\alpha^2}} .$$

Par la définition des fonction sn et cn , on a alors :

$$\sin(\phi) = \text{sn}(v(x), k') \quad \text{et} \quad \cos(\phi) = \text{cn}(v(x), k') .$$

$$\text{Or } x = \tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} .$$

Soit maintenant $y \in] - K; K[$, on prend alors $x = v^{-1}(y)$. L'identité ci-dessus se réécrit :

$$v^{-1}(y) = \frac{\text{sn}(y, k')}{\text{cn}(y, k')} .$$

En multipliant par i , on a :

$$w^{-1}(iy) = i \frac{\text{sn}(y, k')}{\text{cn}(y, k')} ,$$

ce qui termine la preuve. □

Pour définir cn et dn sur $i] - K, K[$, on utilise les mêmes formules que dans la définition 3.4. Grâce à la propriété ci-dessus, cela conduit immédiatement pour y dans $] - K, K[$ aux expressions :

$$\begin{cases} \text{sn}(iy, k) = i \frac{\text{sn}(y, k')}{\text{cn}(y, k')} \\ \text{cn}(iy, k) = \frac{1}{\text{cn}(y, k')} \\ \text{dn}(iy, k) = \frac{\text{dn}(y, k')}{\text{cn}(y, k')} \end{cases}$$

Dans la section précédente, nous avons déjà défini les fonctions de Jacobi sur \mathbb{R} . Nous définissons alors ces fonctions sur $i\mathbb{R}$ par les formules ci-dessus pour tout $y \in \mathbb{R}$ où ces expressions ont un sens, c'est à dire pour $y \neq K' \pmod{2K'}$ (sinon $\text{cn}(y) = 0$ et les quotients ne sont pas définis).

Pour définir sn sur \mathbb{C} , on se base de nouveau sur les formules d'additions prouvées au théorème 3.7 en remplaçant y par iy :

$$\begin{aligned} \beta_{x(iy)} \text{sn}(x + iy) &= \text{sn}(x) \text{cn}(iy) \text{dn}(iy) + \text{sn}(iy) \text{cn}(x) \text{dn}(x) \\ &= \text{sn}(x) \frac{1}{\text{cn}(y, k')} \frac{\text{dn}(y, k')}{\text{cn}(y, k')} + i \frac{\text{sn}(y, k')}{\text{cn}(y, k')} \text{cn}(x) \text{dn}(x) \\ \text{sn}(x + iy) &= \frac{\text{sn}(x) \frac{1}{\text{cn}(y, k')} \frac{\text{dn}(y, k')}{\text{cn}(y, k')} + i \frac{\text{sn}(y, k')}{\text{cn}(y, k')} \text{cn}(x) \text{dn}(x)}{1 + k^2 \text{sn}(x)^2 \frac{\text{sn}(y, k')^2}{\text{cn}(y, k')^2}} . \end{aligned}$$

Une fois sn définie, on va voir qu'elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann. On démontre d'abord un lemme de dérivation de sn sur les imaginaires.

Lemme 3.11 *Pour tout y dans \mathbb{R} , $\partial_y sn(iy) = i sn'(iy)$.*

Preuve.

$$\begin{aligned}\partial_y sn(iy) &= i \partial_y \frac{sn(y, k')}{cn(y, k')} \\ \partial_y sn(iy) &= i \frac{cn(y, k') dn(y, k') cn(y, k') + sn(y, k') sn(y, k') dn(y, k')}{cn(y, k')^2} \\ \partial_y sn(iy) &= i \frac{dn(y, k')}{cn(y, k')^2} \\ \partial_y sn(iy) &= idn(iy)cn(iy) \\ \partial_y sn(iy) &= isn'(iy) .\end{aligned}$$

□

Remarque 3.12 *C'est une propriété qui est nécessaire pour que sn soit holomorphe. Pourtant, étant donné la construction de sn, ce résultat ne semble pas trivial. Ce résultat reste vrai pour cn et dn.*

Dérivons à présent sn par rapport à x puis à y :

$$\begin{aligned}\beta_{x(iy)}^2 \partial_x sn(x + iy) &= \beta_{x(iy)} [c_x d_x c_{iy} d_{iy} + s_{iy} (-s_x d_x d_x + c_x (-k^2 s_x c_x))] \\ &\quad - [(s_x c_{iy} d_{iy} + s_{iy} c_x d_x) (-2k^2 s_{iy}^2 (s_x c_x d_x))] \\ \beta_{x(iy)}^2 \partial_x sn(x + iy) &= \beta_{x(iy)} [c_x d_x c_{iy} d_{iy} - s_x s_{iy} (d_x^2 + k^2 c_x^2)] \\ &\quad + 2k^2 s_{iy}^2 (s_x c_x d_x) (s_x c_{iy} d_{iy} + s_{iy} c_x d_x) \\ \beta_{x(iy)}^2 \partial_x sn(x + iy) &= (c_x d_x c_{iy} d_{iy}) (1 + k^2 s_x^2 s_{iy}^2) \\ &\quad - s_x s_{iy} (\beta_{x(iy)} (d_x^2 + k^2 c_x^2) - 2k^2 s_{iy}^2 c_x^2 d_x^2) ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{x(iy)}^2 \partial_y sn(x + iy) &= \beta_{x(iy)} [s_x (-i s_{iy} d_{iy} d_{iy} - i k^2 s_{iy} c_{iy} c_{iy}) + i c_{iy} d_{iy} c_x d_x] \\ &\quad - [(s_x c_{iy} d_{iy} + s_{iy} c_x d_x) (-2k^2 s_x^2 i s_{iy} c_{iy} d_{iy})] \\ \beta_{x(iy)}^2 \partial_y sn(x + iy) &= i \beta_{x(iy)} [c_{iy} d_{iy} c_x d_x - s_x s_{iy} (d_{iy}^2 + k^2 c_{iy}^2)] \\ &\quad + 2i k^2 s_x^2 (s_{iy} c_{iy} d_{iy}) (s_x c_{iy} d_{iy} + s_{iy} c_x d_x) \\ \beta_{x(iy)}^2 \partial_y sn(x + iy) &= i (c_x d_x c_{iy} d_{iy}) (1 + k^2 s_x^2 s_{iy}^2) \\ &\quad + i (s_x s_{iy}) (\beta_{x(iy)} (- (d_{iy}^2 + k^2 c_{iy}^2)) + 2k^2 s_x^2 c_{iy}^2 d_{iy}^2) .\end{aligned}$$

On a donc :

$$\partial_{\bar{z}} sn(z) = \frac{1}{2} (\partial_x + i \partial_y) (sn(x + iy)) = 0$$

sn est \mathbb{R} -dérivable et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann donc elle est holomorphe.

Remarque 3.13 *En prenant $y = K'$, dans les définitions de sn, cn et dn, on obtient*

$$sn(x + iK') = \frac{1}{ksn(x)}, \quad cn(x + iK') = \frac{-idn(x)}{ksn(x)} \quad \text{et} \quad dn(x + iK') = \frac{-icn(x)}{ksn(x)} .$$

En prenant $y = 2K'$, on obtient alors pour x dans \mathbb{R}

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(x + 2iK') = \operatorname{sn}(x), \\ \operatorname{cn}(x + 2K) = -\operatorname{cn}(x), \\ \operatorname{dn}(x + 2K) = \operatorname{dn}(x) . \end{cases}$$

On en déduit aisément que sn est $2iK'$ -périodique et que dn est $4iK'$ -périodique. Enfin, on peut montrer aussi que cn est $2K + 2iK'$ -périodique ([1] p.38).

Chapitre 4

Liens entre \wp et sn

4.1 Un lien entre \wp et sn

On a vu deux manières bien différentes de construire des fonctions elliptiques. Le théorème de structure 2.6 nous donne à penser que les fonctions de Weierstraß sont prépondérantes. sn étant elliptique, elle est une fraction rationnelles en \wp et \wp' . On va voir qu'en fait ces deux notions sont équivalentes.

Soient e_1, e_2 et e_3 dans \mathbb{C} telles que $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Considérons¹ $\phi(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{sn(\lambda z, k)^2}$ où $\lambda, k \in \mathbb{C}$.

Alors, on a successivement :

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= -2(e_1 - e_3) \frac{\lambda cn(\lambda z) dn(\lambda z)}{sn(\lambda z)^3} \\ \phi'(z)^2 &= 4\lambda^2 (e_1 - e_3)^2 \frac{(1 - sn(\lambda z)^2)(1 - k^2 sn(\lambda z)^2)}{sn(\lambda z)^6} \\ \phi'(z)^2 &= 4\lambda^2 \frac{(e_1 - e_3)^2 (1 - sn(\lambda z)^2)(1 - k^2 sn(\lambda z)^2)}{sn(\lambda z)^2 sn(\lambda z)^4} \\ \phi'(z)^2 &= 4\lambda^2 (e_1 - e_3)(\phi(z) - e_3) \left(\frac{1}{sn(\lambda z)^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{sn(\lambda z)^2} - k^2 \right) \\ \phi'(z)^2 &= 4\lambda^2 (e_1 - e_3)(\phi(z) - e_3) \left(\frac{\phi(z) - e_3}{e_1 - e_3} - 1 \right) \left(\frac{\phi(z) - e_3}{e_1 - e_3} - k^2 \right) \\ \phi'(z)^2 &= 4 \frac{\lambda^2}{e_1 - e_3} (\phi(z) - e_3)(\phi(z) - e_1) (\phi(z) - e_3 - k^2(e_1 - e_3)) .\end{aligned}$$

On pose $\lambda^2 = e_1 - e_3$ et $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$.

1. On a défini sn pour $k \in [0, 1[$, néanmoins un théorème de Hille ([2] p.144) permet d'étendre cette définition à $k \in \mathbb{C}$.

Ainsi : $\phi'(z)^2 = 4 \frac{\lambda^2}{e_1 - e_3} (\phi(z) - e_3) (\phi(z) - e_1) (\phi(z) - e_2)$.
 ϕ vérifie l'équation $f'(z)^2 = 4f(z)^3 + g_2f(z) + g_3$ avec :

$$\begin{cases} g_2 &= -4(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3), \\ g_3 &= 4e_1e_2e_3 . \end{cases}$$

Donc : $\exists a \in \mathbb{C}, \phi(z) = \wp(z + a)$, où \wp est la fonction de Weierstraß d'invariants g_2 et g_3 .
 0 étant un pôle de ϕ , a est un pôle de \wp donc une période de \wp .
On en conclut que $\phi(z) = \wp(z)$.

4.2 Expression de \wp en fonction de sn^2

Soit Λ un réseau. On peut construire \wp pour ce réseau et on obtient les trois constantes e_1 , e_2 et e_3 telles que $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Le résultat précédent s'applique :

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{sn\left(z\sqrt{e_1 - e_3}, \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}\right)^2} .$$

Il n'y a pas prépondérance des fonctions \wp sur les fonctions sn .

4.3 Expression de sn^2 en fonction de \wp

On fixe $k \in [0, 1[$, on souhaite connaître une expression simple² de $sn(\cdot, k)^2$ en fonction de \wp .

Soient par exemple :

$$\begin{cases} e_1 &= 2 - k^2 \\ e_2 &= 2k^2 - 1 \\ e_3 &= 1 - k^2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g_2 &= -4(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3) &= 12(k^4 - k^2 + 1) \\ g_3 &= 4e_1e_2e_3 &= 4(2k^6 - 3k^4 - 3k^2 + 2) \end{cases}$$

On peut construire \wp ayant pour invariants g_2 et g_3 , d'où :

$$sn(z, k)^2 = \frac{3}{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right) + 1 + k^2} .$$

2. sn^2 étant elliptique et paire on peut trouver une expression de ce type en utilisant la méthode du théorème de structure 2.6 mais elle ne sera pas simple du tout !

Chapitre 5

Conclusion

Après cette promenade dans le monde des fonctions elliptiques, nous trouvons intéressant de donner une liste non exhaustive de résultats qui auraient pu être développés dans ce mémoire. Plusieurs objets mathématiques portent le nom d'elliptique, les intégrales elliptiques, mentionnées en introduction, se rapprochent des fonctions de Jacobi et les courbes elliptiques peuvent être décrites grâce aux fonctions \wp de Weierstraß . On va décrire sommairement ces liens dans les paragraphes suivants et on mentionnera aussi un résultat fort sur les fonctions qui ont un théorème d'addition.

5.1 Lien entre fonctions et intégrales elliptiques

On appelle intégrale elliptique une intégrale de la forme :

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$$

où R une fraction rationnelle et P un polynôme de degré 3 ou 4 à racines simples. Legendre a montré qu'on pouvait distinguer trois espèces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-x^2}}, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+nx^2}\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-x^2}}. \end{array} \right.$$

Toute intégrale elliptique est combinaison linéaire d'intégrales de ces trois types (avec $k \in [0, 1[$) et d'intégrales élémentaires. En effectuant le changement de variable $x = \sin(\phi)$ on obtient trois fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(k, \psi) = \int_0^\psi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin(\phi)^2}}, \\ E(k, \psi) = \int_0^\psi \sqrt{1-k^2\sin(\phi)^2} d\phi, \\ \Pi(k, n, \psi) = \int_0^\psi \frac{d\phi}{\sqrt{1+n\sin(\phi)^2}\sqrt{1-k^2\sin(\phi)^2}\sqrt{1-\sin(\phi)^2}}. \end{array} \right.$$

Si de plus, on pose $\operatorname{sn}(u, k) = x = k \sin(\phi)$ on trouve les relations suivantes entre ces intégrales et les fonctions de Jacobi :

$$\begin{cases} F(k, \psi) & = u, \\ E(k, \psi) & = \int_0^u \operatorname{dn}(v)^2 dv, \\ \Pi(k, n, \psi) & = \int_0^u \frac{dv}{1 + n^2 \operatorname{sn}(v)^2}. \end{cases}$$

On pourra trouver dans ([1] p.16) de nombreux résultats sur ce thème.

5.2 Courbes elliptiques

Les courbes elliptiques sur \mathbb{C} sont des courbes algébriques qui ont une certaine forme. Elles vérifient les équations du type $y^2 = 4x^3 + g_2x + g_3$, avec $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$. On reconnaît là une équation familière. Les courbes elliptiques interviennent dans le calcul de périmètres d'ellipses (on retrouve nos petits) et ont la propriété suivante : pour chaque courbe elliptique Γ on peut trouver un réseau Λ tel que

$$\begin{cases} x & = \wp(z) \\ y & = \wp'(z) \end{cases}$$

soit un paramétrage de Γ où \wp est la fonction de Weierstraß de réseau Λ .

5.3 Fonctions admettant un théorème d'addition algébrique

Définition 5.1 *On dit qu'une fonction f admet un théorème d'addition algébrique si, dès que x, y et $x + y$ appartiennent au domaine de définition de f , $f(x), f(y), f(x + y)$ sont liés par la relation $P(f(x), f(y), f(x + y)) = 0$ où P est un polynôme de trois variables.*

Théorème 5.2 *Une fonction holomorphe admettant un théorème d'addition algébrique est soit :*

- une fonction algébrique en la variable z ;
- une fonction algébrique en e^{mz} où m est une constante ;
- une fonction algébrique de la fonction \wp de Weierstraß.

On peut trouver une preuve de Montel [3] d'un théorème plus général sur les fonctions analytiques sur un intervalle de \mathbb{R} .

Bibliographie

- [1] Bowman Frank, *Introduction to Elliptic Functions with applications*, (Dover Publications, 1961.)
- [2] Hille Einar, *Analytic Function Theory, Vol. II*, (Ginn & Co., 1962.)
- [3] Montel Paul, *Sur les fonctions d'une variable réelle qui admettent un théorème d'addition algébrique*, (Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 48 (1931), p. 65-94.)
- [4] Lang Serge, *Elliptic Functions*, (Springer-Verlag, 2e éd., 1987)
- [5] Hellegouarch Yves, *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles* (Dunod, 2e éd., 2001)