Séries formelles et applications

Sylvie RAUCH

30 mai 2012

TER de M1 encadré par Olivier BOUILLOT

Table des matières

Introduction :

De nombreux problèmes de dénombrement (dont ceux liés aux nombres de Catalan) peuvent se résoudre à l'aide de séries entières. Ils nécessitent donc de se poser la question de la convergence de telles séries. Il est toutefois possible d'envisager ces mêmes problèmes d'un point de vue plus algébrique et d'échapper ainsi aux problèmes de convergence souvent délicats. Ce ne sont alors plus les séries entières qui sont utilisées mais des séries formelles. Ce sont ces dernières qui font l'objet de notre étude.

Nous commencerons par nous familiariser avec cette nouvelle théorie en donnant dans une première partie quelques définitions et résultats simples avant d'introduire la notation usuelle des séries formelles. Nous verrons ensuite les premières propriétés de l'anneau des séries formelles ainsi que la notion de sommabilité formelle. Cette dernière notion nous permettra, une fois la dérivée formelle introduite, de nous intéresser à l'exponentielle et au logarithme formels. Nous continuerons notre étude par la résolution d'équations et d'équations différentielles. Enfin, nous étudierons deux grandes applications des séries formelles qui sont : la récurrence linéaire et les problèmes de dénombrement faisant intervenir les fameux nombres de Catalan.

1. Premières définitions, notations et premiers résultats sur les séries formelles

Nous nous demanderons dans un premier temps, ce que sont les séries formelles et quelle structure peut avoir l'ensemble des séries formelles.

Définition 1.1.(1ère version)
On appelle série formelle toute suite α de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 1.2.
Les éléments α de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ auraient pu être définis comme des suites à coefficients dans un anneau intègre quelconque, mais pour simplifier l'exposé, nous optons pour présenter les séries formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Propriété 1.3.
On peut définir une addition et une multiplication sur les éléments de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, de sorte que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ soit un anneau intègre.
Pour tous $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\beta = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on pose :

$$\alpha + \beta = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ et } \alpha\beta = (\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Nous définissons encore la multiplication par un scalaire, de sorte que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ soit un espace vectoriel.
Pour tout $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et tout $k \in \mathbb{C}$, on pose $k\alpha = (ka_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous démontrerons la structure d'anneau intègre et d'espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dans la proposition 3.2, juste après avoir introduit la notation usuelle des séries formelles.
De plus nous introduirons au paragraphe 3 partie b une autre opération, la composition.

2. <u>Notations pour les séries formelles</u>

Nous allons à présent définir une nouvelle notation, plus pratique pour les séries formelles, qui généralisera la notation usuelle de polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Ayant l'habitude de travailler avec les polynômes, celle-ci nous permettra de travailler sans réelle distinction entre polynômes et séries formelles : elle sera donc très précieuse et commode.

Notons X la suite $(0,1,0,0,...)$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On a alors $X^2 = (0,0,1,0,...)$, $X^3 = (0,0,0,1,0,...)$ et, de façon générale, pour tout entier $n \geq 1$, X^n est la suite d'éléments tous nuls sauf le (n+1)$^{\text{ème}}$ qui vaut 1.
En effet, on justifie ceci par récurrence.
Ceci est vrai au rang 1 . En notant $\left(X^n\right)_{p-1}$ le p-ième terme de la suite X^n et en supposant la propriété vraie au rang $n \geq 1$, on a alors :
$\left(X^{n+1}\right)_0 = \left(X^n\right)_0 X_0 = 0$ et pour $k \geq 1$, $\left(X^{n+1}\right)_k = \sum_{j=0}^{k} \left(X^n\right)_j X_{k-j} = \left(X^n\right)_{k-1}$
car $X_1 = 1$ et $X_p = 0$ pour $p \neq 1$.
Or, par la propriété de récurrence $\left(X^n\right)_{k-1} = 1$ si $k - 1 = n$ (c'est à dire si $k = n+1$) ou 0 sinon **.**
On a alors démontré que X^{n+1} est la suite d'éléments tous nuls sauf le (n+2)$^{\text{ème}}$ terme qui vaut 1.

On va donc utiliser les notations suivantes : si α est la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on écrira $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X^j$ ou encore $\alpha = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j X^j$ où $X^0 = (1,0,0,...)$. Il s'agit d'une notation pratique pour représenter les éléments de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

<u>*Définition 1.1.(2$^{\text{ème}}$ version)*</u>

Une série formelle est une suite $\alpha=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *de coefficients, représentée sous la forme d'une somme* $\alpha=\sum_{j=0}^{\infty}a_jX^j$.

Par analogie avec les polynômes on introduit la notation suivante :

<u>Notation :</u>
Notons $\mathbb{C}[\![X]\!]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Le signe $\sum$ ne désigne pas une somme mais la notation est pratique car les séries formelles suivent les mêmes propriétés que les séries entières sans qu'on ait à se soucier de problème de convergence. Elle est aussi la validée par les deux justifications suivantes :

<u>Justification 1 de la notation</u> : La suite $\left(a_jX^j\right)_{j\geq 0}$ est sommable.
Cette nouvelle notation a bien un sens. En effet, nous verrons dans la définition 4.1. la notion de famille sommable de séries formelles. Dans ce cas particulier, considérons $\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}a_kX^k$.
Chaque terme a_kX^k peut être vu comme une série formelle de coefficients $a_{j,k}$ tels que $a_{j,k}=0$ pour tout $j\neq k$ et $a_{k,k}=a_k$. Ainsi, si l'on se donne un entier r**,** il existe un entier N **(**que l'on peut prendre par exemple égal à $r+1$**)** tel que pour tout $n\geq N$,
$a_{0,n}=a_{1,n}=\dots=a_{r,n}=0$**.** Ainsi la suite des séries formelles a_kX^k est bien sommable au sens de la définition 4.1. ce qui donne un sens à notre notation.

<u>Justification 2 de la notation</u> : Nous verrons par la suite que l'ensemble des polynômes est dense dans l'espace des séries formelles : $P_N=\sum_{j=0}^{N}a_jX^j\xrightarrow[N\to+\infty]{}\sum_{j=0}^{\infty}a_jX^j$ **.**

A présent nous noterons plus simplement 0 pour l'élément $(0,0,0,\dots)$ de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ et **1** pour l'élément $(1,0,0,\dots)$. On peut alors réécrire les opérations sur $\mathbb{C}[\![X]\!]$ comme ceci :
si $\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n$ et $\beta=\sum_{n=0}^{\infty}b_nX^n$ et $t\in\mathbb{C}$, on a :

$$\alpha+\beta=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)X^n\ ,\ \alpha\beta=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)X^n \text{ et } t\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}ta_nX^n\ .$$

Trois catégories de séries formelles jouent un rôle particulier dans la suite.

Notons $\mathbb{R}[\![X]\!]$ l'ensemble de séries formelles à coefficients réels, $1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$ l'ensemble des séries formelles de terme constant égal à 1 et $X\mathbb{C}[\![X]\!]$ l'ensemble des séries formelles de terme constant nul.

3. Premières propriétés de l'anneau des séries formelles

Le théorème suivant est évident mais se révèlera très utile dans la suite.

Théorème 3.1.

Deux séries formelles $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X^j$ et $\beta = \sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j$ sont égales si et seulement si pour tout $j \geq 0$, $a_j = b_j$.

L'égalité de deux séries formelles nous permet donc d'identifier leurs coefficients deux à deux. Ce théorème est extrêmement important et est la base de toute la théorie. Néanmoins nous ne nous y référerons pas dans la suite du texte en vue d'alléger sa lecture.

a) Structure d'anneau

Proposition 3.2.

Muni de l'addition et de la multiplication définies précédemment, $\mathbb{C}[\![X]\!]$ est un anneau intègre commutatif et unitaire. Muni de l'addition et la multiplication par un scalaire, $\mathbb{C}[\![X]\!]$ est un espace vectoriel.

Démonstration :

Cette démonstration est classique et identique à celle faite pour des polynômes. Cependant nous la donnons en détail, dans un but pédagogique, pour s'habituer à manipuler les sommes.

- L'addition de deux complexes étant associative et commutative, l'addition sur $\mathbb{C}[\![X]\!]$ l'est également.

$\mathbb{C}[\![X]\!]$ a un élément neutre pour l'addition noté 0 qui est la suite nulle.

Pour tout $\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$, $-\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} -a_n X^n$ est son inverse pour l'addition.

Ainsi $(\mathbb{C}[\![X]\!],+)$ est un groupe commutatif.

- La multiplication dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ est associative. En effet :

$$\alpha(\beta\gamma)=\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nX^n\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j=0}^{k}b_jc_{k-j}X^k\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{j=0}^{n-i}b_jc_{n-i-j}\right)X^n$$
$$=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_ib_{j-i}c_{n-j}\right)X^n=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}a_ib_{j-i}\right)c_{n-j}\right)X^n=(\alpha\beta)\gamma.$$

- De plus pour tous $\alpha=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n X^n$ et $\beta=\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n X^n$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$,

$$\alpha\beta=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}X^n=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_kX^n=\beta\alpha$$

en faisant le changement de variable $k=n-j$.
Remarquons que cela résulte de la commutativité de l'anneau de base, ici $\mathbb{C}$.

- Soit **1** la suite $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_nX^n$ de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ telle que $u_0=1$ et pour tout entier $n\geq 1, u_n=0$.

Alors **1** est l'élément neutre de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ pour la multiplication.

En effet : $\alpha 1=\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nX^n\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}u_jX^j\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j=0}^{n}a_ju_{n-j}X^n=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nX^n$ car $u_{n-j}=0$ si $j\neq n$ et $u_{n-j}=1$ si $j=n$. La commutativité, qui vient d'être montrée, finit de prouver que **1** est l'élément neutre de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ pour la multiplication.

- Par ailleurs, pour tous $\alpha=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n X^n$ et $\beta=\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n X^n$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$,

$$\alpha(\beta+\gamma)=\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n X^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n+c_n) X^n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=0}^{n}a_j(b_{n-j}+c_{n-j})\right)X^n$$
$$=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}+\sum_{j=0}^{n}a_jc_{n-j}\right)X^n=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}\right)X^n+\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=0}^{n}a_jc_{n-j}\right)X^n.$$

On a donc $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$. Par commutativité de l'anneau on a aussi : $(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$.
Ainsi la multiplication est bien distributive par rapport à l'addition.

- Montrons maintenant que $\mathbb{C}[\![X]\!]$ est intègre. On raisonnera par contraposée.

Soient $\alpha=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n X^n$ et $\beta=\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n X^n$ tels que $\alpha\beta=0$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}=0$.
Supposons que α et β soient différents de 0. Considérons j le plus petit entier naturel tel que $a_j\neq 0$ et k le plus petit entier naturel tel que $b_k\neq 0$.
On a alors $(\alpha\beta)_{j+k}=\sum_{r=0}^{j+k}a_rb_{j+k-r}=\sum_{r=0}^{j-1}a_rb_{j+k-r}+a_jb_k+\sum_{r=j+1}^{j+k}a_rb_{j+k-r}=a_jb_k$. En effet, pour $0\leq r\leq j-1$, b_{j+k-r} est nul et pour $j+1\leq r\leq j+k$, a_r est nul. Or, a_jb_k est non nul puisque a_j et b_k sont tous les deux non nuls par définition des entiers j et k, ce qui est en contradiction avec $\alpha\beta=0$.

- $(\mathbb{C}[\![X]\!],+,.)$ est l'espace vectoriel bien connu des suites complexes muni des ses deux lois usuelles. □

Nous cherchons maintenant à connaître les inversibles (pour la multiplication) de $\mathbb{C}[\![X]\!]$.

Théorème 3.3.

$\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ ***est inversible pour la multiplication si et seulement si*** $a_0 \neq 0$**.**

Démonstration :

$\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ est inversible dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ si et seulement s'il existe $\alpha^{-1} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ tel que $\alpha\alpha^{-1} = 1$,

c'est-à-dire si et seulement si $a_0 c_0 = 1$ et: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{n} a_j c_{n-j} = 0$.

- Si α est inversible, comme $a_0 c_0 = 1$, a_0 est non nul.
- Réciproquement, si a_0 est non nul, le système triangulaire d'équations $\begin{cases} a_0 c_0 = 1 \\ a_1 c_0 + a_0 c_1 = 0 \\ a_2 c_0 + a_1 c_1 + a_0 c_2 = 0 \\ \ldots \\ a_n c_0 + a_{n-1} c_1 + \ldots + a_0 c_n = 0 \\ \ldots \end{cases}$

a une unique solution. □

Exemple fondamental :

L'inverse de 1-X est $(1-X)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} X^n$.

Démonstration :

Avec les mêmes notations que dans la démonstration précédente, on a : $a_0 = 1, a_1 = -1$ et : $\forall n > 1, a_n = 0$.

Si $(1-X)^{-1} = \sum_{j\geq 0} c_j X^j$, on obtient le système $\begin{cases} c_0 = 1 \\ -c_0 + c_1 = 0 \\ \quad -c_1 + c_2 = 0 \\ \ldots \\ \qquad -c_{n-1} + c_n = 0 \\ \ldots \end{cases}$, qui a pour solution (1, 1, 1, …).

On a donc : $(1-X)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} X^n$. □

Théorème 3.4.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ ***et*** $\alpha \in 1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$**. *Alors*** $\left(\alpha^{-1}\right)^n = \left(\alpha^n\right)^{-1}$ **.**

Démonstration :

Soit $\alpha \in 1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$ et α^{-1} son inverse. On a $\alpha^n \left(\alpha^{-1}\right)^n = \alpha\alpha \ldots \alpha\alpha^{-1} \ldots \alpha^{-1} = 1$. □

b) Composition des séries formelles

Les résultats suivants seront repris en partie 4 et seront prouvés à cette occasion.
Leur démonstration nécessite en effet la notion de familles formellement sommables que nous introduirons au paragraphe 4.

Théorème et définition 3.5

Lorsque β est sans terme constant, la famille $\left(a_n\beta^n\right)_{n\geq 0}$ est sommable pour toute suite $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ de complexes.

La série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n\beta^n$, qui est la somme de la famille $\left(a_n\beta^n\right)_{n\geq 0}$, est dite obtenue par substitution de β dans la série $\alpha = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$. On pose alors $\alpha \circ \beta = \sum_{n\geq 0} a_n\beta^n$.

Proposition 3.6

Soit $\beta \in X\mathbb{C}[\![X]\!]$, c'est-à-dire que β est sans terme constant. Le morphisme $f_\beta : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[\![X]\!]$ défini par : $f_\beta(P) = P(\beta)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, s' étend de façon unique en un morphisme $\varphi : \mathbb{C}[\![X]\!] \to \mathbb{C}[\![X]\!]$ défini par $\varphi(\alpha) = \alpha \circ \beta$.

Corollaire 3.7

L'application $\alpha \mapsto \alpha \circ \beta$ est l'unique endomorphisme de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ tel que X ait pour image β.

Proposition 3.8

Si β et γ sont deux séries formelles sans terme constant, on a $\left(\alpha \circ \beta\right) \circ \gamma = \alpha \circ \left(\beta \circ \gamma\right)$.
Autrement dit, la composition des séries formelles est associative.

c) Densité des polynômes

Nous allons à présent introduire une notation, très utile dans la suite, désignant l'indice du premier terme non nul d'une série formelle.

Définition 3.9.

Soit $S \in \mathbb{C}[\![X]\!]$.
On appelle valuation de S et on note val(S) la borne inférieure de l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N},\ S_n \neq 0\right\}$ lorsqu'elle existe.
Dans le cas contraire, on pose : $val(0) = +\infty$.

Propriété 3.10.

Pour tout $(\alpha;\beta)\in(\mathbb{C}[\![X]\!])^2$

1) $val(\alpha+\beta)\geq\min(val(\alpha),val(\beta))$
2) $val(\alpha\beta)=val(\alpha)+val(\beta)$

<u>Démonstration :</u>

Soit $(\alpha;\beta)\in\left(\mathbb{C}[\![X]\!]\right)^2$.

1) $\alpha+\beta=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)X^n$. Si n< min($val(\alpha), val(\beta)$) alors $a_n=b_n=0$, donc $a_n+b_n=0$.

   Ainsi, $\inf\left(\{n\in\mathbb{N};\ a_n+b_n\neq 0\}\right)\geq\min\left(val(\alpha),val(\beta)\right)$. D'où $val(\alpha+\beta)\geq\min\left(val(\alpha),val(\beta)\right)$.

2) $\alpha\beta=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)X^n=a_0b_0X^0+\left(a_0b_1+a_1b_0\right)X^1+...+\left(a_0b_n+a_1b_{n-1}+...+a_nb_0\right)X^n+...$

En utilisant la définition de la valuation, ceci revient à démontrer :

$\inf\left(\{n\in\mathbb{N};\ a_0b_n+a_1b_{n-1}+...+a_nb_0\neq 0\}\right)=\inf\ \left(\{k\in\mathbb{N};\ a_k\neq 0\}\right)+\inf\ \left(\{k\in\mathbb{N};\ b_k\neq 0\}\right)$.

- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $a_0b_n+a_1b_{n-1}+...+a_nb_0\neq 0$.
  Alors il existe $(i\,;j)\in\mathbb{N}^2$ tels que i+j=n et $a_ib_j\neq 0$
  D'où $a_i\neq 0$ et $b_j\neq 0$. Ainsi $i\geq\inf\left(\{k\in\mathbb{N};\ a_k\neq 0\}\right)$ et $j\geq\inf\left(\{k\in\mathbb{N};\ b_k\neq 0\}\right)$. D'où
  $n=i+j\geq\inf\left(\{k\in\mathbb{N};a_k\neq 0\}\right)+\inf\left(\{k\in\mathbb{N};b_k\neq 0\}\right)$.
  Ainsi $val(\alpha\beta)\geq val(\alpha)+val(\beta)$.

- Démontrons à présent l'autre inégalité.
  Soit $n=n_1+n_2$ où $n_1=\inf\left(\{k\in\mathbb{N};\ a_k\neq 0\}\right)$ et $n_2=\inf\left(\{k\in\mathbb{N};b_k\neq 0\}\right)$.
  Regardons le n-ième terme de la série formelle $\alpha\beta$:
  $(\alpha\beta)_n=a_0b_{n_1+n_2}+a_1b_{n_1+n_2-1}+...+a_{n_1-1}b_{n_2+1}+a_{n_1}b_{n_2}+a_{n_1+1}b_{n_2-1}+...+a_{n_1+n_2}b_0$.
  Pour tout $j<n_1, on\,a: a_j=0$ donc $a_jb_{n-j}=0$.
  Pour tout $k<n_2\,, on\,a: b_k=0$ donc $a_{n-k}b_k=0$.
  Ainsi, dans $(\alpha\beta)_n$ le seul terme non nul est $a_{n_1}b_{n_2}=0$.
  Ainsi, $(\alpha\beta)_n=a_{n_1}b_{n_2}\neq 0$ d'où $n_1+n_2\in\{n\in\mathbb{N};a_0b_n+a_1b_{n-1}+...+a_nb_0\neq 0\}$.
  Ainsi : $\inf\left(\{n\in\mathbb{N};a_0b_n+a_1b_{n-1}+...+a_nb_0\neq 0\}\right)\leq\inf\left(\{k\in\mathbb{N};a_k\neq 0\}\right)+\inf\left(\{k\in\mathbb{N};b_k\neq 0\}\right)$
  d'où $val(\alpha\beta)\leq val(\alpha)+val(\beta)$.

□

Remarquons que l'on peut avoir $val(\alpha+\beta)>val(\alpha)+val(\beta)$. C'est le cas par exemple avec $\alpha=1+X$ et $\beta=-1+X$ où $val(\alpha+\beta)=1$ et $val(\alpha)+val(\beta)=0$.

Nous allons maintenant définir une distance sur l'espace des séries formelles.

<u>Définition 3.11.</u>

Soit $d:\mathbb{C}[\![X]\!]^2\to\mathbb{R}_+$ *définie par :* $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{C}[\![X]\!]^2,\ d(\alpha;\beta)=2^{-val(\alpha-\beta)}$

<u>Proposition 3.12.</u>

1) ***d est une distance ultramétrique c'est-à-dire d est une distance vérifiant :***
   $\forall(\alpha;\beta;\gamma)\in\mathbb{C}[\![X]\!]^3, d(\alpha;\gamma)\leq\max(d(\alpha,\beta);d(\beta;\gamma))$.

2) $(\mathbb{C}[\![X]\!]$, d) est un espace métrique complet.

Démonstration :

1) Montrons d'abord que d est une distance ultramétrique.

Soient $(\alpha;\beta;\gamma)\in\mathbb{C}[\![X]\!]^3$.

- $d(\alpha;\beta)=2^{-val(\alpha-\beta)}\geq 0$.
- $d(\alpha;\beta)=0 \Leftrightarrow 2^{-val(\alpha-\beta)}=0$

$$\Leftrightarrow val(\alpha-\beta)=+\infty$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\beta\ .$$

- $d(\alpha;\beta)=2^{-val(\alpha-\beta)}=2^{-val(\beta-\alpha)}=d(\beta;\alpha)$ car $\inf(\{n\in\mathbb{N},a_n-b_n\neq 0\})=\inf(\{n\in\mathbb{N},b_n-a_n\neq 0\})$.
- $d(\alpha;\gamma)=2^{-val(\alpha-\gamma)}=2^{-val(\alpha-\beta+\beta-\gamma)}$. Or $val(\alpha-\beta+\beta-\gamma)\geq\min(val(\alpha-\beta),val(\beta-\gamma))$.

On a donc :

$$\begin{aligned} d(\alpha;\gamma) &\leq 2^{-\min(val(\alpha-\beta),\,val(\beta-\gamma))} \\ &\leq \max\left(2^{-val(\alpha-\beta)},\,2^{-val(\beta-\gamma)}\right) \\ &\leq \max\left(d(\alpha;\beta),d(\beta;\gamma)\right). \end{aligned}$$

Ceci achève de démontrer que d est une distance ultramétrique.

2) Montrons que $(\mathbb{C}[\![X]\!],d)$ est un espace métrique complet.

Soit $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{C}[\![X]\!]$.

Alors, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists K_n\in\mathbb{N},\forall k_1\geq K_n,\forall k_2\geq K_n,\ \ 2^{-val(F_{k_1}-F_{k_2})}\leq 2^{-n-1}$, c'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists K_n\in\mathbb{N},\forall k_1\geq K_n,\forall k_2\geq K_n, val(F_{k_1}-F_{k_2})\geq n+1$. En particulier, on a alors :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists K_n\in\mathbb{N},\forall k\geq K_n,\ val(F_k-F_{K_n})\geq n+1$.

Ainsi pour tout entier $k\geq K_n$, les n premiers coefficients de F_k et F_{K_n} sont égaux.

Soit F la série formelle telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, son nième coefficient $(F)_n$ soit le nième coefficient de F_{K_n}, c'est-à-dire $F=\sum_{n\in\mathbb{N}}(F_{K_n})_n X^n$.

On a : $\forall n\in\mathbb{N},\exists K_n\in\mathbb{N},\forall k\geq K_n, val(F_k-F)>n$. On a donc $\lim_{k\to+\infty} val(F_k-F)=+\infty$.

Ce qui donne $\lim_{k\to+\infty} d(F_k-F)=\lim_{k\to+\infty}2^{-val(F_k-F)}=0$. Donc la suite de Cauchy $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers F d'où la complétude de $(\mathbb{C}[\![X]\!],d)$. □

Rappelons que dans un espace ultramétrique, tout triangle est isocèle.

<u>Théorème 3.13.</u>
L'ensemble des polynômes est dense dans l'ensemble des séries formelles.

Démonstration :

Soit $\alpha = \sum_{p=0}^{\infty} a_p X^p$ une série formelle. Considérons la suite des polynômes $(P_N)_{N\in\mathbb{N}}$ où $P_N = \sum_{p=0}^{N} a_p X^p$.

Montrons que $(P_N)_{N\in\mathbb{N}}$ a pour limite la série formelle α quand N tend vers $+\infty$:

$d\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p X^p ; \sum_{p=0}^{N} a_p X^p\right) = 2^{-val\left(\sum_{p=N+1}^{+\infty} a_p X^p\right)} \leq 2^{-(N+1)}$. Donc $\lim_{N\to+\infty} d(\alpha; P_N) = 0$. Ceci démontre la densité des polynômes dans l'ensemble des séries formelles. □

4. **Sommabilité formelle**

a) **Familles formellement sommables**

Voici la définition qui nous a permis de justifier, entre autre, la notation usuelle des séries formelles. L'idée est de s'intéresser à des sommes (infinies) de séries formelles.

Il est important de comprendre que les sommes définissant les coefficients, à priori infinies sont en réalité bien finies puisqu'il y a seulement un nombre fini de termes non nuls en jeu.

Le lemme 4.4. signifie que l'ordre de sommation n'a aucune importance.

Définition 4.1.

Considérons une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *d'éléments de* $\mathbb{C}[\![X]\!]$. *Appelons* $a_{j,k}$ *les coefficients de* α_k *, de telle sorte que :* $\alpha_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} X^j$.

La famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est appelée suite formellement sommable lorsque* $\forall r \in \mathbb{N}$, $\exists N_r \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_r$, $a_{0,n} = a_{1,n} = ... = a_{r,n} = 0$.

Si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est sommable, on définit sa somme, notée* $\sum \alpha_j$ *, de la façon suivante :*

$\sum_{j\in\mathbb{N}^*} \alpha_j = \sum_{r=0}^{\infty} s_r X^r$ *où, pour tout* $r \geq 0$, $s_r = a_{r,1} + a_{r,2} + ... + a_{r,N_r}$. s_r *est donc le coefficient de* X^r *dans la somme finie* $\alpha_1 + ... + \alpha_{N_r}$.

Remarque 1

Cette définition est bien sûr cohérente avec la définition de l'addition : En effet, si $\alpha_1 = A, \alpha_2 = B$ *et* $\alpha_n = 0$ *pour* $n \geq 3$, *on a :* $\sum_{j\in\mathbb{N}^*} \alpha_j = A + B$.

Remarque 2

Une famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}[\![X]\!]^{\mathbb{N}^*}$ *, notée pour tout* $n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \sum_{r\in\mathbb{N}} a_{r,n} X^r$ *est sommable si et seulement si pour tout* $r \geq 0$, $a_{r,n}$ *est non nul seulement pour un nombre fini d'entiers naturels n non nuls.*

Si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite sommable, on pose pour tout n > 0 $s_r = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{r,n}$ *. Cette somme ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes.*
La série formelle $\sum_{r\geq 0} s_r X^r$ *est donc bien définie.*

Cette remarque donne une définition de la sommabilité des séries formelles équivalente à celle donnée dans la définition 4.3.
En effet, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, alors : $\forall r\in\mathbb{N},\ \exists N_r \in\mathbb{N}, \forall n\geq N_r,\ a_{0,n} = a_{1,n} = ... = a_{r,n} = 0$.
Pour tout $r\in\mathbb{N}$, il existe $N_r\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N_r$, $a_{r,n}$ est nul.
Ainsi les seuls $a_{r,n}$ éventuellement non nuls sont ceux pour lesquels $n < N_r$ et il y en a au plus $N_r - 1$, donc un nombre fini.
Réciproquement, supposons que pour tout $r\geq 0$, il y ait un nombre fini de $n\in\mathbb{N}^*$ pour lesquels $a_{r,n}$ soit non nul.
Prenons $r\geq 0$. Alors :

$$\begin{cases} \exists N_0 > 0, \forall n\geq N_0,\ a_{0,n} = 0 \\ \exists N_1 > 0, \forall n\geq N_1,\ a_{1,n} = 0 \\ .... \\ \exists N_r > 0, \forall n\geq N_r,\ a_{r,n} = 0 \end{cases}.$$

Donc il existe $N_r' > 0$ (en prenant $N_r' = \max(N_1,...,N_r)$), tel que : $\forall n\geq N_r',\ a_{0,n} = a_{1,n} = ... = a_{r,n} = 0$.
La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc sommable. □

Exemples fondamentaux de familles sommables :

Si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $val(\alpha)\geq 1$, alors $(c_n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.
En particulier, on utilisera :
Si $val(\alpha)\geq 1$, $\left(\frac{\alpha^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables.

Démonstration :
Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha\in\mathbb{C}[\![X]\!]$ telle que $val(\alpha)\geq 1$.

Notons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n\alpha^n = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,n} X^j$.

Remarquons tout d'abord que $val(c_n\alpha^n)\geq n$. En effet, $val(c_n\alpha^n)\geq val(\alpha^n) = n\ val(\alpha)$ d'après la propriété 4.2. d'où $val(c_n\alpha^n)\geq n$

Soit $r\in\mathbb{N}$. Alors il existe $N_r\in\mathbb{N}$ (*à savoir* $N_r = r+1$) tel que :

pour tout $n\geq N_r = r+1$, $a_{0,n} = a_{1,n} = ... = a_{r,n} = 0$, car $val(c_n\alpha^n)\geq n > r$. □

Ainsi on a montré que $(c_n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Ces exemples fondamentaux nous permettrons au paragraphe 6 de définir un logarithme et une exponentielle formels.

Vérifions maintenant que l'ordre de sommation n'a pas d'importance, à l'identique de ce que l'on appelle usuellement une famille sommable ou de la convergence commutative d'une série :

Lemme 4.2.

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite sommable d'éléments de $\mathbb{C}[\![X]\!]$. Soit $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un réarrangement de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ au sens où pour tout j, il existe un unique k tel que $\alpha_j = \beta_k$.

La suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite sommable et $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$.

Démonstration :

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite sommable d'éléments de $\mathbb{C}[\![X]\!]$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un réarrangement de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note : $\forall k\in\mathbb{N}^*, \alpha_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}X^j$ et $\beta_k = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j,k}X^j$

Soit σ la bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à $i\in\mathbb{N}$ associe l'unique entier j tel que $\beta_j = \alpha_i$.

Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite sommable, on a : $\forall r\geq 0, \exists N_r \geq 0, \forall n\geq N_r, a_{0,n} = a_{1,n} = a_{2,n} = ... = a_{r,n} = 0$.

L'ensemble $K = \sigma([\![0;N_r]\!])$ admet un plus grand élément N_r'.

Pour tout $n \geq N_r'+1$, on a : $\beta_n = \alpha_{\sigma^{-1}(n)}$ et $\sigma^{-1}(n) > N_r$, sinon n serait dans K, ce qui contredit le fait que N_r' est le plus grand élément de K. Ceci montre $b_{0,n} = b_{1,n} = b_{2,n} = ... = b_{r,n} = 0$.

La suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc sommable.

De plus pour tout entier r positif ou nul, le coefficient de X^r dans la somme $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ est égal au coefficient de X^r dans la somme $\alpha_1 + ... + \alpha_{N_r}$.

Il est égal à $a_{0,r} + a_{1,r} + ... + a_{N_r-1,r} = b_{\sigma^{-1}(0),r} + ... b_{\sigma^{-1}(N_r-1),r}$. C'est encore le coefficient de X^r dans $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$ puisque $b_{j,r}$ est nul pour tout j qui n'est pas dans $K = \sigma([\![0;N_r]\!])$.

On en déduit l'égalité $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$, puisque, dans ces deux sommes, les coefficients de X^r sont égaux, pour tout entier r. □

Exemple fondamental :

Si $\beta\in X\mathbb{C}[\![X]\!]$ l'inverse de 1-β est $(1-\beta)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\beta^n$.

En effet pour tout $\beta\in X\mathbb{C}[\![X]\!]$ la série formelle $\sum_{n\in\mathbb{N}}\beta^n$ est bien définie d'après les exemples fondamentaux de familles sommables en prenant pour $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ la suite constante égale à 1.

De plus, on a : $(1-\beta)\sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} - \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\beta^{j-1} - \beta^{j-1}\right) + 1 = 1$.

De même, on a : $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1}\right)(1-\beta) = 1.$ □

b) Familles multipliables

Cette situation se transpose au produit.

Définition 4.3.

Soit $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ telle que : $\forall k \geq 1, \gamma_k = \sum_{j=1}^{\infty} c_{j,k} X^j$. Lorsque cette suite est sommable, on dit que la suite $(1+\gamma_k)_{k\geq 1}$ est une famille multipliable et on définit le produit par $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\gamma_k) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} q_j X^j$ où q_j est le coefficient de X^j dans le produit fini $\prod_{k=1}^{n}(1+\gamma_k)$ avec n suffisamment grand pour que $c_{i,k}$ soit nul pour $1 \leq i \leq j$ et *$k > n$*.

Lemme 4.4.

Si $(1+\gamma_k)_{k\geq 1}$ est une suite admettant une multiplication et $(1+\delta_k)_{k\geq 1}$ un réarrangement de cette suite, $(1+\delta_k)_{k\geq 1}$ est alors aussi une famille multipliable et on a : $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\gamma_k) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)$.

Remarque : La démonstration du lemme 4.4. est similaire à celle du lemme 4.2.

c) Un exemple d'application de la sommabilité formelle

Théorème 4.5.

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sommable d'éléments de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ et soit $\beta \in \mathbb{C}[\![X]\!]$.

Alors, la suite $(\alpha_n \beta)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\beta) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\right)\beta$.

Démonstration :

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ notée pour tout $n\in\mathbb{N}, \alpha_n=\sum_{i=0}^{\infty}a_{i,n}X^i$ et $\beta\in\mathbb{C}[\![X]\!]$ telle que $\beta=\sum_{i=0}^{\infty}b_iX^i$.

Soit $j\in\mathbb{N}$. Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, il existe $N_j\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N_j$, on a : $a_{0,n}=a_{1,n}=a_{2,n}=...a_{j,n}=0$. Or $\alpha_n\beta=\sum_{k=0}^{\infty}c_{k,n}X^k$ avec $c_{k,n}=\sum_{i=0}^{k}a_{i,n}b_{k-i}$. Comme tous les nombres $a_{i,n}$ sont tous nuls pour $i\leq j$, on a : $c_{0,n}=c_{1,n}=...=c_{j,n}=0$. On en déduit que la suite $(\alpha_n\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Montrons maintenant que $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\beta)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\right)\beta$. Pour cela, montrons que pour tout $j\in\mathbb{N}$, elles ont le même j$^{\text{ème}}$ terme.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta\right)_j &=\sum_{n=0}^{\infty}c_{j,n}=\sum_{n=0}^{N_j}c_{j,n}=\sum_{n=0}^{N_j}\left(\sum_{i=0}^{j}a_{i,n}b_{j-i}\right)\\ &=\sum_{i=0}^{j}\left(\sum_{n=0}^{N_j}a_{i,n}b_{j-i}\right)=\sum_{i=0}^{j}\left(\sum_{n=0}^{N_j}a_{i,n}\right)b_{j-i}\\ &=\sum_{i=0}^{j}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\right)_i b_{j-i}=\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\right)\beta\right)_j.\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout entier *j*, on a $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\beta)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\right)\beta$. □

d) Un autre exemple d'application de la sommabilité formelle : la composition

Nous allons à présent revenir sur les résultats 3.5 à 3.8 énoncés précédemment en vue de les démontrer.

Soient $\alpha=\sum_{n\geq0}a_nX^n$ et $\beta=\sum_{n\geq0}b_nX^n$ des séries formelles.

Nous souhaitons donc donner un sens à la composition $\alpha\circ\beta=\sum_{n\geq0}a_n\beta^n$. Comme la somme est à priori infinie, le terme constant de $\alpha\circ\beta$ qui vaut $\sum_{n\geq0}a_nb_0{}^n$ n'est pas défini, sauf si on suppose $b_0=0$.

Rappel des théorème et définition 3.5

Lorsque $val(\beta)\geq1$, la famille $(a_n\beta^n)_{n\geq0}$ est sommable pour toute suite $(a_n)_{n\geq0}$ de complexes. La série formelle $\sum_{n\geq0}a_n\beta^n$, qui est la somme de la famille $(a_n\beta^n)_{n\geq0}$, est dite obtenue par substitution de β dans la série $\alpha=\sum_{n\geq0}a_nX^n$. On pose alors $\alpha\circ\beta=\sum_{n\geq0}a_n\beta^n$.

Comme $val(\beta)\geq 1$***, le coefficient de*** X^k ***dans la série formelle*** β^n ***est nul dès que*** $n\geq k+1$***.*** ***Par conséquent, le coefficient de*** X^k ***dans*** $\alpha\circ\beta$ ***est égal au coefficient de*** X^k ***dans la somme finie*** $a_0\beta^0+a_1\beta^1+...+a_k\beta^k$***. Autrement dit, si*** $val(\beta)\geq 1$***, et si on note*** $\left(\beta^n\right)_k$ ***le coefficient de*** X^k ***dans la série formelle*** β^n***, on a pour tout*** $k\geq 0$ ***:*** $(\alpha\circ\beta)_k=\sum_{0\leq n\leq k}a_n\left(\beta^n\right)_k$ ***.***

Démonstration :

La sommabilité de $\left(a_n\beta^n\right)_{n\geq 0}$ a été montrée dans les exemples fondamentaux de familles formellement sommables. Le reste de la preuve a déjà été établi dans la démonstration de ces exemples.

□

Rappel de la proposition 3.6

Soit $\beta\in X\mathbb{C}[\![X]\!]$***, c'est-à-dire que*** β ***est sans terme constant. Le morphisme*** $f_\beta:\mathbb{C}[X]\to\mathbb{C}[\![X]\!]$ ***défini par :*** $f_\beta(P)=P(\beta)$ ***pour tout*** $P\in\mathbb{C}[X]$***, s' étend de façon unique en un morphisme*** $\varphi:\mathbb{C}[\![X]\!]\to\mathbb{C}[\![X]\!]$ ***défini par*** $\varphi(\alpha)=\alpha\circ\beta$***.***

Démonstration :

- Montrons que $\varphi:\alpha\mapsto\alpha\circ\beta$ est un morphisme de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$. Soient α_1,α_2 et β dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$.

1) $(\alpha_1+\alpha_2)\circ\beta=\alpha_1\circ\beta+\alpha_2\circ\beta$.

En effet, pour $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\left((\alpha_1+\alpha_2)\circ\beta\right)_n&=\sum_{0\leq k\leq n}(\alpha_1+\alpha_2)_k\left(\beta^k\right)_n\\&=\sum_{0\leq k\leq n}(\alpha_1)_k\left(\beta^k\right)_n+\sum_{0\leq k\leq n}(\alpha_2)_k\left(\beta^k\right)_n\\&=(\alpha_1\circ\beta)_n+(\alpha_2\circ\beta)_n.\end{aligned}$$

2) $(\alpha_1\circ\beta)\times(\alpha_2\circ\beta)=(\alpha_1\times\alpha_2)\circ\beta$.

En effet :

$$\begin{aligned}(\alpha_1\circ\beta)\times(\alpha_2\circ\beta)&=\left(\sum_{n\geq 0}(\alpha_1)_n\beta^n\right)\left(\sum_{m\geq 0}(\alpha_2)_m\beta^m\right)\\&=\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}(\alpha_1)_n(\alpha_2)_m\beta^{n+m}\text{ par le théorème 4.5.}\\&=\sum_{k\geq 0}\beta^k\sum_{0\leq j\leq k}(\alpha_1)_j(\alpha_2)_{k-j}\text{ par le lemme 4.2.}\\&=(\alpha_1\alpha_2)\circ\beta.\end{aligned}$$

3) $\mathbf{1}\circ\beta=\mathbf{1}$.

En effet $\mathbf{1}\circ\beta=\sum_{n\geq\mathbf{0}}(\mathbf{1})_n\beta^n=\mathbf{1}\times\beta^{\mathbf{0}}=\mathbf{1}$.

- Montrons que φ est le seul morphisme qui convient.

Soit ψ un autre morphisme qui étend f à $\mathbb{C}[\![X]\!]$ .Fixons $\alpha\in\mathbb{C}[\![X]\!]$ telle que $\alpha=\sum_{n\geq 0}a_nX^n$ et posons $P_N=\sum_{n=0}^{N}a_nX^n$. Il existe une série formelle $\gamma\in\mathbb{C}[\![X]\!]$ telle que $\alpha-P_N=X^{N+1}\gamma$.

On a alors $\psi(\alpha-P_N)=\psi\left(X^{N+1}\gamma\right)=\psi\left(X^{N+1}\right)\psi(\gamma)=\beta^{N+1}\psi(\gamma)$.

Or $\psi(\alpha - P_N) = \psi(\alpha) - \psi(P_N) = \psi(\alpha) - P_N(\beta)$. On obtient alors $\psi(\alpha) - P_N(\beta) = \beta^{N+1}\psi(\gamma)$.
De plus, $val\left(\beta^{N+1}\psi(\gamma)\right) = (N+1)val(\beta) + val(\psi(\gamma)) \geq N+1$ car $val(\beta) \geq 1$.

$\left(P_N(\beta)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est donc convergente de limite $\psi(\alpha)$ au sens de la distance d définie en 3.11. puisque $d\left(\psi(\alpha); P_N(\beta)\right) \leq 2^{-(N+1)}$. Elle converge aussi clairement vers $\sum_{n\geq 0} a_n \beta^n$.

Donc $\psi(\alpha) = \sum_{n\geq 0} a_n \beta^n = \alpha \circ \beta = \varphi(\alpha)$. On en déduit l'égalité des deux morphismes φ et ψ, d'où l'unicité du morphisme qui prolonge f à $\mathbb{C}[\![X]\!]$. □

Rappel du corollaire 3.7

L'application $\alpha \mapsto \alpha \circ \beta$ est l'unique endomorphisme de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ tel que X ait pour image β.

Démonstration :

Soit un endomorphisme de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ tel que X ait pour image β, appelons φ la restriction de ce morphisme à $\mathbb{C}[X]$. On a alors, si $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$, $\varphi(P) = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi(X)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n \beta^n = P(\beta)$.

Par le théorème précédent, φ s'étend en un unique morphisme de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ qui est : $\alpha \mapsto \alpha \circ \beta$. Ceci finit de prouver le corollaire. □

Rappel de la proposition 3.8

Si β et γ sont deux séries formelles sans terme constant, on a $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$.
Autrement dit, la composition des séries formelles est associative.

Démonstration :

Si on compose $\alpha \mapsto \alpha \circ \beta$ et $\alpha \mapsto \alpha \circ \gamma$, on obtient $\psi : \alpha \to (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$. Or $\psi(X) = (X \circ \beta) \circ \gamma = \beta \circ \gamma$ puisque $val(\beta \circ \gamma) \geq 1$. Par le corollaire précédent, $\alpha \mapsto \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$ est l'unique endomorphisme de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ tel que X ait pour image $\beta \circ \gamma$, donc pour tout $\alpha \in \mathbb{C}[\![X]\!]$, $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$. □

5. Dérivation formelle

Définition 5.1.

Soit α dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ telle que $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X^j$. On définit $D(\alpha)$, appelée dérivée de α, par

$$D(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j X^{j-1}$$ *et on note $S(\alpha)$ le terme constant de α, c'est-à-dire a_0.*

Définition 5.2.

On définit, pout tout entier n strictement positif, la n-ième dérivée de α *par* $D^n(\alpha)=D\left(D^{n-1}(\alpha)\right)$*, en prenant pour convention* $D^0(\alpha)=\alpha$.

On dispose alors d'une formule très simple, que l'on appellera formule de Taylor pour les séries formelles, mais qui sera extrêmement utile lorsqu'on voudra par exemple donner un développement en série formelle. On l'utilisera notamment pour démontrer le théorème binomial (dans le paragraphe 7).

<u>Théorème 5.3.</u>

Pour tout α ***dans*** $\mathbb{C}[\![X]\!]$***, on a :*** $\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S\left(D^n(\alpha)\right)X^n$**.**

<u>Démonstration :</u>

Ecrivons α sous la forme $\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n$. Il faut alors montrer que $a_n=\frac{1}{n!}S\left(D^n(\alpha)\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Par définition de la dérivation formelle, on a : $D^n(\alpha)=\sum_{k=n}^{\infty}a_kk(k-1)...(k-n+1)X^{k-n}$ ou encore $D^n(\alpha)=\sum_{k=n}^{\infty}a_k\frac{k!}{(k-n)!}X^{k-n}$. On a donc $S\left(D^n(\alpha)\right)=a_nn!$. Ainsi $a_n=\frac{1}{n!}S\left(D^n(\alpha)\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. □

<u>Théorème 5.4.</u>

D est une dérivation, c'est-à-dire D est linéaire et vérifie la propriété de Leibniz :

$D(\alpha\beta)=D(\alpha)\beta+\alpha D(\beta)$ ***pour tout*** $(\alpha;\beta)\in\mathbb{C}[\![X]\!]^2$**.**

Elle vérifie alors automatiquement les relations vérifiées par les dérivations :

$\forall n>0, D\left(\alpha^n\right)=n\alpha^{n-1}D(\alpha)$ **.**

De plus, si α^{-1} ***existe,*** $D\left(\alpha^{-1}\right)=-\alpha^{-2}D(\alpha)$ ***et plus généralement :***

$\forall n>0, D\left(\alpha^{-n}\right)=-n\alpha^{-n-1}D(\alpha)$ **.**

<u>Démonstration :</u>

Soient α et β dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ représentées par $\alpha=\sum_{j=0}^{\infty}a_jX^j$ et $\beta=\sum_{j=0}^{\infty}b_jX^j$; soit aussi $\lambda\in\mathbb{C}$.

- On a : $\alpha+\lambda\beta=\sum_{j=0}^{\infty}\left(a_j+\lambda b_j\right)X^j$. Par définition de la dérivation formelle, puis par la définition de la somme de deux séries formelles, on a donc :

$$D(\alpha+\lambda\beta)=\sum_{j=1}^{\infty} j\left(a_j+\lambda b_j\right)X^{j-1}$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty} ja_j X^{j-1}+\lambda\sum_{j=1}^{\infty} jb_j X^{j-1}$$
$$=D(\alpha)+\lambda D(\beta)$$

Donc D est bien une application linéaire.

- De même, on a : $\alpha\beta=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right)X^j$.

$$\alpha D(\beta)+\beta D(\alpha)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k\,(j-k+1)b_{j-k+1}\right)X^j+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j} b_k\,(j-k+1)a_{j-k+1}\right)X^j$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j}(j-k+1)\left(a_k b_{j-k+1}+b_k a_{j-k+1}\right)\right)X^j$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{j}(j-k+1)\left(a_k b_{j-k+1}+b_k a_{j-k+1}\right)=\sum_{k=0}^{j}(j+1)\left(a_k b_{j-k+1}\right)-\sum_{k=0}^{j}k\left(a_k b_{j-k+1}\right)+\sum_{k=0}^{j}(j-k+1)\left(b_k a_{j-k+1}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{j}(j+1)\left(a_k b_{j-k+1}\right)-\sum_{k=0}^{j}k\left(a_k b_{j-k+1}\right)+\sum_{k=1}^{j}(j-k+1)\left(b_k a_{j-k+1}\right)+(j+1)b_0 a_{j+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{j}(j+1)\left(a_k b_{j-k+1}\right)+(j+1)a_{j+1}b_0 \text{, par le changement d'indice k} \leftrightarrow \text{j+1-k dans la 3}^{\text{ième}}\text{somme}$$
$$=\sum_{k=0}^{j+1}(j+1)\left(a_k b_{j-k+1}\right)$$

D'où : $\alpha D(\beta)+\beta D(\alpha)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j+1}(j+1)\left(a_k b_{j-k+1}\right)X^j$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} j\left(a_k b_{j-k}\right)X^{j-1}$$
$$=D(\alpha\beta)$$

- Montrons maintenant par récurrence que pour tout entier $n > 0$, $D\left(\alpha^n\right)=n\alpha^{n-1}D(\alpha)$.

Bien sûr, $D\left(\alpha^1\right)=D(\alpha)=1\times\alpha^0 D(\alpha)$.

Soit n un entier strictement positif, supposons que $D\left(\alpha^n\right)=n\alpha^{n-1}D(\alpha)$. Alors :

$$D\left(\alpha^{n+1}\right)=D\left(\alpha\alpha^n\right)$$
$$=\alpha D\left(\alpha^n\right)+\alpha^n D(\alpha)$$
$$=\alpha n\alpha^{n-1}D(\alpha)+\alpha^n D(\alpha)$$
$$=(n+1)\alpha^n D(\alpha)$$

- Si α^{-1} existe alors $\alpha\alpha^{-1}=1$ et en appliquant la formule de dérivation d'un produit, on obtient :
  $0=D\left(\alpha\alpha^{-1}\right)=\alpha D\left(\alpha^{-1}\right)+\alpha^{-1}D(\alpha)$. D'où $D\left(\alpha^{-1}\right)=-\alpha^{-2}D(\alpha)$.

- Enfin, en appliquant la formule de dérivée d'une puissance on obtient :

$$
\begin{aligned}
D\left(\alpha^{-n}\right) &= D\left(\left(\alpha^{-1}\right)^{n}\right) \\
&= n\left(\alpha^{-1}\right)^{n-1} D\left(\alpha^{-1}\right) \\
&= -n\left(\alpha^{-1}\right)^{n-1} \alpha^{-2} D(\alpha) \\
&= -n\alpha^{-n-1} D(\alpha)
\end{aligned}
$$

□

Dans le paragraphe suivant, pour $\alpha \in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$, nous définirons, $\alpha^{\frac{m}{n}}$ où $(m,n)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, comme étant l'unique $\beta \in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$ tel que $\alpha^m = \beta^n$. On se réfère à ce paragraphe pour plus de détails. Ceci permet de définir α^r pour $r\in\mathbb{Q}$ et nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

<u>Théorème 5.5.</u>

Soit $\alpha \in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$. Alors pour tout rationnel r, $D\left(\alpha^r\right) = r\alpha^{r-1}D(\alpha)$.

<u>Démonstration :</u>

Soit r un rationnel , r s'écrit $r=\dfrac{m}{n}$ avec $m\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ et m et n premiers entre eux. α^r est bien défini et on a

$D\left(\left(\alpha^r\right)^n\right) = n\left(\alpha^r\right)^{n-1} D\left(\alpha^r\right)$.

Or $D\left(\left(\alpha^r\right)^n\right) = D\left(\alpha^m\right) = m\alpha^{m-1}D(\alpha)$.

Comme $\alpha \in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$, $S(\alpha)=1\neq 0$, α est donc inversible ce qui entraîne que $m\alpha^{m-1}$ est inversible.

D'où

$$
\begin{aligned}
D\left(\alpha^r\right) &= r\alpha^{m-1-r(n-1)}D(\alpha) \\
&= r\alpha^{r-1}D(\alpha)
\end{aligned}
$$

□

Les familles formellement sommables que nous avons introduites à la définition 4.1. peuvent, elles aussi, se dériver formellement. Ce prochain théorème illustre bien la simplicité avec laquelle on peut dériver une « série de fonctions formelles ». Cela provient de la faiblesse de la topologie mise sur l'espace des séries formelles.

<u>Théorème 5.6.</u>

Si $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j$ est une famille formellement sommable d'éléments de $\mathbb{C}[\![X]\!]$

alors $D\left(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}D\left(\alpha_j\right)$.

<u>Démonstration :</u>

Soit $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j$ une famille formellement sommable d'éléments de $\mathbb{C}[\![X]\!]$. Notons pour tout entier j supérieur ou égal à 1, $\alpha_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}X^i$. Par définition d'une famille formellement sommable, pour chaque r entier positif ou nul, il existe un entier N_r tel que pour tout $n \geq N_r$ $a_{r,n}$ soit nul. Ceci permet d'écrire, comme nous l'avons vu précédemment :

$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j = \sum_{r=0}^{\infty} s_r X^r$ où $s_r = \sum_{i=0}^{N_r} a_{r,i}$.

Par définition de la dérivation formelle, $D\left(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\right) = \sum_{r=0}^{\infty} r s_r X^{r-1}$.

Ainsi pour tout entier r strictement positif, le coefficient de X^{r-1} est rs_r .

De plus, pour tout $j \geq 1$ on a $D(\alpha_j) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n,j} X^{n-1}$. Ainsi le coefficient de X^{r-1} dans $D(\alpha_j)$ est $ra_{r,j}$.

Or, comme $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j$ est une somme admissible, pour tout $j \geq N_r, a_{r,j} = 0$ donc en particulier $ra_{r,j} = 0$.

Ainsi, $\left(D(\alpha_j)\right)$ est sommable et $\sum_{j=1}^{\infty} D(\alpha_j) = \sum_{r=0}^{\infty} t_{r-1}X^{r-1}$ où $t_{r-1} = \sum_{j=0}^{N_r} ra_{r,j} = rs_r$.

Les coefficients de X^{r-1} dans $D\left(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\right)$ et $\sum_{j=1}^{\infty} D(\alpha_j)$ sont les mêmes et ceci pour tout $r \geq 1$, d'où l'égalité :

$D\left(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} D(\alpha_j)$. □

On va maintenant énoncer un théorème qui sera très utile pour démontrer les propriétés du logarithme et de l'exponentielle formelles que nous verrons dans le paragraphe 6.

Théorème 5.7.
Si deux séries formelles α et β ***ont la même dérivée alors il existe*** $c \in \mathbb{C}$ ***tel que*** $\alpha = \beta + c$**.**

Démonstration :

Soient $\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ et $\beta = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$ deux séries formelles. On a alors : $D(\alpha) = \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i X^{i-1}$ et $D(\beta) = \sum_{i=1}^{+\infty} i b_i X^{i-1}$.

En identifiant alors les coefficients de $D(\alpha)$ et $D(\beta)$, on obtient les égalités $a_i = b_i$ pour tout $i \geq 1$. On a alors : $a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} a_i X^i = b_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i X^i + c$ avec $c = a_0 - b_0$, c'est-à-dire

$\alpha = \beta + c$. □

Un des principaux théorèmes de notre étude repose essentiellement sur cette notion de dérivation formelle : il s'agit du théorème binomial. Celui-ci dit que si r un complexe et β un élément de $X\mathbb{C}[\![X]\!]$, alors $(1+\beta)^r = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{r}{j}\beta^j$. Nous reverrons ce résultat et sa preuve au paragraphe 7.

6. Logarithme et exponentielle formels

a) Logarithme formel

Nous allons maintenant définir un logarithme formel pour les éléments de $1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$.

Définition 6.1.
Pour tout $\alpha \in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$, *c'est-à-dire pour tout* α *s'écrivant* $\alpha = 1+\beta$ *avec* $\beta \in X\mathbb{C}[\![X]\!]$, *on appelle logarithme formel de* α *et on note* $Ln(\alpha)$ *la série formelle définie par :*

$$Ln(\alpha) = Ln(1+\beta) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\beta^j}{j}.$$

Remarque :
Pour tout $\alpha \in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$, $\left(\frac{\beta^j}{j}\right)_{j\geq 1}$ est sommable d'après les exemples fondamentaux de familles sommables de la partie 4. On définit ainsi une application Ln de $1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$ dans $X\mathbb{C}[\![X]\!]$.
Cette application, que l'on appelle logarithme formel, va vérifier toutes les relations que l'on connait pour la fonction logarithme népérien.

Remarque : $Ln(1+\beta) = Ln(1+X) \circ \beta$ *si* $Ln(1+X) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{X^j}{j}$

Théorème 6.2.

$$D(Ln(\alpha)) = \alpha^{-1} D(\alpha).$$

Démonstration :
Comme $Ln(\alpha)$ est la somme d'une famille sommable, par le théorème 5.6., on a :

$$\begin{aligned} D(Ln(\alpha)) = D(Ln(1+\beta)) &= D\left(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\beta^j}{j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} D(\beta^j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} j\beta^{j-1} D(\beta) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \beta^{j-1}\right) D(\beta) \text{ (on utilise ici le théorème 4.5.).} \end{aligned}$$

Or d'après l'exemple fondamental vu au paragraphe 4 on a : $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\beta^{j-1}=(1+\beta)^{-1}$.

D'où $D(Ln(\alpha))=(1+\beta)^{-1}D(\beta)=\alpha^{-1}D(\alpha)$.

□

Théorème 6.3.

Si $(\alpha;\beta)\in(1+X\mathbb{C}[\![X]\!])^2$***, alors*** $Ln(\alpha\beta)=Ln(\alpha)+Ln(\beta)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} D(Ln(\alpha\beta)) &= (\alpha\beta)^{-1}D(\alpha\beta) \text{ (par le théorème 6.2.)} \\ &= (\alpha\beta)^{-1}(\alpha D(\beta)+\beta D(\alpha)) \\ &= \beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha D(\beta)+\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta D(\alpha) \\ &= \beta^{-1}D(\beta)+\alpha^{-1}D(\alpha) \text{ (car l'anneau } \mathbb{C}[\![X]\!] \text{est commutatif)} \\ &= D(Ln(\beta))+D(Ln(\alpha)) \\ &= D(Ln(\alpha)+Ln(\beta)) \end{aligned}$$

D'après le théorème 5.7., il existe $c\in\mathbb{C}$ tel que $Ln(\alpha\beta)=Ln(\alpha)+Ln(\beta)+c$. De plus $Ln(\alpha\beta)$ et $Ln(\alpha)+Ln(\beta)$ sont des éléments de $X\mathbb{C}[\![X]\!]$, donc $S(Ln(\alpha\beta))=S(Ln(\alpha)+Ln(\beta))=0$. On a donc $c=0$. Ces deux séries formelles sont donc égales.

□

Théorème 6.4.

Soit $\alpha\in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$.

Pour tout rationnel r, $Ln(\alpha^r)=rLn(\alpha)$.

Démonstration :

- Montrons déjà, par récurrence sur *n*, que pour tout entier naturel n, $Ln(\alpha^n)=n\,Ln(\alpha)$.

En revenant à la définition du logarithme formel, $Ln(\mathbf{1})=0$, ce qui justifie la propriété pour *n = 0*.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $Ln(\alpha^n)=n\,Ln(\alpha)$.

On a alors : $Ln(\alpha^{n+1})=Ln(\alpha\alpha^n)=Ln(\alpha)+Ln(\alpha^n)=Ln(\alpha)+n\,Ln(\alpha)=(n+1)Ln(\alpha)$.

Donc : $\forall n\in\mathbb{N},\ Ln(\alpha^n)=n\,Ln(\alpha)$.

- Montrons ensuite que $Ln(\alpha^{-1})=-Ln(\alpha)$.

  Par définition de α^{-1}, on a $\alpha\alpha^{-1}=1$, on en déduit $Ln(\alpha)+Ln(\alpha^{-1})=0$, donc $Ln(\alpha^{-1})=-Ln(\alpha)$.

- On a de même pour tout $n\in\mathbb{N}$, $Ln(\alpha^{-n})=-n\,Ln(\alpha)$. Il suffit de remarquer que $\alpha^{-n}=(\alpha^n)^{-1}$ et utiliser les deux résultats précédents. On a donc pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $Ln(\alpha^n)=n\,Ln(\alpha)$.

- Soit enfin r un nombre rationnel qui s'écrit $r=\dfrac{m}{n}$ avec $m\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

On a alors : $L(\alpha^m)=L((\alpha^r)^n)=nL(\alpha^r)$ et $L(\alpha^m)=mL(\alpha)$ puisque *m* et *n* sont des entiers.

D'où $nL(\alpha^r)=mL(\alpha)$. Ainsi $L(\alpha^r)=\frac{m}{n}L(\alpha)=rL(\alpha)$. □

Théorème 6.5.

Soit $(\alpha;\beta)\in(1+X\mathbb{C}[\![X]\!])^2$.
$Ln(\alpha)=0$ ***équivaut à*** $\alpha=\mathbf{1}$ ***;*** $Ln(\alpha)=Ln(\beta)$ ***équivaut à*** $\alpha=\beta$.

Démonstration :

Si $\alpha=\mathbf{1}$, on a déjà vu, par définition du logarithme formel, que $Ln(\alpha)=0$.
Réciproquement, si $Ln(\alpha)=0$, alors : $D(Ln(\alpha))=D(0)=0$, c'est-à-dire $\alpha^{-1}D(\alpha)=0$. Comme $\alpha^{-1}\neq 0$, par intégrité de l'anneau des séries formelles, on a $D(\alpha)=0$. Comme $\alpha\in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$, on obtient $\alpha=\mathbf{1}$.
Enfin $L(\alpha)=L(\beta)$ équivaut à $L(\alpha)-L(\beta)=0$, c'est-à-dire $L(\alpha\beta^{-1})=0$; par ce qui précède, cela équivaut à $\alpha\beta^{-1}=\mathbf{1}$, ce qui donne $\alpha=\beta$. □

b) Exponentielle formelle

Définition 6.6.
Soit β un élément de $X\mathbb{C}[\![X]\!]$ (c'est-à-dire tel que $S(\beta)=0$).
Alors $Exp(\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{n!}$ est l'exponentielle formelle de β.

Remarque : *Exp* est une application correctement définie de $X\mathbb{C}[\![X]\!]$ dans $1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$ car $Exp(\beta)$ est la somme d'une famille formellement sommable d'après les exemples fondamentaux de la partie 4, ce qui donne sens à la définition.

Remarque : $Exp(\beta)=Exp\circ\beta$ si $Exp(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}$.

Proposition 6.7.

Soit β un élément de $X\mathbb{C}[\![X]\!]$, alors $D(Exp(\beta))=D(\beta)Exp(\beta)$.

Démonstration :

Il s'agit d'une application immédiate du théorème 5.6.

$D\left(Exp(\beta)\right)=D\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}D\left(\frac{\beta^n}{n!}\right)$ car $\left(\frac{\beta^n}{n!}\right)_{n\geq 0}$ est une famille formellement sommable.

On a donc : $D\left(Exp(\beta)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}nD(\beta)\left(\frac{\beta^{n-1}}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}D(\beta)\frac{\beta^n}{n!}=D(\beta)Exp(\beta)$. □

Théorème 6. 8.

Si $Exp(\beta)=Exp(\gamma)$ ***alors*** $\beta=\gamma$***.***

Démonstration :

Soient β et γ deux éléments de $X\mathbb{C}[\![X]\!]$ tels que $Exp(\beta)=Exp(\gamma)$. On a alors $D\left(Exp(\beta)\right)=D\left(Exp(\gamma)\right)$, ce qui s'écrit, d'après le théorème précédent et : $D(\beta)Exp(\beta)=D(\gamma)Exp(\gamma)=D(\gamma)Exp(\beta)$. De plus, $Exp(\beta)$ est inversible puisque $S\left(Exp(\beta)\right)=1\neq 0$. Ainsi $D(\beta)=D(\gamma)$. Donc $\beta=\gamma$ à une constante près (d'après le théorème 5.7.).
Par ailleurs, le terme constant de β, $S(\beta)$ et celui de γ, $S(\gamma)$ sont égaux puisqu'ils sont égaux à 0 : β et γ sont dans $X\mathbb{C}[\![X]\!]$.
Ainsi : $\beta=\gamma$. □

Théorème 6.9.

Ln et Exp sont deux applications réciproques l'une de l'autre ie :
si β ***est dans*** $X\mathbb{C}[\![X]\!]$ ***alors*** $Ln\left(Exp(\beta)\right)=\beta$***. Si*** α ***est dans*** $1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$ ***alors*** $Exp\left(Ln(\alpha)\right)=\alpha$***.***

Démonstration :

- Par le théorème 6.2., on a :

$$\begin{aligned} D\left(Ln\left(Exp(\beta)\right)\right) &= \left(Exp(\beta)\right)^{-1}D\left(Exp(\beta)\right) \\ &= \left(Exp(\beta)\right)^{-1}Exp(\beta)D(\beta) \\ &= D(\beta) \end{aligned}$$

Comme $S\left(Ln\left(Exp(\beta)\right)\right)=0=S(\beta)$, on a : $Ln\left(Exp(\beta)\right)=\beta$.

- Par ailleurs, prenons α dans $1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$ et notons $\widetilde{\alpha}=Exp\left(Ln(\alpha)\right)$.

On a alors : $Ln\left(Exp\left(Ln(\alpha)\right)\right)=Ln\left(\widetilde{\alpha}\right)$, mais par ce qui vient d'être démontré $Ln\left(Exp\left(Ln(\alpha)\right)\right)=Ln(\alpha)$.

On en déduit : $Ln(\alpha)=Ln\left(\widetilde{\alpha}\right)$ d'où par le théorème 6.5., $\alpha=\widetilde{\alpha}$.

Ainsi : $Exp\left(Ln(\alpha)\right)=\alpha$. □

Théorème 6.10.
Si β et γ sont deux éléments de $X\mathbb{C}[\![X]\!]$ alors, $Exp(\beta+\gamma)=Exp(\beta)Exp(\gamma)$.

Démonstration :

On a, par le théorème 6.3. :

$$Ln(Exp(\beta)Exp(\gamma))=Ln(Exp(\beta))+Ln(Exp(\gamma))$$
$$=\beta+\gamma$$, d'après le thèorème 6.9.

En appliquant l'exponentielle formelle à cette dernière égalité, on obtient :
$Exp(Ln(Exp(\beta)Exp(\gamma)))=Exp(\beta+\gamma)$.

Or, d'après le théorème 6.9. , $Exp(Ln(Exp(\beta)Exp(\gamma)))=Exp(\beta)Exp(\gamma)$. D'où
$Exp(\beta+\gamma)=Exp(\beta)Exp(\gamma)$, ce qui est le résultat souhaité. □

Remarque :
En appliquant ce théorème avec $\gamma=-\beta$ on obtient que :
$\forall\beta\in X\mathbb{C}[\![X]\!], Exp(\beta)^{-1}=Exp(-\beta)$

c) Application : puissance complexe d'une série formelle

L'exponentielle formelle permet de généraliser la notion de puissance entière de série formelle à la notion de puissance rationnelle et même complexe.

Proposition 6.11.
Soient $\alpha\in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$ et $r\in\mathbb{Q}$, alors $\alpha^r=Exp(rLn(\alpha))$.

Démonstration :
Par le théorème 6.4 .on a : $Ln(\alpha^r)=rLn(\alpha)$. Ainsi, $Exp(rLn(\alpha))=Exp(Ln(\alpha^r))=\alpha^r$ d'après le théorème 6.9 . □

Définition 6.12.
Soit $\alpha\in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$ et r un nombre complexe, on note α^r la série formelle égale à $Exp(rLn(\alpha))$.

Proposition 6.13.

Soient $\alpha\in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$ et $(r;s)\in\mathbb{C}^2$. On a alors : $\alpha^r\alpha^s=\alpha^{r+s}$.

Démonstration :

$\alpha^r\alpha^s = Exp(rLn(\alpha))Exp(sLn(\alpha)) = Exp((r+s)Ln(\alpha))$ d'après le théorème 6.10. On obtient bien $\alpha^r\alpha^s = \alpha^{r+s}$. □

Ceci permet de généraliser le théorème 5.5. comme ceci :

<u>Théorème 6.14.</u>

Soit $\alpha \in 1 + X\mathbb{C}[[X]]$. Alors pour tout complexe r, on a $D(\alpha^r) = r\alpha^{r-1}D(\alpha)$.

<u>Démonstration :</u>

$D(\alpha^r) = D(Exp(rLn(\alpha))) = D(rLn(\alpha))Exp(rLn(\alpha))$ d'après la proposition 6.7., ce qui donne : $D(\alpha^r) = r\alpha^{-1}D(\alpha)\alpha^r = r\alpha^{r-1}D(\alpha)$. □

Le théorème 6.4. se généralise en prenant *r* complexe comme suit :

<u>Théorème 6.15.</u>

Soient $\alpha \in 1 + X\mathbb{C}[[X]]$ et r complexe, on a : $Ln(\alpha^r) = rLn(\alpha)$.

<u>Démonstration :</u>

On a :

$Ln(\alpha^r) = Ln(Exp(r\,Ln(\alpha))) = rLn(\alpha)$ par le théorème 6.9. □

7. <u>Théorème binomial</u>

Une première application de la notion de dérivées formelles vues en partie 5 est le théorème binomial.

<u>Théorème 7.1.</u>

Pour tout rationnel r et tout complexe k, on a :

$$(1+kX)^r = 1 + rkX + \frac{r(r-1)}{2!}(kX)^2 + \ldots + \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{n!}(kX)^n + \ldots$$

La démonstration que nous proposons repose sur la formule de Taylor.

Démonstration :
Soit r un nombre rationnel et k un complexe non nul.

1- Montrons par récurrence sur n que $D^n\left((1+kX)^r\right)=r(r-1)...(r-n+1)k^n(1+kX)^{r-n}$.

- D'après le théorème 5.5., puisque $S(1+kX)=1$, $D\left((1+kX)^r\right)=r(1+kX)^{r-1}D(1+kX)=rk(1+kX)^{r-1}$.

Ceci démontre la propriété au rang n=1 .

- Soit $n\geq 1$,supposons que $D^n\left((1+kX)^r\right)=r(r-1)...(r-n+1)k^n(1+kX)^{r-n}$. On a alors :

$$\begin{aligned}D^{n+1}\left((1+kX)^r\right)&=D\left(r(r-1)...(r-n+1)k^n(1+kX)^{r-n}\right)\\&=r(r-1)...(r-n+1)k^nD\left((1+kX)^{r-n}\right).\end{aligned}$$

En appliquant le théorème 5.5. en remplaçant r par r-n, on obtient :

$$\begin{aligned}D^{n+1}\left((1+kX)^r\right)&=r(r-1)...(r-n+1)k^n(r-n)(1+kX)^{r-n-1}D(1+kX)\\&=r(r-1)...(r-n+1)(r-n)k^{n+1}(1+kX)^{r-n-1}.\end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc le résultat souhaité.

2- $(1+kX)^{r-n}$ appartient à $1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$. Ainsi, on a : $S\left((1+kX)^{r-n}\right)=1$.

Ceci nous permet d'écrire : $S\left(D^n\left((1+kX)^r\right)\right)=r(r-1)...(r-n+1)k^n$.

Appliquons maintenant la formule de Taylor pour les séries formelles :

$$\begin{aligned}(1+kX)^r&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S\left(D^n\left((1+kX)^r\right)\right)X^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}r(r-1)...(r-n+1)(kX)^n .\end{aligned}$$ □

Notation

Pour n entier strictement positif et r complexe, notons $\begin{pmatrix}r\\n\end{pmatrix}$ le nombre complexe égal à

$\begin{pmatrix}r\\n\end{pmatrix}=\dfrac{r(r-1)...(r-n+1)}{n!}$ et $\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}=1$.

Etendons un résultat bien connu sur les coefficients binomiaux :

Lemme 7.2.

Pour tout complexe r et tout entier j strictement positif, on a :

$$j\begin{pmatrix}r\\j\end{pmatrix}+(j-1)\begin{pmatrix}r\\j-1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}r\\j-1\end{pmatrix}.$$

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
j\binom{r}{j}+(j-1)\binom{r}{j-1} &= \frac{jr(r-1)\dots(r-j+1)}{j!}+\frac{(j-1)r(r-1)\dots(r-j+2)}{(j-1)!}\\
&= \frac{r(r-1)\dots(r-j+1)+(j-1)r(r-1)\dots(r-j+2)}{(j-1)!}\\
&= \frac{r(r-1)\dots(r-j+2)(r-j+1+j-1)}{(j-1)!}\\
&= \frac{r(r-1)\dots(r-j+2)r}{(j-1)!}\\
&= r\binom{r}{j-1}.
\end{aligned}
$$

□

Grâce au logarithme formel, on peut montrer le théorème suivant :

<u>Théorème 7.3.</u>

Soient $r \in \mathbb{C}$ et $\beta \in X\mathbb{C}[\![X]\!]$ ***. Alors*** $(1+\beta)^r = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{r}{j}\beta^j$***.***

<u>Démonstration :</u>

Notons $\gamma = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{r}{j}\beta^j$.

On a alors $D(\gamma)=D(\beta)\sum_{j=1}^{\infty} j\binom{r}{j}\beta^{j-1}$, d'où :

$$
\begin{aligned}
(1+\beta)D(\gamma) &= D(\beta)\sum_{j=1}^{\infty} j\binom{r}{j}\beta^{j-1}+D(\beta)\sum_{j=1}^{\infty} j\binom{r}{j}\beta^{j}\\
&= D(\beta)\sum_{j=1}^{\infty} j\binom{r}{j}\beta^{j-1}+D(\beta)\sum_{j=2}^{\infty}(j-1)\binom{r}{j-1}\beta^{j-1}\\
&= D(\beta)\sum_{j=2}^{\infty}\left(j\binom{r}{j}+(j-1)\binom{r}{j-1}\right)\beta^{j-1}+rD(\beta)\\
&= D(\beta)\sum_{j=2}^{\infty} r\binom{r}{j-1}\beta^{j-1}+rD(\beta) \quad \text{(d'après le lemme précédent)}\\
&= rD(\beta)\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\binom{r}{j}\beta^{j}\right)\\
&= rD(\beta)\gamma.
\end{aligned}
$$

En multipliant l'égalité par $\gamma^{-1}(1+\beta)^{-1}$, on a : $\gamma^{-1}D(\gamma)=r(1+\beta)^{-1}D(\beta)=r(1+\beta)^{-1}D(1+\beta)$.

De plus, $\gamma^{-1}D(\gamma)=D(Ln(\gamma))$ et $r(1+\beta)^{-1}D(1+\beta)=D(rLn(1+\beta))=D\left(Ln\left((1+\beta)^r\right)\right)$.

On a donc : $D(Ln(\gamma))=D\left(Ln\left((1+\beta)^r\right)\right)$. Comme $Ln(\gamma)$ et $Ln\left((1+\beta)^r\right)$ sont dans $X\mathbb{C}[\![X]\!]$, on en déduit que $Ln(\gamma)=Ln\left((1+\beta)^r\right)$. Enfin, d'après le théorème 6.5., on en déduit que $\gamma=(1+\beta)^r$.

□

8. Application à la résolution d'équations

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux puissances et aux racines n-ième de séries formelles. Dans un deuxième temps, nous considèrerons de premières équations faisant intervenir ces notions de puissances et de racines. Enfin, nous finirons avec un théorème des fonctions implicites formel.

a) Racines n-ième

Théorème 8.1.

Soient $\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in 1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$ ***et*** $n \in \mathbb{N}^*$***. Alors :*** $\exists\, ! \beta = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n \in 1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$ ***,*** $\beta^n = \alpha$***.***

On notera dans la suite $\beta = \alpha^{\frac{1}{n}}$***.***

La démonstration de ce théorème nécessite le lemme suivant :

Lemme 8.2.

Soit $\beta = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n \in 1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$ *. Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta^n = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_{n,k} X^k \in 1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$ *, où* $c_{n,1} = n b_1$ *et pour tout* $k \geq 2$, $c_{n,k} = n\, b_k + f_{n,k}(b_1,\dots,b_{k-1})$ *où* $f_{n,k}$ *est une fonction polynôme à k-1 variables.*

Démonstration du lemme :

Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

L'initialisation est évidente : $\beta = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n \in 1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$, $c_{1,1} = b_1 = 1 \times b_1$ *et* $c_{1,k} = 1 \times b_k + 0$ on prend pour $f_{1,k}$ la fonction polynôme nulle.

Soit n un entier naturel non nul, supposons que la propriété soit vraie au rang n.

La série formelle $\beta^{n+1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_{n+1,k} X^k$ est dans $1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$ car $c_{n+1,0} = \left(\beta^{n+1}\right)_0 = \left(\beta^n \beta\right)_0 = c_{n,0} b_0 = 1$ puisque les séries formelles β et β^n sont dans $1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$ par hypothèse de récurrence.

De plus, on a $c_{n+1,1} = \sum_{j=0}^{1} c_{n,j} b_{1-j} = c_{n,0} b_1 + c_{n,1} b_0 = b_1 + c_{n,1} = b_1 + n b_1 = (n+1) b_1$ par hypothèse de récurrence.

On a aussi , pour $k \geq 2$, $c_{n+1,k} = \left(\beta^{n+1}\right)_k = \left(\beta^n \beta\right)_k = \sum_{j=0}^{k} c_{n,j} b_{k-j} = c_{n,0} b_k + c_{n,k} b_0 + \sum_{j=1}^{k-1} c_{n,j} b_{k-j}$. Or, b_0 et $c_{n,0}$ sont égaux à 1 car β et β^n sont dans $1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$. On a donc :

$$c_{n+1,k} = b_k + c_{n,k} + \sum_{j=1}^{k-1} c_{n,j} b_{k-j} = b_k + n b_k + f_{n,k}(b_1,\dots,b_{k-1}) + \sum_{j=1}^{k-1}\left(n b_j + f_{n,j}(b_1,\dots,b_{j-1})\right) b_{k-j} \ .$$

En définissant la fonction polynôme

$f_{n+1,k}$ par $f_{n+1,k}\left(x_1,...,x_{k-1}\right)=f_{n,k}\left(x_1,...x_{k-1}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}\left(nb_j+f_{n,j}(b_1,...,b_{j-1})\right)x_{k-j}$, on obtient

$c_{n+1,k}=(n+1)b_k+f_{n+1,k}\left(b_1,...,b_{k-1}\right)$.Ceci finit de démontrer la propriété au rang n+1. □

Démonstration du théorème 8.1. :

D'après le lemme précédent, si $\beta=\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n X^n\in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$ vérifie $\beta^n=\alpha$, on a $\begin{cases} nb_1=a_1 \, . \\ nb_2+f_{2,n}\left(b_1\right)=a_2 \, . \\ ... \\ nb_k+f_{n,k}\left(b_1,...,b_{k-1}\right)=a_k \, . \end{cases}$

Comme $n\neq 0$, ce système triangulaire a une unique solution. □

Corollaire 8.3.

Si m et n sont deux entiers naturels et n non nul, à chaque $\alpha\in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$, on peut associer un unique $\beta\in 1+X\mathbb{C}[\![X]\!]$ tel que $\alpha^m=\beta^n$, c'est-à-dire $\beta=\alpha^{m/n}$.

Démonstration :

Ce théorème découle immédiatement du théorème 8.1. en remplaçant α par α^m. □

Théorème 8.4.

Soit n un entier naturel non nul et α et β dans $\mathbb{R}[\![X]\!]$, c'est -à-dire que α et β sont dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ et sont à coefficients réels. Alors :

1. ***Si n est impair, $\left(\alpha^n=\beta^n\right)\Rightarrow\left(\alpha=\beta\right)$.***
2. ***Si n est pair, $\left(\alpha^n=\beta^n\right)\Rightarrow\left(\alpha=\beta \text{ ou } \alpha=-\beta\right)$.***

Démonstration :

Supposons que $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}[\![X]\!]^2$ sont telles que $\alpha^n=\beta^n$.

Si $\alpha=0$, on a $\alpha^n=0$ et donc $\beta^n=0$, ce qui entraîne $\beta=0$. On a alors $\alpha=\beta$. Le même raisonnement s'applique au cas $\beta=0$.

Supposons à présent que α et β sont différents de 0.

$\alpha^n=\beta^n$ équivaut à α est racine dans $\mathbb{R}[\![X]\!]$ du polynôme $X^n-\beta^n$.

En effet, $\alpha^n=\beta^n \Leftrightarrow f_\alpha(X^n-\beta^n)=0$

$\Leftrightarrow \alpha$ est racine de $X^n-\beta^n$

Montrons que ce polynôme a n racines distinctes $\omega^i\beta$ où i est un entier compris entre *0* et n-1 et $\omega=\exp\left(2i\pi/n\right)$.

On vérifie que ces éléments de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ sont bien des racines du polynôme. Tout d'abord, ces racines sont distinctes. Si $\omega^i\beta=\omega^j\beta$ avec $(i\,;j)\in[\![0\,;n-1]\!]^2$, comme $\beta\neq 0$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $b_n\neq 0$, on a alors $\omega^i b_n = \omega^j b_n$. Ceci donne $\omega^{i-j} = 1$ avec $-n+1 \leq i-j \leq n-1$ ce qui n'est vrai que pour $i = j$. Ainsi le polynôme $\prod_{j=0}^{n-1}\left(X-\omega^j\beta\right)$ divise le polynôme $X^n - \beta^n$. Il existe donc un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ tel que $X^n - \beta^n = Q\prod_{j=0}^{n-1}\left(X-\omega^j\beta\right)$. Par égalité des degrés, on a : deg(Q)=0. Donc, Q est constant. Par égalité des coefficients dominants de $X^n - \beta^n$ et $Q\prod_{j=0}^{n-1}\left(X-\omega^j\beta\right)$, on en déduit que le coefficient dominant de Q vaut 1. Ainsi, Q est le polynôme constant 1 et on a : $X^n - \beta^n = \prod_{j=0}^{n-1}\left(X-\omega^j\beta\right)$.

On a donc $\alpha^n - \beta^n = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\alpha-\omega^j\beta\right) = 0$. Par ailleurs si ω^j n'est pas réel, comme α et β sont des suites réelles non nulles, on a $\alpha - \omega^j\beta \neq 0$.

- Si n est impair ω^j n'est réel que pour $j = 0$.

Par intégrité de $\mathbb{C}[\![X]\!]$, $\begin{cases}\alpha^n - \beta^n = 0 \\ \forall i \in [\![1;n-1]\!], \alpha - \omega^i\beta \neq 0\end{cases}$ entraîne $\alpha - \beta = 0$.

- Si n est pair, ω^j est réel si et seulement si $j = 0$ ou $j = \frac{n}{2}$. On obtient alors $\alpha = \beta$ ou $\alpha = -\beta$. □

b) Résolution des équations du second degré

Soient $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ et $C = \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i$ deux séries formelles. Cherchons à résoudre dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ l'équation $Y^2 + BY + C = 0$.

En mettant le trinôme sous forme canonique, on obtient $Y^2 + BY + C = \left(Y + \frac{B}{2}\right)^2 + \frac{4C - B^2}{4}$.

L'équation initiale équivaut à $\left(Y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{B^2 - 4C}{4}$.

- Si $b_0^2 - 4c_0 \neq 0$, $b_0^2 - 4c_0$ s'écrit $b_0^2 - 4c_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ et l' équation équivaut à
  $\left(Y + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{r_0}\, e^{i\frac{\theta_0}{2}}\right)^2 \times \frac{B^2 - 4C}{b_0^2 - 4c_0}$.

Cette écriture a été introduite de sorte que : $S\left(\frac{B^2 - 4C}{b_0^2 - 4c_0}\right) = 1$.

D'après le théorème 8.1., il existe donc une unique série formelle $D \in 1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$ telle que $D^2 = \frac{B^2 - 4C}{b_0^2 - 4c_0}$. On note désormais $D = \left(\frac{B^2 - 4C}{b_0^2 - 4c_0}\right)^{\frac{1}{2}}$.

On a alors :

$$Y^2+BY+C=0 \Leftrightarrow \left(Y+\frac{B}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\left(b_0{}^2-4c_0\right)^{\frac{1}{2}}D\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(Y+\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\left(b_0{}^2-4c_0\right)^{\frac{1}{2}}D\right)\left(Y+\frac{B}{2}-\frac{1}{2}\left(b_0{}^2-4c_0\right)^{\frac{1}{2}}D\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(Y+\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\left(b_0{}^2-4c_0\right)^{\frac{1}{2}}D\right)=0 \text{ ou } \left(Y+\frac{B}{2}-\frac{1}{2}\left(b_0{}^2-4c_0\right)^{\frac{1}{2}}D\right)=0$$

(par intégrité de $\mathbb{C}[\![X]\!]$).

Dans le cas $b_0{}^2-4c_0 \neq 0$, l'équation $Y^2+BY+C=0$ a deux solutions dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$, les séries formelles Y_1 et Y_2 définies par :

$$Y_1=-\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\left(b_0{}^2-4c_0\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{B^2-4C}{b_0{}^2-4c_0}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } Y_2=-\frac{B}{2}-\frac{1}{2}\left(b_0{}^2-4c_0\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{B^2-4C}{b_0{}^2-4c_0}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Dans le cas où $b_0{}^2-4c_0=0$, l'équation n'a pas toujours de solution.

En effet si $Y=\sum_{i=0}^{\infty} y_i X^i$ est solution de l'équation $Y^2+BY+C=0$, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{i=0}^{n} y_i y_{n-i}+\sum_{i=0}^{n} b_{n-i} y_i + c_n = 0.$$

Pour n=0, on obtient $y_0{}^2+b_0y_0+c_0=0$.

Cette équation a une unique solution $y_0=-\frac{b_0}{2}$, car son discriminant est $\Delta=b_0{}^2-4c_0=0$.

Pour $n=1$, on obtient $2y_0y_1+b_1y_0+b_0y_1+c_1=0$, c'est-à-dire, comme $y_0=-\frac{b_0}{2}$, $c_1=\frac{b_1b_0}{2}$.

Donc, si $c_1\neq\frac{b_1b_0}{2}$, l'équation $Y^2+BY+C=0$ n'a pas de solution.

Par exemple, l'équation $Y^2=X$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$.

Remarque :

Cette dernière équation suggère d'introduire $\mathbb{C}[\![X^{1/2}]\!]$ et d'y résoudre les équations pour lesquelles $b_0{}^2-4c_0=0$.

c) Théorème du point fixe et théorème des fonctions implicite

Nous allons à présent voir un théorème du point fixe dans le cadre des séries formelles et pour cela nous avons besoin de définir ce qu'est une application contractante de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$.

Définition 8.5.
Une application ϕ de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ est dite contractante lorsque :
$\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{C}[\![X]\!]^2, val\left(\phi(\alpha)-\phi(\beta)\right)\geq val(\alpha-\beta)+1.$

Comme application de ce théorème, nous allons voir l'analogue du critère de Cauchy dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$, ce qui nous permettra de démontrer le théorème du point fixe des séries formelles.

***Théorème 8.6* : critère de Cauchy formel**
Dans $\left(\mathbb{C}[\![X]\!];d\right)$, une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(\alpha_{k+1}-\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Rappelons que ce théorème serait faux si l'on remplaçait $\mathbb{C}[\![X]\!]$ par $\mathbb{C}$ et d par la valeur absolue : il suffit par exemple de considérer la série harmonique.
Nous démontrerons ce résultat dans le contexte annoncé, même s'il est vrai plus généralement lorsque ($\mathbb{C}[\![X]\!]$, d) est remplacé par n'importe quel espace ultramétrique. Cette démonstration est très proche de celle de la complétude de ($\mathbb{C}[\![X]\!]$, d) .

Démonstration :

- Si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha\in\mathbb{C}[\![X]\!]$, alors $(\alpha_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers α, d'où la convergence de $(\alpha_{k+1}-\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers $\alpha-\alpha=0$.
- Supposons réciproquement que $(\alpha_{k+1}-\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $val(\alpha_{k+1}-\alpha_k)$ tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$.

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N},\exists K_n\in\mathbb{N},\forall k\geq K_n, val\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right)>n$.
Ainsi pour $n\in\mathbb{N}$, il existe $K_n\in\mathbb{N}$ tel que tous les α_k pour $k\geq K_n$ ont le même terme d'indice n, que l'on peut noter a_n.
Posons $\alpha=\sum_{k\geq0}a_kX^k$. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\geq\max(K_0,K_1,...,K_n)$, α_k et α ont les mêmes termes d'indice 0, 1, 2, …n. On a donc $val(\alpha-\alpha_k)>n$.
On obtient : $\forall n\in\mathbb{N},\exists K'_n=Max(K_1,K_2,...,K_n),\forall k\geq K'_n, val(\alpha_k-\alpha)>n.$ On a donc $\lim_{k\to+\infty}val(\alpha_k-\alpha)=+\infty$.
Comme $d(\alpha_k-\alpha)=2^{-val(\alpha_k-\alpha)}$, $\lim_{k\to+\infty}d(\alpha_k-\alpha)=0$.
Ainsi $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α. □

Remarque :
Ce critère de Cauchy formel provient du critère de Cauchy usuel sur $\left(\mathbb{C}[\![X]\!],d\right)$.

En effet, soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}[\![X]\!]^{\mathbb{N}}$ vérifiant le critère de Cauchy usuel, c'est-à-dire :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$ où $p \geq N, d(\alpha_{p+q}, \alpha_p) \leq \varepsilon$.

Comme d est à valeurs dans $[0;1]$, ceci équivaut à

$\forall \varepsilon \in]0;1[, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$ où $p \geq N, d(\alpha_{p+q}, \alpha_p) \leq \varepsilon$.

Ceci équivaut encore à :

$$\forall \varepsilon \in]0;1[, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ où } p \geq N, val(\alpha_{p+q} - \alpha_p) \geq -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow \forall c > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ où } p \geq N, val(\alpha_{p+q} - \alpha_p) \geq c > 0$$

$$\Leftrightarrow \forall c > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N \ , val(\alpha_{p+1} - \alpha_p) \geq c.$$

On justifie la dernière équivalence, en prenant $q = 1$ pour démontrer l'implication $\Rightarrow$, et pour la réciproque, on a :

$$\forall p \geq N, \forall q \in \mathbb{N}, val(\alpha_{p+q} - \alpha_p) = val\left(\sum_{k=0}^{q-1} \alpha_{p+k+1} - \alpha_{p+k}\right) \geq \max_{0\leq k\leq q-1}\left(val(\alpha_{p+k+1} - \alpha_{p+k})\right) \geq c.$$

Ceci est encore équivalent à $\lim_{p\to+\infty} val(\alpha_{p+1} - \alpha_p) = +\infty$ ou encore à $\lim_{p\to+\infty} d(\alpha_{p+1}; \alpha_p) = 0$.

Ceci est le critère de Cauchy formel énoncé précédemment.

<u>Théorème 8.7</u> : théorème du point fixe

Si une application ϕ de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ est contractante, alors elle admet un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{C}[\![X]\!]$, ie $\exists! \alpha \in \mathbb{C}[\![X]\!]$, $\phi(\alpha) = \alpha$.

De plus, toute suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\alpha_0 \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ et $\alpha_{k+1} = \phi(\alpha_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ converge vers α.

<u>Démonstration :</u>

- Démontrons d'abord l'unicité du point fixe.

Supposons qu'il existe deux points fixes α et β. On a alors $val(\alpha - \beta) = val(\phi(\alpha) - \phi(\beta)) \geq val(\alpha - \beta) + 1$ car ϕ est contractante. Ceci n'est possible que si $val(\alpha - \beta) = +\infty$, c'est-à-dire si $\alpha = \beta$.

- Soit $\alpha_0 \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ et soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $\alpha_{k+1} = \phi(\alpha_k)$.

Montrons que cette suite converge et que sa limite est un point fixe.

Pour tout $k \geq 1$, $val(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \geq val(\alpha_k - \alpha_{k-1}) + 1$. Par itérations successives, on obtient $val(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \geq val(\alpha_1 - \alpha_0) + k$. Ainsi $\lim_{k\to+\infty} val(\alpha_{k+1} - \alpha_k) = +\infty$, c'est-à-dire que $(\alpha_{k+1} - \alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la distance d.

Par le critère de Cauchy pour les séries formelles, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Appelons α sa limite.

On a alors $val\left(\alpha_{n+1}-\phi(\alpha)\right)\geq val\left(\alpha_n-\alpha\right)+1$, donc $\lim_{n\to+\infty} val\left(\alpha_n-\phi(\alpha)\right)=+\infty$, ceci démontre que $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\phi(\alpha)$ pour la distance d , mais comme elle converge aussi vers α , par unicité de la limite, on obtient $\phi(\alpha)=\alpha$. □

Nous allons voir maintenant un analogue formel du théorème des fonctions implicites.

<u>Théorème des fonctions implicites 8.8.</u>

Soient pour $0\leq i\leq d$ ***les séries formelles*** $\alpha_i=\sum_{n\geq 0} a_{i,n}X^n\in\mathbb{C}[\![X]\!]$.

Notons $\varphi(X;Y)=\sum_{i=0}^{d}\alpha_i(X)Y^i\in\mathbb{C}[\![X]\!][Y]$. ***Soit*** y_0 ***une racine simple du polynôme*** $\varphi(0;Y)=\sum_{i=0}^{d}\alpha_i(0)Y^i\in\mathbb{C}[Y]$.

Alors, il existe une unique solution $\alpha\in\mathbb{C}[\![X]\!]$ ***de l'équation*** $\varphi(X;\alpha)=0$ ***telle que*** $\alpha(0)=y_0$.

<u>Démonstration :</u>

L'équation $\varphi(X;\alpha)=0$ s'écrit $\sum_{i=0}^{d}\alpha_i(X)\alpha^i=0$.

- Commençons par montrer le cas particulier où $y_0=0$.

Par hypothèse, $\varphi(0;y_0)=\sum_{i=0}^{d}\alpha_i(0)y_0^{\,i}=0$. Comme $y_0=0$, ceci équivaut à $S(\alpha_0)=0$.

Comme $y_0=0$ est racine simple de $\varphi(0;Y)$, $y_0=0$ n'est pas racine du polynôme dérivé de $\varphi(0;Y)$ qui est $\sum_{i=1}^{d}i\alpha_i(0)Y^{i-1}$. On a donc $\sum_{i=1}^{d}i\alpha_i(0)\,y_0^{\,i-1}=S(\alpha_1)\neq 0$.

Ainsi la série formelle α_1 est inversible.

Par ailleurs, on cherche α tel que $\alpha(0)=0$. On peut donc poser $\alpha=X\beta$ et chercher $\beta\in\mathbb{C}[\![X]\!]$ tel que $\sum_{i=0}^{d}\alpha_i\beta^iX^i=0$.

Remarquons qu'à partir de maintenant toutes les séries formelles qui apparaissent dans la démonstration sont construites à partir de l'indéterminée X.

D'où $\alpha_1\beta X=-\alpha_0-\alpha_2\beta^2X^2-\ldots-\alpha_d\beta^dX^d$. Comme $S(\alpha_0)=0$, on peut écrire $\alpha_0=X\widetilde{\alpha_0}$.
Comme α_1 est inversible, ceci est équivalent à

$\beta=-\widetilde{\alpha_0}\alpha_1^{-1}-\alpha_2\alpha_1^{-1}X^1\beta^2-\ldots-\alpha_d\alpha_1^{-1}X^{d-1}\beta^d=B_0+\sum_{i=2}^{d}XB_i\beta^i$ avec $B_i=-\alpha_i\alpha_1^{-1}X^{i-2}$ pour tout $2\leq i\leq d$ et $B_0=-\widetilde{\alpha_0}\alpha_1^{-1}$.

Posons ϕ l'application de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ définie par $\phi(\beta)=B_0+\sum_{i=2}^{d}XB_i\beta^i$.

Nous voulons démontrer que ϕ admet un unique point fixe, montrons pour cela qu'elle est contractante.
Soient $(\beta_1;\beta_2)\in\mathbb{C}[\![X]\!]^2$. $\phi(\beta_1)-\phi(\beta_2)=X\left(B_2\left(\beta_1^2-\beta_2^2\right)+...+B_d\left(\beta_1^d-\beta_2^d\right)\right)=X\left(\beta_1-\beta_2\right)\ \psi\left(\beta_1;\beta_2\right)$,
pour une certaine application $\psi:\mathbb{C}[\![X]\!]^2\to\mathbb{C}[\![X]\!]$.
$\phi(\beta_1)-\phi(\beta_2)$ est multiple de $X\left(\beta_1-\beta_2\right)$, on a donc :
$val\left(\phi(\beta_1)-\phi(\beta_2)\right)\geq val\left(X\left(\beta_1-\beta_2\right)\right)=val\left(\beta_1-\beta_2\right)+1$. Ceci démontre que ϕ est contractante et par le théorème du point fixe, on en déduit l'existence et l'unicité de β tel que $\beta=\phi(\beta)$. Ceci entraîne l'existence et l'unicité de $\alpha\in\mathbb{C}[\![X]\!]$, tel que $\varphi\left(X;\alpha\right)=0$ et $\alpha(0)=0$, car $\alpha=X\beta$.

- Dans le cas général, on pose $Y=y_o+Z$.

$\varphi(X;Y)=\sum_{i=0}^{d}\alpha_i(X)(y_o+Z)^i=\sum_{i=0}^{d}C_i(X)Z^i=\psi(X;Z)$ où $C_i=\sum_{j=i}^{d}\binom{j}{i}y_0^{\,j-i}\alpha_j$.
On cherche α sous la forme $y_0+\beta$, avec $\beta(0)=0$ et $\psi(X;\beta)=0$.
0 est racine simple de $\psi\left(0\,;Z\right)$ car y_0 est racine simple de $\varphi(0;Y)$. On est ainsi ramené au cas particulier précédent. □

9. Equations différentielles

Regardons tout d'abord ce qui se passe au niveau des équations différentielles linéaires d'ordre d. On dispose d'une proposition à la manière d'un théorème de Cauchy :

Proposition 9.1
Soient A_0, A_1, …A_d des éléments de $\mathbb{C}[\![X]\!]$. On suppose que $val(A_d)=0$.
Soient $\left(c_0,c_1,...,c_{d-1}\right)\in\mathbb{C}^d$.
L'équation différentielle $A_dD^d(\alpha)+...+A_0\alpha=0$ admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{C}[\![X]\!]$ telle que $S\left(D^i(\alpha)\right)=c_i$, pour tout $i\in[\![0,d-1]\!]$.

Démonstration :
Comme $val\left(A_d\right)=0$, A_d est inversible. On peut donc écrire l'équation différentielle sous la forme
$D^d(\alpha)=\sum_{i=0}^{d-1}B_iD^i(\alpha)$ où $B_i=-A_iA_d^{-1}=\sum_{n\geq0}b_{i,n}X^n$.
Notons $\alpha=\sum_{n\geq0}a_nX^n$. Le terme de X^j dans B_i est $b_{i,j}$; celui de X^k dans $D^i(\alpha)$ est $\frac{(k+i)!}{k!}a_{k+i}$.
Par identification des termes en X^n dans l'équation différentielle, on obtient alors :
$\frac{(n+d)!}{n!}a_{n+d}=\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{j+k=n}b_{i,j}\frac{(k+i)!}{k!}a_{k+i}$.

On a donc $a_{n+d} = \dfrac{n!}{(n+d)!}\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{j+k=n} b_{i,j}\dfrac{(k+i)!}{k!}a_{k+i}$.

Le membre de droite de cette égalité ne comportant que des termes a_m avec $m \le n+d-1$, il s'agit d'une relation de récurrence qui permet de définir tous les a_i de manière unique. En effet, par hypothèse, on a $S\left(D^i(\alpha)\right) = c_i$, c'est-à-dire $a_i = \dfrac{c_i}{i!}$ pour $i \in [\![0\,; d-1]\!]$, puis la relation de récurrence donne les a_i pour $i > d-1$.

Ainsi, comme les a_i sont déterminés de manière unique, α est déterminée de manière unique, ce qui achève de prouver la proposition. □

Etudions, à présent, le cas des équations différentielles d'ordre 1.
Nous allons dans un premier temps, introduire la notion de primitive de séries formelles, qui sera utile pour la résolution de ces équations différentielles.

<u>Proposition 9.2.</u>

La restriction de l'application dérivation D de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ qui à $\sum_{k\ge 0} a_k X^k$ associe $\sum_{k\ge 1} k a_k X^{k-1}$ à l'ensemble $X\mathbb{C}[\![X]\!]$, est inversible d'inverse I.

I est l'application de $\mathbb{C}[\![X]\!]$ dans $X\mathbb{C}[\![X]\!]$ qui à $\sum_{k\ge 0} a_k X^k$ associe $\sum_{k\ge 0} \dfrac{a_k}{k+1} X^{k+1}$.

<u>Démonstration :</u>

- I est bien définie car $\sum_{k\ge 0} \dfrac{a_k}{k+1} X^{k+1} \in X\mathbb{C}[\![X]\!]$.
- Soit $\alpha = \sum_{k\ge 0} a_k X^k \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ alors I(α)=$\sum_{k\ge 0} \dfrac{a_k}{k+1} X^{k+1}$.

  D'où : $D\left(I(\alpha)\right) = D\left(\sum_{k\ge 0} \dfrac{a_k}{k+1} X^{k+1}\right) = \sum_{k\ge 0} \dfrac{k+1}{k+1} a_k X^k = \alpha$.

  Ainsi $D \circ I = id_{\mathbb{C}[\![X]\!]}$.
- Soit $\alpha = \sum_{k\ge 1} a_k X^k \in X\mathbb{C}[\![X]\!]$ alors D(α)=$\sum_{k\ge 1} k\, a_k X^{k-1}$.

  D'où : $I\left(D(\alpha)\right) = I\left(\sum_{k\ge 1} k\, a_k X^{k-1}\right) = \sum_{k\ge 1} \dfrac{k}{k} a_k X^k = \alpha$.

  Ainsi $I \circ D = id_{X\mathbb{C}[\![X]\!]}$. □

Résolvons les équations différentielles de la forme D (Y) + A Y = B où $(A;B) \in \mathbb{C}[\![X]\!]^2$.

<u>Remarque :</u>
Si on souhaite résoudre une équation différentielle de la forme C D (Y) + A Y = B où $(A;B) \in \mathbb{C}[\![X]\!]^2$ et C inversible ie C tel que $S(C) \ne 0$, en multipliant l'équation par C^{-1}, on se ramène à une équation différentielle de la forme précédente.

Théorème 9.3

Les solutions de l'équation différentielle D (Y) + A Y = B où $(A;B)\in\mathbb{C}[\![X]\!]^2$ ***sont les séries formelles*** $c\,Exp(-I(A))+I\big(B\,Exp(I(A))\big)Exp(-I(A))$ où $c\in\mathbb{C}$.

Démonstration :

Soit Y une solution de D (Y) + A Y = B où $(A;B)\in\mathbb{C}[\![X]\!]^2$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} D\big(Exp(I(A))Y\big) &= D(I(A))\,Exp(I(A))Y+Exp(I(A))D(Y) \\ &= Exp(I(A))\,(AY+D(Y)) \\ &= B\,Exp(I(A)) \end{aligned}$$

$D\Big(Exp(I(A))Y-S\big(Exp(I(A))Y\big)\Big)=B\,Exp(I(A))$.

Comme $Exp(I(A))Y-S\big(Exp(I(A))Y\big)\in X\mathbb{C}[\![X]\!]$ et en appliquant I à l'équation, on a :

$Exp(I(A))Y=S\big(Exp(I(A))Y\big)+I\big(B\,Exp(I(A))\big)$.

Or, $S\big(Exp(I(A))Y\big)=S(Y)$ et $Exp(I(A))$ est inversible d'inverse $Exp(-I(A))$.

Ainsi, $Y=S(Y)\,Exp(-I(A))+I\big(B\,Exp(I(A))\big)Exp(-I(A))$.

Ainsi, Y est de la forme $c\,Exp(-I(A))+I\big(B\,Exp(I(A))\big)Exp(-I(A))$ où $c\in\mathbb{C}$.

Par ailleurs, $Y=c\,Exp(-I(A))+I\big(B\,Exp(I(A))\big)Exp(-I(A))$ où $c\in\mathbb{C}$ est solution de D (Y) + A Y = B .

En effet, $D(Y)+AY=-c\,AExp(-I(A))+B\,Exp(I(A))\,Exp(-I(A))-I\big(B\,Exp(I(A))\big)\,AExp(-I(A))+AY$

$$\begin{aligned} &= B-AExp(-I(A))\Big(I\big(B\,Exp(I(A))\big)+c\Big)+AExp(-I(A))\Big(I\big(B\,Exp(I(A))\big)+c\Big) \\ &= B \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du théorème. □

10. Récurrence linéaire et application à la suite de Fibonacci

Souvent les récurrences linéaires ne peuvent pas se résoudre en restant sur l'anneau $\mathbb{C}[\![X]\!]$ et nécessitent de se placer sur son corps des fractions $\mathbb{C}((X))$ que nous introduisons ici.

Définition10.1.

L'anneau $\mathbb{C}[\![X]\!]$ *étant intègre, on peut construire son corps des fractions que l'on notera* $\mathbb{C}((X))$ *et qui est appelé, corps des séries de Laurent formelles en X, à coefficients dans* $\mathbb{C}$.

On notera les éléments de $\mathbb{C}((X))$ *:* $\dfrac{\alpha}{\beta}$ où $(\alpha;\beta)\in\mathbb{C}[\![X]\!]^2$ et $\beta\neq 0$.

Donnons nous $\left(a_0, a_1, ..., a_{q-1}\right) \in \mathbb{C}^q$ et intéressons nous à la relation de récurrence suivante :
$\forall n \geq 0, a_{n+q} = b_0 a_n + ... + b_{q-1} a_{n+q-1}$ où $\left(b_0, b_1, ..., b_{q-1}\right) \in \mathbb{C}^q$ et $b_0 \neq 0$.

Cherchons à déterminer les a_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour cela, multiplions tout d'abord les deux membres de la relation de récurrence par X^{n+q} et sommons pour $n \in \mathbb{N}$. On obtient :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+q} X^{n+q} = b_0 \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^{n+q} + b_1 \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} X^{n+q} + ... + b_{q-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+q-1} X^{n+q}.$$

On obtient alors, en notant $F = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$:

$$F - \sum_{n=0}^{q-1} a_n X^n = b_0 X^q F + b_1 X^{q-1}\left(F - a_0\right) + ... + b_{q-1} X \left(F - \sum_{n=0}^{q-2} a_n X^n\right).$$

Notons $R = 1 - \sum_{i=0}^{q-1} b_i X^{q-i}$. R est un polynôme de degré q, défini par les coefficients $b_0, b_1, ..., b_{q-1}$ de la relation de récurrence.

Notons encore $\forall k \in [\![0;q]\!], P_k = \sum_{n=0}^{k-1} a_n X^n$ avec la convention $P_0 = 0$.

P_k est un polynôme de degré $k-1 < q$, défini entièrement par les conditions initiales de la relation de récurrence.

Notons enfin $Q = P_q - \sum_{i=0}^{q-1} b_i X^{q-i} P_i$, c'est un polynôme de degré strictement inférieur à q.

On peut donc réécrire la relation précédente au moyen des nouvelles notations, comme ceci :

$$F - P_q = \sum_{i=0}^{q-1} b_i X^{q-i}\left(F - P_i\right) \text{ ou encore } F\left(1 - \sum_{i=0}^{q-1} b_i X^{q-i}\right) = P_q - \sum_{i=0}^{q-1} b_i X^{q-i} P_i.$$

D'où, lorsqu'on se place dans $\mathbb{C}\left(\left(X\right)\right)$, l'égalité : $F = \dfrac{Q}{R}$.

Notons $\zeta_1, ..., \zeta_r$ les inverses des racines de R. (0 n'est pas racine de R car $R = 1 - \sum_{i=0}^{q-1} b_i X^{q-i}$, donc $S(R) = 1$). On peut donc factoriser R comme ceci :
$R = \left(1 - \zeta_1 X\right)^{m_1} ... \left(1 - \zeta_r X\right)^{m_r}$.

Comme $\deg Q < \deg R$, en décomposant $\dfrac{Q}{R}$ en éléments simples, on a : $\dfrac{Q}{R} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \dfrac{b_{i,j}}{\left(1 - \zeta_i X\right)^j}$

et par la formule du binôme de Newton généralisé, on a :

$$\frac{1}{\left(1-\zeta_i X\right)^j}=\sum_{n\geq 0}\binom{-j}{n}\left(-\zeta_i X\right)^n$$

$$=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{-j(-j-1)\ldots(-j-n+1)}{n!}\zeta_i^n X^n$$

$$=\sum_{n\geq 0}\frac{j(j+1)\ldots(j+n-1)}{n!}\zeta_i^n X^n$$

$$=\sum_{n\geq 0}\binom{n+j-1}{j-1}\zeta_i^n X^n .$$

D'où : $F=\dfrac{Q}{R}=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{n\geq 0}\binom{n+j-1}{j-1}\zeta_i^n X^n$

$$=\sum_{n\geq 0}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\binom{n+j-1}{j-1}\zeta_i^n X^n .$$

Ainsi on a : $a_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\binom{n+j-1}{j-1}\zeta_i^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Une application simple de la récurrence linéaire est celle de la suite de Fibonacci que nous allons voir, à présent.

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $\begin{cases} f_0=1 \\ f_1=1 \\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \end{cases}$.

Soit F la série formelle définie par $F=\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n X^n$. On peut écrire :

$$F=f_0+f_1X+\sum_{n\geq 2} f_nX^n=f_0+f_1X+\sum_{n\geq 0} f_{n+2}X^{n+2}$$

$$=f_0+f_1X+\left(\sum_{n\geq 0} f_{n+2}X^n\right)X^2=1+X+X^2\left(\sum_{n\geq 0}\left(f_{n+1}+f_n\right)X^n\right)$$

$$=1+X+X\sum_{n\geq 0} f_{n+1}X^{n+1}+X^2\sum_{n\geq 0} f_nX^n=1+X+X\left(F-1\right)+X^2F$$

$$=1+XF+X^2F$$

On obtient alors $\left(1-X-X^2\right)F=1$. D'où $F=(1-X-X^2)^{-1}$.

Or, on a : $1-X-X^2=\left(X-\Phi\right)\left(X-\overline{\Phi}\right)$ où $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or et $\overline{\Phi}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Par décomposition en éléments simples, on obtient :

$$(1-X-X^2)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(X-\Phi)^{-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}(X-\overline{\Phi})^{-1} .$$

On peut alors écrire :

$$F=\frac{1}{\sqrt{5}}(X-\Phi)^{-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}(X-\overline{\Phi})^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(-\frac{1}{\Phi}\right)\left(1-\frac{X}{\Phi}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{\overline{\Phi}}\right)\left(1-\frac{X}{\overline{\Phi}}\right)^{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(-\frac{1}{\Phi}\right)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\Phi^n}X^n+\left(\frac{1}{\overline{\Phi}}\right)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\overline{\Phi}^n}X^n\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\Phi^{n+1}}+\frac{1}{\overline{\Phi}^{n+1}}\right)X^n.$$

On obtient alors pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\Phi^{n+1}}+\frac{1}{\overline{\Phi}^{n+1}}\right) \text{ où } \Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \overline{\Phi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

11. Application aux nombres de Catalan

Les nombres de Catalan interviennent dans de nombreux problèmes de dénombrement. Nous en présenterons trois dans ce paragraphe.

a) Premier problème de dénombrement

On cherche le nombre q_n de façons de grouper les éléments $a_1, a_2, ... a_n$ dans le produit non associatif $a_1\times a_2\times ...\times a_n$.

Par exemple pour $n=3$, on a les produits $(a_1a_2)a_3$ et $a_1(a_2a_3)$, on a donc $q_3=2$.

Pour $n=4$, on a les produits

$a_1(a_2(a_3a_4))$, $a_1((a_2a_3)a_4)$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $((a_1a_2)a_3)a_4$ et $(a_1(a_2a_3))a_4$.

Ceci justifie que q_4 est égal à 5.

Montrons maintenant par récurrence que pour tout $n\geq 2$, $q_n=\sum_{j=1}^{n-1}q_jq_{n-j}$.

- $q_2=1=1\times 1=q_1q_1$.
- Soit $n\geq 3$, supposons que : $\forall i\in[\![2;n-1]\!]$, $q_i=\sum_{j=1}^{i-1}q_jq_{i-j}$.

Montrons alors que $q_n=\sum_{j=1}^{n-1}q_jq_{n-j}$.

q_n est le nombre de façons de grouper les éléments $a_1, a_2, ... a_n$ dans le produit $a_1a_2...a_n$

On peut commencer par écrire ce produit comme ceci :$(a_1a_2...a_j)(a_{j+1}...a_n)$.

Or, le nombre de façons de grouper les éléments $a_1, a_2, ... a_i$ dans le produit $a_1a_2...a_i$ est q_i et le nombre de façons de grouper les éléments $a_{j+1},..., a_n$ dans le produit $a_{j+1}...a_n$ est q_{n-j}. Il y a donc q_jq_{n-j} façons différentes de mettre les parenthèses dans le produit $(a_1a_2...a_j)(a_{j+1}...a_n)$.

Mais, comme j varie de 1 à $n-1$, pour séparer le produit $a_1a_2...a_n$ en deux sous- produits, on obtient $q_n=\sum_{j=1}^{n-1}q_jq_{n-j}$.

Considérons maintenant la série formelle $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} q_j X^j \in X\mathbb{C}[\![X]\!]$ et considérons la série formelle α^2.

Pour tout $n \geq 2$, le coefficient de X^n dans α^2 est $\sum_{j=1}^{n-1} q_j q_{n-j}$, c'est-à-dire q_n, comme nous l'avons vu précédemment.

On a donc : $\alpha^2 = \sum_{j=2}^{\infty} q_n X^n = \sum_{j=1}^{\infty} q_n X^n - X$, puisque $q_1 = 1$. On a alors $\alpha^2 - \alpha + X = 0$.

Utilisons maintenant les résultats du paragraphe précédent sur la résolution des équations du second degré.

Comme $(-1)^2 - 4 \times 0 \neq 0$, l'équation $\alpha^2 - \alpha + X = 0$ a deux solutions α_1 et α_2 dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$ avec $\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(1 + (1-4X)^{\frac{1}{2}}\right)$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(1 - (1-4X)^{\frac{1}{2}}\right)$.

Pour déterminer quelle est la solution à choisir parmi ces deux possibilités, regardons leur premier terme :

$S(\alpha_1) = \frac{1}{2}\left(1 + S\left((1-4X)^{1/2}\right)\right) = 1$ et $S(\alpha_2) = \frac{1}{2}\left(1 - S\left((1-4X)^{1/2}\right)\right) = 0$

car si $\alpha \in 1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$, $\alpha^{1/2} \in 1 + X\mathbb{C}[\![X]\!]$.

Or $S(\alpha) = 0$ par définition, ce qui exclut la solution potentielle α_1 .

Donc $\alpha = \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(1 - (1-4X)^{\frac{1}{2}}\right)$.

Appliquons le théorème binomial à $(1-4X)^{\frac{1}{2}}$ en vue de redévelopper en série formelle α .

On obtient : $(1-4X)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4X)^n$.

Cherchons à simplifier le coefficient a_n de X^n dans $(1-4X)^{\frac{1}{2}}$.

$$a_n = \frac{1 \times (1-2) \times \ldots \times (1-2n+2)}{2^n n!}(-4)^n = \frac{1 \times (-1) \times (-3) \times \ldots \times (-2n+3)}{2^n n!}(-4)^n$$

$$= -\frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots (2n-3)}{n!} \times 2^n = -\frac{(2n-2)!}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n-2) \times n!} \times 2^n$$

$$= -\frac{(2n-2)! \times 2^n}{2^{n-1}\left(1 \times 2 \times \ldots (n-1)\right) \times n!} = -\frac{2(2n-2)!}{(n-1)!n!} .$$

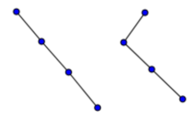
On a alors : $\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} X^n$. Ainsi, par identification, pour $n \geq 1$,

$$q_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

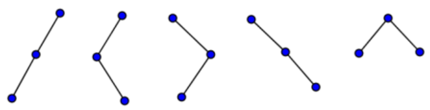
Les nombres $c_n = q_{n+1}$, où $n \in \mathbb{N}$, sont appelés nombres de Catalan.

b) <u>Décompte des arbres binaires</u>

Un arbre binaire est une structure de données qui peut se représenter sous la forme d'une hiérarchie dont chaque élément est appelé nœud et possède au plus deux « fils » au niveau inférieur, appelés généralement « gauche et droit ».
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons b_n le nombre d'arbres binaires de taille n, c'est-à-dire comportant n nœuds.
Les arbres binaires dessinés ci-contre sont deux arbres distincts.



Par convention, posons $b_0 = 1$. On a : $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5$.
Les cinq arbres binaires de taille 3 sont les arbres représentés ci-dessous.



Dans un arbre binaire de taille $n+1$, il part deux branches du premier élément, l'une de taille i, l'autre de taille $n-i$, i pouvant varier de 0 (c'est le cas lorsqu'une seule branche part du premier élément) jusqu'à n.
Se donner un arbre binaire de taille $n+1$, revient donc à se donner deux arbres binaires de tailles respectives i et $n-i$.

On a la relation de récurrence suivante : $b_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i}$.

Posons pour tout $n \geq 1$: $q_n = b_{n-1}$. On a alors :

$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} q_{i+1} q_{n-i} = \sum_{j=1}^{n} q_j q_{n-j+1}$. D'où : $q_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} q_j q_{n-j+1}$.

On retrouve la relation de récurrence de l'application précédente.

On a donc : $q_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

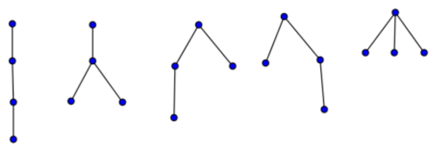
Ainsi : $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = c_n$.

Les nombres c_n sont les nombres de Catalan.

c) <u>Décompte des arbres généraux de taille n</u>

Considérons maintenant les arbres quelconques de taille *n*. Chaque nœud peut posséder un nombre quelconque de « fils ».
Notons, à présent, d_n le nombre d'arbres généraux de taille n.

On a : $d_0 = 0,\ d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ d_3 = 2,\ d_4 = 5$.
Voici par exemple les cinq arbres de taille quatre.



Se donner un arbre de taille $n+1$ pour $n \geq 1$, revient à se donner k arbres de tailles respectives $i_1, i_2, ..., i_k$ avec $i_1 + i_2 + ... + i_k = n$, k pouvant varier de 1 à n.
On a alors la relation de récurrence suivante :

$$d_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1+i_2+...i_k=n} d_{i_1} d_{i_2} ... d_{i_k} .$$

Introduisons la série formelle suivante : $D = \sum_{n\geq 0} d_n X^n$.

La relation de récurrence précédente équivaut à $D = X \sum_{k\geq 0} D^k$.

En effet, $X \sum_{k\geq 0} D^k = X \sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i_1+i_2+...i_k=n} d_{i_1} d_{i_2} ... d_{i_k} \right) X^n$.

Remarquons que la somme $\sum_{k\geq 1} \left(\sum_{i_1+i_2+...i_k=n} d_{i_1} d_{i_2} ... d_{i_k} \right)$ est une somme finie,

car il existe un nombre fini de k tel que $\sum_{i_1+i_2+...i_k=n} d_{i_1} d_{i_2} ... d_{i_k} \neq 0$ puisqu'il existe un nombre fini de k tel que $i_1 + i_2 + .. + i_k = n$ avec $i_j \neq 0,\ \forall 1 \leq j \leq k$.

Cela signifie que $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i_1+i_2+...i_k=n} d_{i_1} d_{i_2} ... d_{i_k} X^n \right)_{k\in\mathbb{N}}$ est formellement sommable.

On peut donc permuter les sommes $\sum_{k\geq 0}$ et $\sum_{n\geq 0}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } X \sum_{k\geq 0} D^k &= \sum_{n\geq 0} \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{i_1+i_2+...i_k=n} d_{i_1} d_{i_2} ... d_{i_k} \right) X^n \\ &= X \sum_{n\geq 0} d_{n+1} X^n \\ &= \sum_{n\geq 1} d_n X^n \\ &= \sum_{n\geq 0} d_n X^n \text{ car } d_0 = 0 . \end{aligned}$$

On a donc : $D = X(1-D)^{-1}$, d'où $D(1-D) = X$, ce qui équivaut encore à $D^2 - D + X = 0$.
On retrouve l'équation que l'on a résolue au début du paragraphe et qui a comme solution

$$D = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} X^n .$$

Le nombre d'arbres généraux de taille n est donc $d_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = c_{n-1}$.

Conclusion :

La théorie des séries formelles généralise très bien celle bien connue des polynômes. Elle présente aussi des applications dans de nombreux domaines très variés.

Pour des questions de goût nous avons choisi de présenter celle de la récurrence linéaire et celles des nombres de Catalan. Bien entendu, il en reste encore beaucoup d'autres qui n'en sont pas moins importantes.

A titre culturel, nous pouvons en citer ici quelques unes :

- la transformation binomiale et ses propriétés, extensions / ramifications,
- la résolution des équations différentielles du type Fuchs,
- la méthode des séries génératrices sur les multizêtas / multitangentes et les relations qui existent entre multizêtas et multitangentes,
- les séries génératrices de Bell en arithmétique ou diverses fonctions arithmétiques,

…

Références :

[1] I. NIVEN : *Formal Power Series*, The American Mathematical Monthly, Vol. 76, n°8 (Oct. 1969), pp. 871-889.

[2] J-P. RAMIS, A. WARUSFEL, A. CONNES : *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence, Niveau L2 : Cours complets avec applications et 760 exercices corrigés*, Dunod, 2007.

[3] J-P. RAMIS, A. WARUSFEL : *Cours de Mathématiques pures et appliquées – Algèbre et géométrie*, Tome 1, De Boeck, 2010.