Algèbre de mélange et algèbre de Hopf

Wenran LIU

Table des matières

Résumé

Fixons-nous un alphabet X , on va définir l'algèbre des polynômes non-commutatifs sur X et démontrer qu'elle est munie d'une structure d'algèbre de Hopf. Ensuite, d'une autre manière, on considérera le dual gradué de l'algèbre universelle enveloppante de l'algèbre de Lie libre sur X. Le but de ce mémoire est de montrer l'équivalence de ces deux constructions de l'algèbre de mélange.
Mots clés : algèbre de mélange, algèbre de Hopf, algèbre de Lie libre, polynômes non-commutatifs, algèbre universelle enveloppante, produit tensoriel.

Chapitre 1

Présentation du problème

Etant donné un ensemble d'indéterminées X et un anneau commutatif $\mathbb{K}$, on peut construire une algèbre de polynômes (commutatifs) comme on le fait classiquement. Si l'on supprime la commutativité, on obtiendra la notion de polynômes non-commutatifs, dont on parlera dans la suite. Même si l'on perd une jolie propriété, la commutativité, en modifiant un peu l'écriture, on généralisera la notion de polynômes (commutatifs). Les polynômes non-commutatif permettent de définir simplement l'algèbre de mélange. On va introduire plusieurs nouveaux opérateurs afin de la construire et de la munir d'une structure d'algèbre de Hopf. Alors, on aura une algèbre de mélange sur X , munie d'une structure de Hopf.
D'autre part, la théorie des algèbres de Lie libres donne un autre moyen de construction. En effet, l'algèbre de mélange sur X peut être définie comme le dual gradué de l'algèbre universelle enveloppante de l'algèbre de Lie libre sur X . On se demande naturellement si ces deux constructions sont équivalentes. Que signifie ici l'équivalence ? Ces questions seront le cœur du problème.

Chapitre 2

Produit tensoriel

Pour définir la notion d'algèbre de Hopf et d'algèbre de mélange, le produit tensoriel est indispensable. C'est pourquoi ce chapitre est entièrement consacré au produit tensoriel. Cet opération est entre deux espaces vectoriels ou bien entre deux algèbres ou encore entre deux applications linéaires. Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ sera un corps.

2.1 Produit tensoriel de deux espace vectoriels

2.1.1 Construction

Rappelons tout d'abord quelques propriétés des applications bilinéaires.
On se donne quelques propriétés.

Proposition 2.1.1.1 (Propriétés élémentaires des applications bilinéaires)**.**
Soient E_1 , E_2 et F trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
i) Si l'on note $\mathcal{F}(E_1 \times E_2 \,, F)$ l'espace vectoriel de toutes les applications de $E_1 \times E_2$ dans F , les applications bilinéaires de $E_1 \times E_2$ dans F forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E_1 \times E_2 \,, F)$, noté $\mathcal{B}(E_1 \times E_2 \,, F)$.
ii) Soient F et G deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{L}(F \,, G)$ l'ensemble des applications linéaires de F dans G . Soient $U \in \mathcal{L}(F \,, G)$, $S \in \mathcal{B}(E_1 \times E_2 \,, F)$. Alors $U \circ S \in \mathcal{B}(E_1 \times E_2 \,, G)$.
iii) Soient E_1' et E_2' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soient $U_1 \in \mathcal{L}(E_1' \,, E_1)$, $U_2 \in \mathcal{L}(E_2' \,, E_2)$, $S \in \mathcal{B}(E_1 \times E_2 \,, F)$. Alors, l'application suivante est bilinéaire.

$$\begin{array}{rccl} S' : & E_1' \times E_2' & \longrightarrow & F \\ & (x_1' \,, x_2') & \mapsto & S\big(U_1(x_1') \,, U_2(x_2')\big) \ . \end{array}$$

Démonstration. i) Soient $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(E_1 \times E_2 \,, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il suffit de montrer que $S_1 + \lambda S_2 \in \mathcal{B}(E_1 \times E_2 \,, F)$.
En effet, pour tout $(x_1 \,, x_2) \,, (y_1 \,, y_2) \in E_1 \times E_2$,

$$\begin{aligned} &(S_1 + \lambda S_2)(x_1 + y_1 \,, x_2 + y_2) \\ &= S_1(x_1 + y_1 \,, x_2 + y_2) + \lambda S_2(x_1 + y_1 \,, x_2 + y_2) \\ &= S_1(x_1 \,, x_2) + S_1(y_1 \,, x_2) + S_1(x_1 \,, y_2) + S_1(y_1 \,, y_2) + \lambda S_2(x_1 \,, x_2) + \lambda S_2(y_1 \,, x_2) + \lambda S_2(x_1 \,, y_2) + \lambda \\ &= (S_1 + \lambda S_2)(x_1 \,, x_2) + (S_1 + \lambda S_2)(x_1 \,, y_2) + (S_1 + \lambda S_2)(x_2 \,, y_1) + (S_1 + \lambda S_2)(y_2 \,, x_1) \ . \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}(E_1 \times E_2\,, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E_1 \times E_2\,, F)$.
ii) Cette propriété résulte du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E_1 \times E_2 & \xrightarrow{S} & F & \xrightarrow{U} & G \\ (x_1\,, x_2) & \longmapsto & S(x_1\,, x_2) & \longmapsto & U\big(S(x_1\,, x_2)\big) \end{array} .$$

En fixant x_1 , il est évident que

$$\begin{array}{ccccc} E_2 & \xrightarrow{S} & F & \xrightarrow{U} & G \\ x_2 & \longmapsto & S(x_1\,, x_2) & \longmapsto & U\big(S(x_1\,, x_2)\big) \end{array}$$

est une application linéaire. De même, en fixant x_2 , on obtient une application bilinéaire. Donc la propriété bilinéaire est préservée.
iii) On regarde le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} E_1 & \times & E_2 & \arrow[r, "S"] & F \\ E'_1 \arrow[u, "U_1"] & & E'_2 \arrow[u, "U_2"] & & \end{tikzcd}$$

En fixant x'_1 , il est évident que

$$\begin{array}{ccccc} E'_2 & \xrightarrow{U_2} & E_2 & \xrightarrow{S} & F \\ x'_2 & \longmapsto & U_2(x'_2) & \longmapsto & S\big(U_1(x'_1)\,, U_2(x'_2)\big) \end{array}$$

est une application linéaire. De même, en fixant x'_2 , on obtient une application bilinéaire.
Donc iii) est vrai. □

En introduisant la notion de produit tensoriel de deux espaces vectoriels, l'objectif est de simplifier l'étude des applications bilinéaires. D'un certain point de vue, celle-ci se confond à l'étude simultanée de deux applications linéaires.
On introduit la notion de produit tensoriel pour "transformer" la bilinéarité en linéarité. Étudier un produit tensoriel revient à étudier le produit cartésien.

Tout d'abord, on rappelle ce qu'est, en tout généralité, une propriété universelle :
Soient E et F deux ensembles quelconques et ϕ une application de E dans F , on dit que $(F\,, \phi)$ possède la propriété universelle si pour tout ensemble G et toute application $\psi : E \longrightarrow G$, il existe une unique application $\tilde{\psi} : F \longrightarrow G$ telle que $\psi = \tilde{\psi} \circ \phi$.
On va préciser la propriété universelle dans deux cas particuliers.

Lemme 2.1.1.1 (Propriété universelle des espaces vectoriels quotients)**.** *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, E' un sous-espace vectoriel de E , E/E' l'espace vectoriel quotient, et φ l'application linéaire canonique de E sur E/E' . Alors, $(E/E'\,, \varphi)$ possède la propriété universelle : pour tout couple $(F\,, \psi)$ vérifiant*

i) ψ est une application linéaire de E dans F ;
ii) $Ker(\psi) \supset E'$.

il existe une unique application linéaire $\tilde{\psi} : E/E' \longrightarrow F$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & E/E' \arrow[d, "\tilde{\psi}"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Démonstration. On rappelle que si U, V, W sont trois espaces vectoriels quelconques et $\phi_1 \in \mathcal{L}(U\,,V), \phi_2 \in \mathcal{L}(U\,,W)$, alors il existe $\phi_3 \in \mathcal{L}(V\,,W)$ telle que $\phi_2 = \phi_3 \circ \phi_1$ si et seulement si $Ker(\phi_1) \subset Ker(\phi_2)$.
On prend $\phi_1 = \varphi$, $\phi_2 = \psi$. $\phi_3 = \tilde{\psi}$ existe universellement car $Ker(\psi) \supset E' = Ker(\varphi)$. □

Lemme 2.1.1.2 (Propriété universelle de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{(I)}$)**.** *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, I un ensemble non vide, $\mathbb{K}^{(I)}$ l'espace vectoriel engendré par $\{e_i\}_{i\in I}$ sur $\mathbb{K}$, où $\{e_i\}_{i\in I}$ est défini par les relations :*

$$e_i(j) = \begin{cases} 0 & si \quad j \neq i \\ 1 & si \quad j = i \end{cases} .$$

Soit φ l'injection canonique de I dans $\mathbb{K}^{(I)}$ qui à tout $i \in I$ associe $\varphi(i) = e_i$. Alors, $\big(\mathbb{K}^{(I)}\,,\varphi\big)$ possède la propriété universelle suivante : pour tout $u \in \mathcal{F}(I\,,E)$, il existe une unique $\tilde{u} \in \mathcal{L}\big(\mathbb{K}^{(I)}\,,E\big)$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "u"'] & \mathbb{K}^{(I)} \arrow[d, "\tilde{u}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Démonstration. **Unicité :** Soient $u \in \mathcal{F}(I\,,E)$ et $\tilde{u} \in \mathcal{L}\big(\mathbb{K}^{(I)}\,,E\big)$ telle que le diagramme précédent commute, alors
$u = \tilde{u} \circ \varphi \;\longrightarrow u(i) = \tilde{u} \circ \varphi(i)$.
Pour $f = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$, $U(f) = \sum_{i\in I} \alpha_i \tilde{u}(e_i) = \sum_{i\in I} \tilde{u} \circ \varphi(i)$.
Cette formule entraîne que U est uniquement déterminée.

Existence : Pour tout élément $f = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$, on définit donc

$$U(f) = \sum_{i\in I} \alpha_i u(i) .$$

Alors, $\tilde{u} \circ \varphi(i) = \tilde{u}(e_i) = u(i)$, d'où $\tilde{u} \circ \varphi = u$. □

Dans la suite, on va construire l'espace tensoriel de deux espaces vectoriels E_1 et E_2 étape par étape.

Etape 1 On considère $E_1 \times E_2$ comme un espace vectoriel E . Soit $\big(\mathbb{K}^{(E)}\,,j\big)$ l'espace vectoriel et l'application canonique définis dans le lemme [2.1.1.2]. On sait d'après sa propriété universelle que pour tout $S \in \mathcal{F}(E\,,F)$, il existe une unique $\tilde{S} \in \mathcal{L}\big(\mathbb{K}^{(E)}\,,F\big)$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "S"'] & \mathbb{K}^{(E)} \arrow[d, "\tilde{S}"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Etape 2 Choisissons S bilinéaires. Si λ, μ sont deux scalaires dans $\mathbb{K}$, $x_1, y_1 \in E_1$ et $x_2, y_2 \in E_2$, S est bilinéaire, alors, on a :

$$S(\lambda x_1 + \mu y_1\,, x_2) = \lambda S(x_1\,, x_2) + \mu S(y_1\,, x_2)$$

$$S(x_1\,, \lambda x_2 + \mu y_2) = \lambda S(x_1\,, x_2) + \mu S(x_1\,, y_2)\ .$$

Donc :

$$\tilde{S}[j(\lambda x_1 + \mu y_1\,, x_2)] = \lambda \tilde{S}[j(x_1\,, x_2)] + \mu \tilde{S}[j(y_1\,, x_2)]$$
$$\tilde{S}[j(x_1\,, \lambda x_2 + \mu y_2)] = \lambda \tilde{S}[j(x_1\,, x_2)] + \mu \tilde{S}[j(x_1\,, y_2)].$$

$\tilde{S}$ est linéaire. On en déduit :

$$\tilde{S}[j(\lambda x_1 + \mu y_1\,, x_2) - \lambda j(x_1\,, x_2) - \mu j(y_1\,, x_2)] = 0$$

$$\tilde{S}[j(x_1\,, \lambda x_2 + \mu y_2) - \lambda j(x_1\,, x_2) - \mu j(x_1\,, y_2)] = 0.$$

Soient H_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(E)}$ engendré par tous les éléments de forme $j(\lambda x_1 + \mu y_1\,, x_2) - \lambda j(x_1\,, x_2) - \mu j(y_1\,, x_2)$ en parcourant tous $x_1, y_1 \in E_1$, $x_2, y_2 \in E_2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
De même, notons H_2 l'espace engendré par $j(x_1\,, \lambda x_2 + \mu y_2) - \lambda j(x_1\,, x_2) - \mu j(x_1\,, y_2)$.
Soient $H = H_1 + H_2$ et φ est l'application canonique $\varphi : \mathbb{K}^{(E)} \longrightarrow G = \mathbb{K}^{(E)}/H$. H est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(E)}$. φ est bien définie.
Etape 3 Soit $T = \varphi \circ j$. Comme $Ker(\varphi) = H \subset Ker(\tilde{S})$, d'après [2.1.1.1], il existe une unique $\tilde{\tilde{S}} : G \longrightarrow F$ telle que $\tilde{S} = \tilde{\tilde{S}} \circ \varphi$ qui signifie que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{K}^{(E)} \arrow[dl, "\varphi"] \arrow[dd, "\tilde{S}"] \\
E \arrow[urr, "j"] \arrow[r, "T"] \arrow[drr, "S"'] & G \arrow[dr, "\tilde{\tilde{S}}"] & \\
 & & F
\end{tikzcd}$$

$(G\,, T)$ est justement ce que l'on recherche, c'est-à-dire, ce que l'on appelle produit tensoriel de deux espaces vectoriels.

Remarque 2.1.1.1. *i) T est bilinéaire. En effet, la construction de H nous permet la bilinéarité de T . ii) $S = \tilde{\tilde{S}} \circ T$, en effet, $S = \tilde{S} \circ j = \tilde{\tilde{S}} \circ \varphi \circ j = \tilde{\tilde{S}} \circ T$.*

Définition 2.1.1.1. *L'espace vectoriel $G = \mathbb{K}^{(E)}/H$ s'appelle le produit tensoriel sur $\mathbb{K}$ de deux espaces vectoriels E_1, E_2 . Il est noté $E_1 \otimes_{\mathbb{K}} E_2$, ou bien plus simplement $E_1 \otimes E_2$, lorsque aucune confusion n'est à craindre, $T(x_1\,, x_2)$ est noté $x_1 \otimes x_2$.*

Remarque 2.1.1.2. *Désormais, notons $\tilde{S} : E_1 \otimes E_2 \longrightarrow F$ au lieu de $\tilde{\tilde{S}}$ dans la construction précédente.*

Théorème 2.1.1.1. *Soient $E_1\,, E_2$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Il existe un espace vectoriel noté $E_1 \otimes E_2$ et une application bilinéaire $T : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 \otimes E_2$ tel que $(E_1 \otimes E_2\,, T)$ possède la propriété universelle suivante : pour toute application bilinéaire $S : E_1 \times E_2 \to F$, il existe une unique application linéaire $\tilde{S} : E_1 \otimes E_2 \to F$ telle que $S = \tilde{S} \circ T$. De plus, $(E_1 \otimes E_2\,, T)$ est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Par la construction précédente, on a déjà montré l'existence de $E_1 \otimes E_2$. Pour l'unicité, considérons un autre couple (G', T') vérifiant la propriété universelle précédente. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T'"'] & G \arrow[d, shift left, "\tilde{T}'"] \\ & G' \arrow[u, shift left, "\tilde{T}"] \end{tikzcd}$$

On a :

$$T' = \tilde{T}' \circ T, \quad T = \tilde{T} \circ T' \ .$$

Par la construction, G est engendré par les images de φ de la base de $\mathbb{K}^{(E)}$. La base de $\mathbb{K}^{(E)}$ est construite par les images de j . Donc, T est surjective.
D'où :

$$\tilde{T} \circ \tilde{T}' = Id_G, \tilde{T}' \circ \tilde{T} = Id_{\tilde{G}}$$

Cette formule signifie que $\tilde{T}, \tilde{T}'$ sont bijectives. Donc $G \simeq G'$. □

Remarque 2.1.1.3. *$\otimes$ est un opérateur bilinéaire, c'est-à-dire :*
Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x_1, y_1 \in E_1, x_2, y_2 \in E_2$,

$$(\lambda x_1 + \mu y_1) \otimes x_2 = \lambda x_1 \otimes x_2 + \mu y_1 \otimes x_2 \ ,$$

$$x_1 \otimes (\lambda x_2 + \mu y_2) = \lambda x_1 \otimes x_2 + \mu x_1 \otimes y_2 \ .$$

En effet, par construction, T est bilinéaire, donc $\otimes$ est bilinéaire aussi.

2.1.2 Propriétés des produits tensoriels

Lemme 2.1.2.1. *Pour tout triplet $\big(U, V, W\big)$ d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, il existe un isomorphisme naturel*

$$Hom\big(U \otimes V, W\big) \cong Hom\big(U, Hom\big(V, W\big)\big) \ .$$

Démonstration. Il suffit d'identifier $\varphi \in Hom(U \otimes V, W)$ à l'application $u \mapsto \varphi(u, \cdot)$. Si φ, ψ vérifient que $u \mapsto \varphi(u, \cdot)$ et $u \mapsto \psi(u, \cdot)$ sont mêmes, pour tout $u \in U$, $\varphi(u, \cdot) = \psi(u, \cdot)$. Pour tout $v \in V$, $\varphi(u, v) = \psi(u, v)$. Donc $\varphi = \psi$. Cette identification est injective. Étant donné $\delta \in Hom\big(U, Hom\big(V, W\big)\big)$, on l'associe $(u, v) \mapsto \delta(u)(v)$ dans $Hom\big(U \otimes V, W\big)$. L'identification est surjective. Donc elle est bijective. □

De plus, on a les isomorphismes suivants :

Lemme 2.1.2.2. *Soient U, V, W trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, alors*

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W) \ ,$$

$$\mathbb{K} \otimes V \cong V \cong V \otimes \mathbb{K} \ ,$$

$$V \otimes W \cong W \otimes V \ .$$

Démonstration. Pour tout $(u\,,v\,,w) \in \big(U\,,V\,,W\big)$
i) On associe $(u \otimes v) \otimes w$ à $\big(u \otimes (v \otimes w)\big)$. Il est évident que cette association est linéaire et surjective. Si $u \otimes (v \otimes w) = 0$, soit $u = 0$, soit $v \otimes w = 0$ qui est équivalent à soit $v = 0$, soit $w = 0$. Dans tous les cas, $(u \otimes v) \otimes w = 0$. Cette association est injective. Donc elle est bijective.
ii) On associe $k \otimes v$ à kv , il est évident que cette association est bijective. De même pour $v \otimes k$.
iii) De même, on associe $v \otimes w$ à $w \otimes v$. □

Maintenant, on va montrer une proposition très importante.

Proposition 2.1.2.1. *Soit I un ensemble d'indices. Soient $\big(U_i\big)_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit V un autre espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors :*

$$Hom\big(\bigoplus_{i \in I} U_i\,,V\big) \cong \prod_{i \in I} Hom\big(U_i\,,V\big)\ .$$

Démonstration. On identifie tout $f \in Hom\big(\bigoplus_{i \in I} U_i\,,V\big)$ à $\big(f_{|U_i}\big)_{i \in I}$. □

Corollaire 2.1.2.1. *Soient I un ensemble d'indices, $\big(U_i\big)_{i \in I}$ une famille de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit V un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :*

$$\big(\bigoplus_{i \in I} U_i\big) \otimes V \cong \bigoplus_{i \in I} \big(U_i \otimes V\big)\ .$$

Démonstration. Pour tout espace vectoriel W,

$$\begin{aligned}
Hom\big(\big(\bigoplus_{i \in I} U_i\big) \otimes V\,,W\big) &\cong Hom\big(\bigoplus_{i \in I} U_i\,,Hom\big(V,W\big)\big) \\
&\cong \prod_{i \in I} Hom\big(U_i\,,Hom\big(V,W\big)\big) \\
&\cong \prod_{i \in I} Hom\big(U_i \otimes V\,,W\big) \\
&\cong Hom\big(\bigoplus_{i \in I} \big(U_i \otimes V\big)\,,W\big).
\end{aligned}$$

Cette formule est correcte pour tout W . La suite de démonstration est donnée dans la proposition 5.1(c) [4]. □

Corollaire 2.1.2.2. *Soient $\{u_i\}_{i \in I}$ une base d'un espace vectoriel U et $\{v_j\}_{j \in J}$ une base d'un espace vectoriel V , alors $\{u_i \otimes v_j\}_{i \in I\,, j \in J}$ est une base de $U \otimes V$.*

Démonstration. On écrit U et V en une somme directe,

$$U = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}u_i\,, V = \bigoplus_{j \in J} \mathbb{K}v_j\ .$$

Alors :

$$\begin{aligned} U \otimes V &\cong \Big(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}u_i\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{j\in J} \mathbb{K}v_j\Big) \\ &\cong \bigoplus_{i\in I} \Big(\mathbb{K}u_i \otimes \Big(\bigoplus_{j\in J} \mathbb{K}v_j\Big)\Big) \\ &\cong \bigoplus_{i\in I} \bigoplus_{j\in J} \big(\mathbb{K}u_i \otimes \mathbb{K}v_j\big) \\ &\cong \bigoplus_{i\in I, j\in J} \mathbb{K}(u_i \otimes v_j) \ . \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1.2.3. *Si U et V sont de dimension finie, alors $dim\big(U \otimes V\big) = dimU \times dimV$.*

Démonstration. Grâce au corollaire précédent,

$$U \otimes V \cong \bigoplus_{i=1}^{dimU} \bigoplus_{j=1}^{dimV} \mathbb{K}(u_i \otimes v_j) \ .$$

D'où, $dim\big(U \otimes V\big) = dimU \times dimV$. □

2.2 Produit tensoriel de deux application linéaire et de deux algèbres

Définition 2.2.1. *Soient U, U', V, V' quatre espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(U, U')$et $g \in \mathcal{L}(V, V')$. On définit le produit tensoriel des applications linéaires f et g par la formule suivante :*

$$\begin{array}{rccc} f \otimes g : & U \otimes V & \longrightarrow & U' \otimes V' \\ & u \otimes v & \mapsto & f(u) \otimes g(v) \ . \end{array}$$

Définition 2.2.2. *Soient A, B deux algèbres sur $\mathbb{K}$. On munit l'espace tensoriel $A \otimes B$ d'une structure d'algèbre. On définit la multiplication sur $A \otimes B$ par :*

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb') \ .$$

Remarque 2.2.1. *La multiplication de $A \otimes B$ est associative et distributive par rapport à l'addition d'après la bilinéarité de $\otimes$.*

Remarque 2.2.2. *Dans l'équation ci-dessus, $\cdot$ note la loi de multiplication dans $A \otimes B$.*

Remarque 2.2.3. *On note $A \otimes A = A^{\otimes 2}$ et on définit $A^{\otimes i} = \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{i-fois}$ pour un certain $i \in \mathbb{N}^*$ et $A^{\otimes 0} = \mathbb{K}$.*

Exemple : (L'algèbre tensorielle) Soit A une algèbre. On note $T(A) = \bigoplus_{i \geq 0} A^{\otimes i}$.

$T(A)$ est un espace vectoriel. La multiplication sur $T(A)$ est définie par :
pour tout $i \, , j \geq 0$, tout $a_1 \otimes a_2 \cdots \otimes a_i \in A^{\otimes i}$, $a_{i+1} \otimes a_{i+2} \cdots \otimes a_{i+j} \in A^{\otimes j}$,

$$(a_1 \otimes a_2 \cdots \otimes a_i) \cdot (a_{i+1} \otimes a_{i+2} \cdots \otimes a_{i+j}) = a_1 \otimes a_2 \cdots \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes a_{i+2} \cdots \otimes a_{i+j} \in A^{\otimes (i+j)} \, .$$

Remarque 2.2.4. *On étend la multiplication en la rendant distributive par rapport à l'addition par définition. Avec elle, $T(V)$ devient une algèbre. On l'appelle algèbre tensorielle de A. Par ailleurs, sa multiplication s'appelle la concaténation.*

Chapitre 3

Les polynômes non-commutatifs

3.1 Les mots, les polynômes non-commutatifs et les séries formelles non-commutatives

Soit $\mathbb{K}$ un corps ou un anneau. On connaît bien les polynômes (commutatifs) classiques. Si l'on supprime la «commutativité», on obtiendra les polynômes non-commutatifs. On commence par quelques définitions.

Définition 3.1.1 (l'alphabet, les lettres, les mots)**.** *Soit A un ensemble (fini ou infini) . On appelle cet ensemble alphabet. Un élément de A s'appelle une lettre. Une séquence finie des lettres s'appelle un mot. Par ailleurs on note le mot vide ε . On note A^* l'ensemble des mots sur A et le mot vide.*

Remarque 3.1.1. *Dans la plupart des cas, A est fini, mais notre définition marche aussi au cas où A était infini. On note un mot $\omega \in A^*$ habituellement. On peut "identifier" cette définition aux lettres et aux mots habituels.*

Définition 3.1.2 (Concaténation)**.** *Soient $\omega_1 = a_1a_2\cdots a_k\,,\omega_2 = a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_l$ avec $k \geq 1\,, l > k$ deux mots non-vides de A^* , où $\{a_i\}_{1\leq i\leq l}$ sont des lettres. La concaténation de $\omega_1\,,\omega_2$ est*

$$conc(\omega_1\,,\omega_2) = a_1a_2\cdots a_l\ .$$

Et $\forall \omega \in A^*$, $conc(\varepsilon\,,\omega) = conc(\omega\,,\varepsilon) = \omega$.
Sans ambiguïté, on écrit $u \cdot v = conc(u\,,v)$.

Remarque 3.1.2. *$(A^*\,, conc)$ est le monoïde libre sur A d'élément neutre ε .*

Maintenant, soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif unitaire.

Définition 3.1.3. *Un polynôme non-commutatif d'alphabet A à coefficient dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-combinaison linéaire finie de mots de A . Alors, un polynôme non-commutatif P d'alphabet A à coefficient dans $\mathbb{K}$ s'écrit*

$$P = \sum_{\omega\in A^*}(P\,,\omega)\omega\ ,$$

où $(P\,,\omega)$ désigne le coefficient du mot ω . Sans ambiguïté, on l'appelle aussi un polynôme.

Chaque polynôme est donc une somme finie car il n'y a qu'un nombre fini de coefficients non-nuls dans cette notation. On note $\mathbb{K}<A>$ l'ensemble de tous les polynômes non-commutatifs dans A sur $\mathbb{K}$ (d'alphabet A à coefficient dans $\mathbb{K}$) .
Par ailleurs, on peut définir la série formelle non-commutative par analogie. Autrement dit, il s'agit d'une somme infinie, en utilisant la même écriture de P ; l'ensemble des séries formelle est noté $\mathbb{K}\ll A\gg$.

3.2 La multiplication de $\mathbb{K}<A>$ et ses propriétés

Définition 3.2.1. *Soient* $P = \sum_{u\in A^*} (P\,,u)u$, $Q = \sum_{v\in A^*} (Q\,,v)v$ *deux polynômes non-commutatifs, les coefficients de* $PQ = \sum_{w\in A^*} (PQ\,,w)w$ *sont définis par*

$$(PQ\,,w) = \sum_{w=u\cdot v} (P\,,u)(Q\,,v)\ .$$

Proposition 3.2.1. *Muni de la multiplication précédente,* $\mathbb{K}<A>$ *est une algèbre unitaire ;* $\mathbb{K}\ll A\gg$ *aussi.*

Démonstration. Il est évident que $\mathbb{K}<A>$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Associativité :
Soient $P_1 = \sum_{u_1\in A^*} (P_1\,,u_1)u_1$, $P_2 = \sum_{u_2\in A^*} (P_2\,,u_2)u_2$, $P_3 = \sum_{u_3\in A^*} (P_3\,,u_3)u_3$,

$$\begin{aligned}\Big((P_1P_2)P_3\,,\omega\Big) &= \sum_{\omega=\omega_1\cdot\omega_2} \Big(\sum_{\omega_1=u_1\cdot u_2} (P_1\,,u_1)(P_2\,,u_2)\Big)(P_3\,,\omega_2)\\ &= \sum_{\omega=u_1\cdot u_2\cdot u_3} (P_1\,,u_1)(P_2\,,u_2)(P_3\,,u_3)\ .\end{aligned}$$

De même, pour $\Big(P_1(P_2P_3)\,,\omega\Big)$, alors $(P_1P_2)P_3 = P_1(P_2P_3)$.
Unité : Le mot vide ε est l'élément unitaire, en effet

$$(P_1\varepsilon\,,\omega) = \sum_{\omega=u_1u_2} (P_1\,,u_1)(\varepsilon\,,u_2) = (P_1\,,\omega)\ .$$

Alors, $P_1\varepsilon = P_1$. De même, $\varepsilon P_1 = P_1$.
Distributivité :
Soient $P_1 = \sum_{u_1\in A^*} (P_1\,,u_1)u_1$, $P_2 = \sum_{u_2\in A^*} (P_2\,,u_2)u_2$, $P_3 = \sum_{u_3\in A^*} (P_3\,,u_3)u_3$,

$$\begin{aligned}(P_1+P_2)P_3 &= \Big(\sum_{u\in A^*} ((P_1\,,u)+(P_2\,,u))u\Big)\Big(\sum_{u_3\in A^*} (P_3\,,u_3)u_3\Big)\\ &= \sum_{\omega=u\cdot u_3} \Big(((P_1\,,u)+(P_2\,,u))(P_3\,,u_3)\Big)\omega\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1P_3 + P_2P_3 &= \sum_{\omega=u_1\cdot u_3} \big(P_1\,,u_1\big)\big(P_3\,,u_3\big)\omega + \sum_{\omega'=u_2\cdot u_3} \big(P_2\,,u_2\big)\big(P_3\,,u_3\big)\omega' \\
&= \sum_{\omega=u\cdot u_3} \big(P_1\,,u\big)\big(P_3\,,u_3\big)\omega + \sum_{\omega=u\cdot u_3} \big(P_2\,,u\big)\big(P_3\,,u_3\big)\omega \\
&= \sum_{\omega=u\cdot u_3} \Big(\big(P_1\,,u\big)\big(P_3\,,u_3\big) + \big(P_2\,,u\big)\big(P_3\,,u_3\big)\Big)\omega \\
&= \sum_{\omega=u\cdot u_3} \bigg(\Big(\big(P_1\,,u\big) + \big(P_2\,,u\big)\Big)\big(P_3\,,u_3\big)\bigg)\omega\ .
\end{aligned}$$

Donc $\big(P_1 + P_2\big)P_3 = P_1P_3 + P_2P_3$. De même, $P_3\big(P_1 + P_2\big) = P_3P_1 + P_3P_2$.
Donc $\mathbb{K}<A>$ est une algèbre. On démontre le cas des séries formelles en utilisant les mêmes calculs ; on laisse au lecteur de le refaire. □

Proposition 3.2.2. *Soit $i : A \to A^*$ l'injection canonique. $(A\,, i)$ possède la propriété universelle suivante : pour toute application $f : A \longrightarrow M$ de A dans un monoïde quelconque M , il existe un unique homomorphisme de monoïde A^* dans M tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & A^* \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Pour un élément $\omega = a_1a_2\cdots a_n \in A^*$, on pose

$$\bar{f}(\omega) = f(a_1)f(a_2)\cdots f(a_n)\ .$$

Il est évident que ce diagramme devient alors commutatif d'après cette définition.
Si $\bar{\bar{f}}$ est un autre homomorphisme, pour tout $a \in A$, $\bar{\bar{f}}(a) = \bar{\bar{f}} \circ i(a) = f(a)$. Alors,

$$\bar{\bar{f}}(\omega) = \bar{\bar{f}}(a_1)\bar{\bar{f}}(a_2)\cdots \bar{\bar{f}}(a_n) = f(a_1)f(a_2)\cdots f(a_n)\ .$$

D'où, on obtient l'unicité. □

Si l'on conserve la notation i pour l'injection de A dans $\mathbb{K}<A>$, $(A\,, i)$ possède aussi la propriété universelle.

Proposition 3.2.3. *Pour toute application $g : A \to \mathcal{A}$ de A dans une algèbre associative quelconque $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{K}$, il existe un unique homomorphisme d'algèbre $\tilde{g} : \mathbb{K}<A> \longrightarrow \mathcal{A}$ tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathbb{K}<A> \arrow[dl, "\tilde{g}"] \\
& \mathcal{A} &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Par la notation de la proposition précédente, il existe un unique homomorphisme $\bar{g} : A \longrightarrow A^*$. Pour un polynôme $P = \sum_{u \in A^*} \big(P\,, u\big)u$, on pose

$$\tilde{g}\big(P\big) = \sum_{u \in A^*} \big(P\,, u\big)\bar{g}(u)\ .$$

Soit $Q = \sum_{v \in A^*} (Q\,, v)v$, alors

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\big(PQ\big) &= \tilde{g}\Big(\sum_{u\,, v \in A^*} \big(P\,, u\big)\big(Q\,, v\big)u \cdot v\Big) \\
&= \sum_{u\,, v \in A^*} \big(P\,, u\big)\big(Q\,, v\big)\bar{g}(u \cdot v) \\
&= \sum_{u\,, v \in A^*} \big(P\,, u\big)\big(Q\,, v\big)\bar{g}(u)\bar{g}(v) \\
&= \Big(\sum_{u \in A^*} \big(P\,, u\big)\bar{g}(u)\Big)\Big(\sum_{v \in A^*} \big(Q\,, v\big)\bar{g}(v)\Big) \\
&= \tilde{g}\big(P\big)\tilde{g}\big(Q\big)\ .
\end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Cogèbre ,bigèbre et l'algèbre de Hopf

4.1 Algèbre et Cogèbre

Rappel : La définition de l'algèbre est bien connue. Ici, on parle d'algèbre unitaire (c'est-à-dire que la multiplication possède un élément neutre) .
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire sur un corps $\mathbb{K}$. Dire que la multiplication de $\mathcal{A}$ a un élément neutre est équivalent à dire qu'il existe une $\mathbb{K}$-application linéaire de $\mathbb{K}$ dans $\mathcal{A}$, notée u , telle que $u(1_{\mathbb{K}}) = 1$, où 1 est l'élément neutre de la multiplication de $\mathcal{A}$, $1_{\mathbb{K}}$ est celui de $\mathbb{K}$.
De cette façon, on peut réécrire la définition d'une algèbre unitaire :

Définition 4.1.1. *Soit $\mathcal{A}$ un espace vectoriel muni d'une application linéaire $M : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, appelée multiplication et d'une $\mathbb{K}$-application linéaire $u : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{A}$, appelée unité. On dit que le triplet $(\mathcal{A}, M, u)$ est une algèbre si les diagrammes suivants commutent :*

Axiome d'associativité :
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[r, "Id\otimes M"] \arrow[d, "M\otimes Id"'] & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[d, "M"] \\
\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[r, "M"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

Axiome d'unité :
$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[dd, "M"] & \\
\mathbb{K}\otimes\mathcal{A} \arrow[ur, "u\otimes Id"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \mathcal{A}\otimes\mathbb{K} \arrow[ul, "Id\otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& \mathcal{A} &
\end{tikzcd}$$

Remarque 4.1.1. *Dans le deuxième diagramme, $\sim$ désigne l'isomorphisme canonique entre $\mathbb{K} \otimes \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$: $k \otimes a \sim ka$.*

Le but de réécrire la définition d'une algèbre sous cette forme est de donner celle des cogèbres plus naturellement. En effet, une cogèbre est obtenue en renversant tous les sens des flèches :

Définition 4.1.2. *Soit C un espace vectoriel muni d'une application linéaire $\Delta : C \to C \otimes C$, appelée la comultiplication et d'une $\mathbb{K}$-application linéaire $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$, appelée counité. On dit que le triplet (C, Δ, ε) est une cogèbre si ces deux diagrammes suivants commutent :*

Axiome de coassociativité :
$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "Id\otimes\Delta"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "\Delta\otimes Id"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Axiome de counité :
$$\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon\otimes Id"'] \arrow[dr, "Id\otimes\varepsilon"] & \\
\mathbb{K} \otimes C & & C \otimes \mathbb{K} \; . \\
 & C \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] \arrow[uu, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit $c \in C$, $\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{1i} \otimes c_{2i}$. Par la notation introduite par M. Sweedler [7], notons $\Delta(c) = \sum_{c} c^1 \otimes c^2$.

Par la commutativité du diagramme, $(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta$. On a :

$$\sum_{c} \Big(\sum_{c^1} c^{1,1} \otimes c^{1,2} \Big) \otimes c^2 = \sum_{c} c^1 \otimes \Big(\sum_{c^2} c^{2,1} \otimes c^{2,2} \Big) \; .$$

Donc on la note $\sum_{c} c^1 \otimes c^2 \otimes c^3$.

Exemple : Soit S un ensemble. On note $\mathbb{K}S$ l'espace vectoriel engendré par tous les éléments de S comme la base sur $\mathbb{K}$. On munit $\mathbb{K}S$ d'une structure de cogèbre par

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathbb{K}S & \longrightarrow & \mathbb{K}S \otimes \mathbb{K}S \\ & s & \longmapsto & s \otimes s \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & \mathbb{K}S & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & s & \longmapsto & 1_{\mathbb{K}} \; . \end{array}$$

Démonstration. Pour tout $s \in S$,

$$\begin{aligned} (Id \otimes \Delta) \circ \Delta(s) &= (Id \otimes \Delta)(s \otimes s) \\ &= s \otimes s \otimes s \; . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes Id) \circ \Delta(s) &= (\Delta \otimes Id)(s \otimes s) \\ &= s \otimes s \otimes s \; . \end{aligned}$$

Donc, $(Id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id) \circ \Delta$.

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta(s) &= (\varepsilon \otimes Id)(s \otimes s) \\ &= 1_{\mathbb{K}} \otimes s \sim s \; . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(s) &= (Id \otimes \varepsilon)(s \otimes s) \\ &= s \otimes 1_{\mathbb{K}} \sim s \; . \end{aligned}$$

Donc, $(\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \varepsilon) \circ \Delta$. D'où, $\big(\mathbb{K}S \, , \Delta \, , \varepsilon\big)$ est une cogèbre. □

On rencontrera à nouveau la notation $\mathbb{K}S$ dans les chapitres suivants.

4.2 La dualité d'algèbre et de cogèbre

Soient E un espace vectoriel et $u \in E$, $f \in E^*$, notons $f(u) = <f\,,u>$.

Lemme 4.2.1. *Soient $E\,,F$ deux espaces vectoriels. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Si E est de dimension finie, on peut bien définir l'application duale $\varphi^* : F^* \longrightarrow E^*$.*

Démonstration. Soit $\{e_1\,,e_2\,,\cdots,e_n\}$ la base de E . Alors la base duale est $\{{e_1}^*\,,{e_2}^*\,,\cdots,{e_n}^*\}$. On définit $\varphi^*(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} <f\,,\varphi(e_i)> {e_i}^*$ pour tout $f \in F^*$. □

Remarque 4.2.1. *On peut définir l'application duale de φ dans le cas où E est de dimension infinies. Mais dans ce mémoire, le cas où E est de dimension finie a suffit.*

Soit $(C\,,\Delta\,,\varepsilon)$ une cogèbre sur $\mathbb{K}$. $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ détermine $\varepsilon^* : \mathbb{K}^* \longrightarrow C^*$.
$\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ détermine $\Delta^* : (C \otimes C)^* \longrightarrow C^*$.

Lemme 4.2.2. *Soit E un espace vectoriel. Il existe une injection canonique $\rho : E^* \otimes E^* \longrightarrow (E \otimes E)^*$; si E est de dimension finie, ρ est alors une bijection.*

Démonstration. Soient $f\,,g \in E^*$, on définit $\rho(f \otimes g)$ par

$$\forall u\,,v \in E\,, <\rho(f \otimes g)\,,u \otimes v> = <f\,,u><g\,,v> \quad .$$

Si $\forall u\,,v \in E\,, <f\,,u><g\,,v> = 0$, soit $f \equiv 0$, soit $g \equiv 0$. Dans tous les cas, on a : $f \otimes g = 0$. Donc, ρ est une injection : $\rho(E^* \otimes E^*) \subset (E \otimes E)^*$.
De plus, si E est de dimension finie, $dim(E^* \otimes E^*) = (dimE)^2 = dim(E \otimes E)^*$, alors $\rho(E^* \otimes E^*) = (E \otimes E)^*$. ρ est donc une bijection. □

Remarque 4.2.2. *Si E est de dimension infinie, $\rho(E^* \otimes E^*) \subsetneqq (E \otimes E)^*$.*

Théorème 4.2.1. *Soit $(C\,,\Delta\,,\varepsilon)$ une cogèbre. $(C^*\,,\Delta^* \circ \rho\,,\varepsilon^*)$ est une algèbre.*

Démonstration. On va vérifier les deux diagrammes des axiomes d'algèbres (Définition [4.1.1]) . On les rappelle ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
C^* \otimes C^* \otimes C^* \arrow[r, "Id\otimes(\Delta^*\circ\rho)"] \arrow[d, "\Delta^*\circ\rho\otimes Id"'] & C^* \otimes C^* \arrow[d, "(\Delta^*\circ\rho)"] \\
C^* \otimes C^* \arrow[r, "\Delta^*\circ\rho"] & C^*
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& C^* \otimes C^* \arrow[dd, "\Delta^*\circ\rho"] & \\
\mathbb{K} \otimes C^* \arrow[ur, "\varepsilon^*\otimes Id"] & & C^* \otimes \mathbb{K} \arrow[ul, "Id\otimes\varepsilon^*"'] \\
& C^* \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd} .$$

Vérifions d'abord le premier diagramme. Pour tout $f \otimes g \otimes h \in C^* \otimes C^* \otimes C^*$, tout $c \in C$, il suffit de montrer

$$\Big\langle \Delta^*\Big(\rho\big(f \otimes \Delta^* \circ \rho(g \otimes h)\big)\Big)\,,c \Big\rangle = \Big\langle \Delta^*\Big(\rho\big(\Delta^*(f \otimes g) \otimes h\big)\Big)\,,c \Big\rangle \ .$$

Il est équivalent à

$$\sum_c < f\,, c^1 > \left\langle \Delta^*\big(\rho(g \otimes h)\big)\,, c^2 \right\rangle = \sum_c \left\langle \Delta^*(f \otimes g)\,, c^1 >< h\,, c^2 \right\rangle$$

qui est équivalent à

$$\sum_c \sum_{c^2} < f\,, c^1 >< g\,, c^{2,1} >< h\,, c^{2,2} >= \sum_c \sum_{c^1} < f\,, c^{1,1} >< g\,, c^{1,2} >< h\,, c^2 >$$

qui est équivalent à

$$< f \otimes g \otimes h\,, \sum_c c^1 c^2 c^3 >=< f \otimes g \otimes h\,, \sum_c c^1 c^2 c^3 >$$

qui est évident.
Vérifions la commutativité de la partie gauche du deuxième diagramme. De même, pour la partie droite de ce diagramme. Cela est équivalent à : pour tout $k \in \mathbb{K}$, $f \in C^*$, $c \in C$

$$\begin{aligned}\left\langle \Delta^*\Big(\rho\big(\varepsilon^*(k^*) \otimes f\big)\Big)\,, c \right\rangle &= \left\langle \rho\big(\varepsilon^*(k^*) \otimes f\big)\,, \sum_c c^1 \otimes c^2 \right\rangle \\ &= \sum_c < \varepsilon^*(k^*)\,, c^1 >< f\,, c^2 > \\ &= \sum_c < k^*\,, \varepsilon(c^1) >< f\,, c^2 > \\ &= \sum_c < f\,, k\varepsilon(c^1)c^2 > .\end{aligned}$$

D'après l'axiome de counité (Définition [4.1.2]) , $1 \otimes c = \sum_c \varepsilon(c^1) \otimes c^2$. Alors $c = \sum_c \varepsilon(c^1)c^2$.
D'où, $\left\langle \Delta^*\Big(\rho\big(\varepsilon^*(k^*) \otimes f\big)\Big)\,, c \right\rangle = \sum_c < f\,, k\varepsilon(c^1)c^2 >= k < f\,, c >$.
Alors, $\Delta^*\Big(\rho\big(\varepsilon^*(k^*) \otimes f\big)\Big) = kf$.
D'où $(C^*\,, \Delta^* \circ \rho\,, \varepsilon^*)$ est une algèbre. □

Théorème 4.2.2. *Soit $(A\,, M\,, u)$ une algèbre. Si A est de dimension finie, $(A^*\,, \rho^{-1} \circ M^*\,, \varepsilon^*)$ est une cogèbre.*

Remarque 4.2.3. *Si A est de dimension finie, ρ^{-1} existe d'après le lemme [4.2.2].*

La preuve est presque même que le théorème précédent. La différence relève de quelques changement d'ordre de lettres. On la laisse au lecteur en tant qu'exercise.

4.3 Bigèbre

Avant de préciser la définition de bigèbre, on se donne la définition du morphisme d'algèbre et de cogèbre.

Définition 4.3.1 (Morphisme d'algèbre et de cogèbre)**.**
i) Soient $(A\,,M_A\,,u_A)$ et $(B\,,M_B\,,u_B)$ deux algèbres.
$f:A\longrightarrow B$ est un morphisme d'algèbre lorsque les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "M_A"'] & B\otimes B \arrow[d, "M_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ \mathbb{K} \arrow[u, "u_A"] \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{K} \arrow[u, "u_B"'] \end{tikzcd}$$

ii) Soient $(C\,,\Delta_C\,,\varepsilon_C)$ et $(D\,,\Delta\,,\varepsilon_D)$ deux cogèbres.
$g:C\longrightarrow D$ est un morphisme de cogèbre lorsque les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C\otimes C \arrow[r, "g\otimes g"] & D\otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ \mathbb{K} \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Définition 4.3.2 (La structure de $A\otimes A$ et de $C\otimes C$)**.**
i) Étant donné une algèbre $(A\,,M\,,u)$, on définit
$(M\otimes M)\circ(Id\otimes\tau_{A,A}\otimes Id)$ et $u\otimes u$ comme la multiplication et l'unité de $A\otimes A$, où $\tau_{A,A}$ est la transposée sur $A\otimes A$.
ii) Étant donné une cogèbre $(C\,,\Delta\,,\varepsilon)$, on définit $(Id\otimes\tau_{C,C}\otimes Id)\circ(\Delta\otimes\Delta)$ et $\varepsilon\otimes\varepsilon$ comme la comultiplication et la counité de $C\otimes C$, où $\tau_{C,C}$ est la transposée sur $C\otimes C$.

Proposition 4.3.1. *Avec la notation de la définition précédente,*
i) $\Big(A\otimes A\,,(M\otimes M)\circ(Id\otimes\tau_{A,A}\otimes Id)\,,u\otimes u\Big)$ est une algèbre.
ii) $\Big(C\otimes C\,,(Id\otimes\tau_{C,C}\otimes Id)\circ(\Delta\otimes\Delta)\,,\varepsilon\otimes\varepsilon\Big)$ est une cogèbre.

Démonstration. i) On écrit a_1b_1 au lieu de $M(a_1\,,b_1)$.
Vérifions d'abord que pour tout $a_1\otimes a_2$, $b_1\otimes b_2$, $c_1\otimes c_2\in A\otimes A$,

$$\begin{aligned}&(M\otimes M)\circ(Id\otimes\tau_{A,A}\otimes Id)\big((a_1b_1\otimes a_2b_2)\otimes(c_1\otimes c_2)\big)\\=&(M\otimes M)\circ(Id\otimes\tau_{A,A}\otimes Id)\big((a_1\otimes a_2)\otimes(b_1c_1\otimes b_2c_2)\big)\end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$\big((a_1b_1)c_1\big)\otimes\big((a_2b_2)c_2\big)=\big(a_1(b_1c_1)\big)\otimes\big(a_2(b_2c_2)\big)\ .$$

Par l'associativité de A , cela est vrai.
Vérifions que pour tout $k_1\otimes k_2\in\mathbb{K}\otimes\mathbb{K}$, $a_1\otimes a_2\in A\otimes A$,

$$k_1k_2(a_1\otimes a_2)=\big(M\otimes M\big)\circ\big(Id\otimes\tau_{A,A}\otimes Id\big)\big((k_11\otimes k_21)\otimes(a_1\otimes a_2)\big)$$

qui est équvalent à

$$k_1k_2(a_1\otimes a_2)=k_1a_1\otimes k_2a_2=k_1k_2a_1\otimes a_2\ .$$

Cela est vrai.
ii) Vérifions que pour tout $c\otimes d\in C\otimes C$,

$$\Big(\big((Id\otimes\tau_{C,C}\otimes Id)\circ(\Delta\otimes\Delta)\big)\otimes(Id\otimes Id)\Big)\Big(\sum_{c,d}\big(c^1\otimes d^1\big)\otimes\big(c^2\otimes d^2\big)\Big)$$

$$= \Big((Id \otimes Id) \otimes \big((Id \otimes \tau_{C,C} \otimes Id) \circ (\Delta \otimes \Delta)\big)\Big)\Big(\sum_{c,d} (c^1 \otimes d^1) \otimes (c^2 \otimes d^2)\Big)$$

qui est équivalent à

$$\sum_{c,d,c_1,d_1} (c^{1,1} \otimes d^{1,1}) \otimes (c^{1,2} \otimes d^{1,2}) \otimes (c^2 \otimes d^2)$$

$$= \sum_{c,d,c_2,d_2} (c^1 \otimes d^1) \otimes (c^{2,1} \otimes d^{2,1}) \otimes (c^{2,2} \otimes d^{2,2}) \ .$$

D'après l'axiome de coassociativité de C , cela est vrai.
Vérifions que pour tout $c \otimes d \in C \otimes C$,

$$(1 \otimes 1) \otimes (c \otimes d) = \sum_{c,d} \big(\varepsilon(c^1) \otimes \varepsilon(d^1)\big) \otimes (c^2 \otimes d^2)$$

qui est équivalent à

$$c \otimes d = \Big(\sum_{c} \varepsilon(c^1) c^2\Big) \otimes \Big(\sum_{d} \varepsilon(d^1) d^2\Big) \ .$$

Cela est vrai par l'axiome de counité de C . □

Remarque 4.3.1. *L'algèbre* $\Big(A \otimes A \, , (M \otimes M) \circ (Id \otimes \tau_{A,A} \otimes Id) \, , u \otimes u\Big)$ *(resp. la cogèbre* $\Big(C \otimes C \, , (Id \otimes \tau_{C,C} \otimes Id) \circ (\Delta \otimes \Delta) \, , \varepsilon \otimes \varepsilon\Big)$*) est dite engendrée par* $(A \, , M \, , u)$ *(resp.* $(C \, , \Delta \, , \varepsilon)$*) . Désormais, on la note* $A \otimes A$ *(resp.* $C \otimes C$*) sans ambiguïté.*

Maintenant, on a bien défini l'algèbre et la cogèbre. Si un espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre et simultanément d'une structure de cogèbre, peut-on dire qu'il est une bigèbre ? Non ! Il n'est que la composition d'une algèbre et d'une cogèbre. Entre ces deux structure, on a besoin d'une compatibilité. Sinon, les bonne propriétés de bigèbres ne se montraient pas. On introduit la compatibilité suivante.

Définition 4.3.3. *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace vectoriel. Supposons que* $\mathcal{H}$ *soit muni simultanément d'une structure d'algèbre* $(\mathcal{H} \, , M \, , u)$ *et d'une structure de cogèbre* $(\mathcal{H} \, , \Delta \, , \varepsilon)$*. On dit que ces deux structure sont compatibles si l'une des deux conditions est vérifiée :*
i) M *et* u *sont des morphismes de cogèbre* $(\mathcal{H} \, , \Delta \, , \varepsilon)$ *.*
ii) Δ *et* ε *sont des morphismes d'algèbre* $(\mathcal{H} \, , M \, , u)$ *.*

Proposition 4.3.2. *Ces deux conditions sont équivalentes.*

Démonstration. Par la définiton [4.3.1], i) est équivalente aux diagrammes commutatifs suivants.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "(Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (\Delta \otimes \Delta)"] & \mathcal{H} \arrow[d, "\Delta"] \\ (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \otimes (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \arrow[r, "M \otimes M"] & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\varepsilon \otimes \varepsilon"] & \mathcal{H} \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\sim"] & \mathcal{H} \arrow[d, "\Delta"] \\ \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "u \otimes u"] & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

ii) est équivalente aux diagrammes suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "M"'] & (\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})\otimes(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) \arrow[d, "(M\otimes M)\circ(Id\otimes\tau\otimes Id)"'] \\ \mathcal{H} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \\ \mathbb{K} \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{K}\otimes\mathbb{K} \arrow[u, "u\otimes u"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "M"'] & \mathbb{K}\otimes\mathbb{K} \arrow[d, "\sim"] \\ \mathcal{H} \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{K} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{K} \arrow[dl, "\sim"] \\ \mathbb{K} \arrow[u, "u"] & \end{tikzcd}$$

Les quatre diagrammes dans i) sont mêmes que ceux de dans ii) . □

Maintenant, on précise la définition de bigèbre.

Définition 4.3.4. *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel. On dit que $(\mathcal{H}\,,M\,,u\,,\Delta\,,\varepsilon)$ est une bigèbre lorsque :*
i) $\big(\mathcal{H}\,,M\,,u\big)$ est une algèbre ;
ii) $\big(\mathcal{H}\,,\Delta\,,\varepsilon\big)$ est une cogèbre ;
iii) Δ et ϵ sont des morphismes de l'algèbre $\big(\mathcal{H}\,,M\,,u\big)$.

4.4 L'algèbre de Hopf

Soient $(A\,,M\,,u)$ une algèbre et $(C\,,\Delta\,,\varepsilon)$ une cogèbre. On considère l'espace vectoriel $Hom(C\,,A)$ des homomorphismes de C dans A .

Définition 4.4.1 (Convolution). *Soient $f\,,g\in Hom(C\,,A)$. La convolution $f*g$ est définie par $f*g=M\circ(f\otimes g)\circ\Delta$.*

$$\begin{tikzcd} C\otimes C \arrow[r, "f\otimes g"] & A\otimes A \arrow[d, "M"] \\ C \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "f*g"] & A\ . \end{tikzcd}$$

Remarque 4.4.1. *Grâce à la notation de M.Sweedler, pour tout $c\in C$,*

$$f*g(c)=\sum_c f(c^1)g(c^2)\ .$$

Proposition 4.4.1. *Soient $(A\,,M\,,u)$ une algèbre et $(C\,,\Delta\,,\varepsilon)$ une cogèbre. $\big(Hom(C\,,A)\,,*\big)$ est une algèbre unitaire d'unité $u\circ\varepsilon$.*

Démonstration. Pour tout $f\in Hom(C\,,A)$, $c\in C$,

$$(u\circ\varepsilon)*f(c)=\sum_c(u\circ\varepsilon)(c^1)f(c^2)$$

.

$$u\circ\varepsilon(c^1)=\varepsilon(c^1)u(1_{\mathbb{K}})=\varepsilon(c^1)\ .$$

Alors,

$$(u\circ\varepsilon)*f(c)=\sum_c\varepsilon(c^1)f(c^2)=f\Big(\sum_c\varepsilon(c^1)c^2\Big)\ .$$

D'après l'axiome de counité de C , $\sum_c \varepsilon(c^1)c^2 = c$.
D'où, on a : $(u \circ \varepsilon) * f(c) = f(c)$.
Alors, $u \circ \varepsilon$ est l'unité. Il reste à montrer l'associativité de $*$.

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(c) &= \sum_c (f * g)(c^1)h(c^2) \\
&= \sum_{c,c^1} f(c^{1,1})g(c^{1,2})h(c^2) \\
&= < f \otimes g \otimes h \, , \sum_c c^1 \otimes c^2 \otimes c^3 > .
\end{aligned}$$

De même, $f*(g*h)(c) = < f \otimes g \otimes h \, , \sum_c c^1 \otimes c^2 \otimes c^3 >$, de sorte que $*$ soit associative.

Donc $\big(Hom(C\,,A)\,,*\big)$ est une algèbre d'unité $u \circ \varepsilon$. $\square$

Définition 4.4.2. *Soit $(\mathcal{H}\,,M\,,u\,,\Delta\,,\varepsilon)$ une bigèbre. On considère $End(\mathcal{H})$ l'endomorphisme de $\mathcal{H}$. Soit Id l'identité. S'il existe $S \in End(\mathcal{H})$ tel que $S * Id = Id * S = u \circ \varepsilon$, S est appelé antipode de $\mathcal{H}$.*

Définition 4.4.3. *Une bigèbre possédant une antipode est une algèbre de Hopf. Par la notation ci-dessus, notons $(\mathcal{H}\,,M\,,u\,,\Delta\,,\varepsilon\,,S)$ l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ avec l'antipode S .*

Remarque 4.4.2. *La définition de l'algèbre de Hopf est résumée par les diagrammes suivants :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[r, "Id\otimes M"] \arrow[d, "M\otimes Id"'] & \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[d, "M"] \\
\mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[r, "M"] & \mathcal{H}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H} & \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[l, "Id\otimes\Delta"'] \\
\mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[u, "\Delta\otimes Id"] & \mathcal{H} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[dd, "M"] & \\
\mathbb{K}\otimes\mathcal{H} \arrow[ur, "u\otimes Id"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \mathcal{H}\otimes\mathbb{K} \arrow[ul, "Id\otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& \mathcal{H} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[dl, "\varepsilon\otimes Id"'] \arrow[dr, "Id\otimes\varepsilon"] & \\
\mathbb{K}\otimes\mathcal{H} & & \mathcal{H}\otimes\mathbb{K} \\
& \mathcal{H} \arrow[uu, "\Delta"] \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[r, "S\otimes Id"] & \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[dr, "M"] & \\
\mathcal{H} \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & \mathbb{K} \arrow[r, "u"] & \mathcal{H} \,. \\
& \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[r, "Id\otimes S"] & \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[ur, "M"'] &
\end{tikzcd}$$

Définition 4.4.4. *Soient* $(\mathcal{H}\,,M\,,u\,,\Delta\,,\varepsilon\,,S)$, $(\tilde{\mathcal{H}}\,,\tilde{M}\,,\tilde{u}\,,\tilde{\Delta}\,,\tilde{\varepsilon}\,,\tilde{S})$ *deux algèbres de Hopf. Un morphisme d'algèbre de Hopf est une application* $f:\mathcal{H}\longrightarrow\tilde{\mathcal{H}}$ *qui vérifie non seulement les quatre diagrammes de la définition [4.3.1] mais aussi celui de suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S"'] & \tilde{\mathcal{H}} \arrow[d, "\tilde{S}"] \\ \mathcal{H} \arrow[r, "f"'] & \tilde{\mathcal{H}} \end{tikzcd} .$$

Remarque 4.4.3. *En effet, le diagramme ci-dessus impose la commutativité entre* f *et les antipodes* S , $\tilde{S}$.

De même que pour un espace vectoriel ou une algèbre, une algèbre de Hopf peut être aussi graduée :

Définition 4.4.5. *Soit* $(\mathcal{H}\,,M\,,u\,,\Delta\,,\varepsilon\,,S)$ *une algèbre de Hopf. On dit que* $\mathcal{H}$ *est une algèbre de Hopf graduée lorsqu'il existe une graduation* $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de l'espace vectoriel* $\mathcal{H}$ *telle que :*

$$\begin{cases} \forall m\,,n\in\mathbb{N}\,, M(\mathcal{H}_m\otimes\mathcal{H}_n)\subset\mathcal{H}_{m+n} \\ \forall n\in\mathbb{N}\,,\Delta(\mathcal{H}_m)\subset\displaystyle\sum_{k\,,l\geq 0\,,k+l=n}\mathcal{H}_k\otimes\mathcal{H}_l \end{cases} .$$

Chapitre 5

Les shuffles

5.1 La définition du shuffle et ses propriétés

Dans cette section, on introduit le produit de mélange de deux mots de $\mathbb{K}<A>$. Rappelons qu'en anglais, cette notion s'appelle le shuffle, ce qui justifiera la notation.

Notation 5.1.1. *Soient $\omega = a_1 a_2 \cdots a_n \in A^*$ un mot de longueur n et $I \subset [\![1;n]\!]$. Si $I = \varnothing$, on pose $\omega_{|I} = \varepsilon$; si $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$, on pose $\omega_{|I} = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$.*

Remarque 5.1.1. *Par définition, si l'on se donne une partition de $[\![1;n]\!]$, c'est-à-dire p ensemble $I_1 , I_2 , \cdots , I_p$ vérifiant $\bigsqcup_{j=1}^{p} I_j = [\![1;n]\!]$ et les mots $\omega_{|I_1} , \cdots , \omega_{|I_p}$, on retrouve naturellement ω .*
Par exemple, si $A = \{a , b , c\}$, $I_1 = \{1;3;4\}$, $I_2 = \{2;7;9\}$, $I_3 = \{5;6;8\}$ avec $\omega_{|I_1} = abc$, $\omega_{|I_2} = bca$, $\omega_{|I_3} = cab$, alors, on retrouve $\omega = abbccacba$.
Même s'il s'agit d'une remarque évidente, on l'utilisera très fréquemment dans la suite.

Si l'on se donne p mots u_i de longueur $n_i , i = 1 , 2 , \cdots , p$, on peut définir leur mélange d'une manière pratique. On marque $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ places sur une droite. On choisit d'abord n_1 places arbitrairement, on y place les lettres du mot u_1 de gauche à droit, c'est-à-dire les unes après les autres. On fait de même pour u_2 , u_3 jusqu'à u_p en utilisant les places restantes. On a donc construit un mot de longueur $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$, noté $U\big(I_1 , \cdots , I_p\big)$ où I_i désigne le sous-ensemble de $[\![1; n_1 + \cdots + n_p]\!]$ de places choisies pour situer les lettres du mot obtenu.
A la ligne, en parcourant toutes les places possibles de cette façon et en effectuant la somme de tous les mots ainsi obtenus, on obtient ce que l'on appelle le produit de mélange des mots $u_1 , \cdots , u_p$. Maintenant, on se donne la définition du shuffle en mathématique.

Définition 5.1.1 (Le shuffle des mots). *Soient $(u_1; \cdots ; u_p) \in A^*$ des mots de longueur $n_i , i = 1 , 2 , \cdots , p$. Leur mélange est un polynôme de $\mathbb{K}<A>$ défini par*

$$u_1 \sqcup\!\sqcup\, u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, u_p = \sum U\big(I_1 , I_2 , \cdots , I_p\big) \ .$$

où la somme s'effectue sur l'ensemble des partitions de $[\![1; n_1 + \cdots + n_p]\!]$ vérifiant $|I_j| = n_j$, pour tout $j = 1 , 2 , \cdots , p$.

Exemple : Si $A = \{a\,, b\,, c\,, d\}$, $u_1 = ab$, $u_2 = cd$,

$$u_1 \sqcup\!\sqcup\, u_2 = abcd + acbd + acdb + cabd + cadb + cdab\ .$$

Remarque 5.1.2. *Avec la notation précédente, la somme contient* $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_p!}$ *termes.*

Remarque 5.1.3. *S'il y a un mot vide parmi les* $u_j\,, j = 1\,, 2\,, \cdots\,, p$ *, celui-ci n'interviendra pas dans leur produit de mélange. On peut donc le supprimer. Le produit de mélange est un opérateur binaire commutatif car la somme est pour toutes les possibilités de* $I_j\,, j = 1\,, 2\,, \cdots\,, p$ *.*

On a bien défini le mélange de A^* ; maintenant, on va prolonger cette notion à $\mathbb{K}{<}A{>}$ et $\mathbb{K}{\ll}A{\gg}$ par p-linéarité.

Rappel : $\mathbb{K}[A]$ désigne l'ensemble des polynômes (commutatifs) engendré par A sur $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}[[A]]$ désigne l'ensemble des séries formelles correspondantes. $\mathbb{K}<A>$ désigne l'ensemble des polynômes non-commutatifs correspondants et $\mathbb{K}{\ll}A{\gg}$ désigne l'ensemble des séries formelles non-commutatives correspondantes.

Définition 5.1.2. *Soit* $\big(P_1\,; \cdots ; P_p\big) \in \mathbb{K}{<}A{>}^p$ *, où* $p \in \mathbb{N}^*$ *.*
En notant $P_i = \sum_{u_i \in A^*} \big(P_i\,, u_i\big) u_i$ *, on définit* $P_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup P_p$ *par :*

$$P_1 \sqcup\!\sqcup P_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup P_p = \sum_{(u_1\,;u_2\,;\cdots\,;u_p) \in (A^*)^p} \Big(\prod_{i=1}^{p} (P_i\,, u_i) \Big) u_1 \sqcup\!\sqcup u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_p\ .$$

Remarque 5.1.4. *Chaque* P_j *est une somme finie. La dernière expression est donc bien une somme finie i.e. appartenant à* $\mathbb{K}{<}A{>}$ *. Donc ce prolongement du produit de mélange par p-linéarité a bien un sens.*

Définition 5.1.3. *On définit le produit de mélange sh (le shuffle) par :*

$$\begin{array}{rccc} sh: & \mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>} & \longrightarrow & \mathbb{K}{<}A{>} \\ & P_1 \otimes P_2 & \longmapsto & P_1 \sqcup\!\sqcup P_2\ . \end{array}$$

Définition 5.1.4. *Dans le cas où les séries formelles* $S_j \in \mathbb{K}{\ll}A{\gg}$ *, la définition est identique sauf que la somme est infinie.*

Corollaire 5.1.1. $(\mathbb{K}{<}A{>}\,, \sqcup\!\sqcup\,, \varepsilon)$ *est une algèbre unitaire.* $(\mathbb{K}{\ll}A{\gg}\,, \sqcup\!\sqcup\,, \varepsilon)$ *aussi.*

5.2 Les opérateurs duaux du produit de mélange et de la concaténation

Dans cette section, on ne parle que de la situation $\mathbb{K}{<}A{>}$. Celle de $\mathbb{K}{\ll}A{\gg}$ est un prolongement naturel.

Définition 5.2.1. *Avec la multiplication introduite dans la définition [2.2.2], on définit pour* $p \in \mathbb{N}^*$ *l'algèbre :*

$$\mathcal{F}_p = \mathbb{K}{<}A{>}^{\otimes p}\ .$$

Notation 5.2.1. *Désormais, on notera plus simplement* 1 *le mot vide* ε *par* 1 *.*

Définition 5.2.2. *On définit un morphisme* δ_p *de* $\mathbb{K}$<A> *dans* $\mathcal{F}_p$ *par :*
pour tout $a \in A$ *,*

$$\delta_p(a) = a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a \ ;$$

pour tout $\omega = a_1 \cdots a_n$ *,*

$$\delta_p(\omega) = \delta_p(a_1) \cdots \delta_p(a_n) \ .$$

Proposition 5.2.1. *Si* $\omega \in A^*$ *, on a :*

$$\delta_p(\omega) = \sum_{(u_1\,;u_2\,;\cdots\,;u_p)\in(A^*)^p} (\omega\,, u_1 \sqcup\!\sqcup\, u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, u_p) u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \ .$$

Démonstration. Soit $\omega = a_1 a_2 \cdots a_n \in A^*$.

$$\begin{aligned}
\delta_p(a_1 a_2 \cdots a_n) =& \delta_p(a_1)\delta_p(a_2)\cdots\delta_p(a_n) \\
=& \prod_{i=1}^{n} (a_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a_i) \\
=& \sum_{\bigsqcup_{j=1}^{p} I_j = \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} (\omega_{|I_1}) \otimes (\omega_{|I_2}) \otimes \cdots \otimes (\omega_{|I_p}) \ .
\end{aligned}$$

D'autre part, si $(u_1\,, \cdots\,, u_p) \in (A^*)^p$, on a :

$$u_1 \sqcup\!\sqcup\, u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, u_p = \sum_{\bigsqcup_{j=1}^{p} I_j = \{1\,;2\,;\cdots\,;n\}\,,|I_j| = l(u_j)} u(I_1\,, I_2\,, \cdots\,, I_p) \quad ,$$

où $l(u)$ désigne la longueur du mot $u \in A^*$.
Alors :

$$\sum_{(u_1\,;u_2\,;\cdots\,;u_p)\in(A^*)^p} (\omega\,, u_1 \sqcup\!\sqcup\, u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, u_p) u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p$$

$$= \sum_{(u_1\,;u_2\,;\cdots\,;u_p)\in(A^*)^p} \ \sum_{\bigsqcup_{j=1}^{p} I_j = \{1\,;2\,;\cdots\,;n\}\,,|I_j| = l(u_j)} \big(\omega\,, u(I_1\,, I_2\,, \cdots\,, I_p)\big) u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p$$

$$= \sum_{\bigsqcup_{j=1}^{p} I_j = \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} \ \sum_{(u_1\,;u_2\,;\cdots\,;u_p)\in(A^*)^p} \big(\omega\,, u(I_1\,, I_2\,, \cdots\,, I_p)\big) u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \ .$$

Les sommes ci-dessus sont des sommes finies, ce qui explique que l'on puisse échanger l'ordre de sommation. Quand $I_j\,, j = 1\,, 2\,, \cdots\,, p$ sont fixés, le seul cas où $\big(\omega\,, u(I_1\,, I_2\,, \cdots\,, I_p)\big)$ n'est pas zéro est $u_j = \omega_{|I_j}$.

$$\sum_{(u_1\,;u_2\,;\cdots\,;u_p)\in(A^*)^p} (\omega\,, u_1 \sqcup\!\sqcup\, u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, u_p) u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p$$
$$= \sum_{\bigsqcup_{j=1}^{p} I_j = \{1\,;2\,;\cdots\,;n\}} \omega_{|I_1} \otimes \omega_{|I_2} \otimes \cdots \otimes \omega_{|I_p} \ . \qquad \square$$

Corollaire 5.2.1. *Pour tout* $S \in \mathbb{K}{<}A{>}$ *, on a :*

$$\delta_p(S) = \sum_{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_p \in A^*} (S\,,u_1 \sqcup\!\sqcup u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_p) u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \ .$$

Notation 5.2.2. *On note* $\delta = \delta_2$ *.*

Corollaire 5.2.2. *Pour tout* $S \in \mathbb{K}{<}A{>}$ *, on a :*

$$\delta(S) = \sum_{u_1\,,u_2 \in A^*} (S\,,u_1 \sqcup\!\sqcup u_2) u_1 \otimes u_2 \ .$$

Proposition 5.2.2. *Rappelons le produit de mélange*
$sh : \mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>} \longrightarrow \mathbb{K}{<}A{>}$ *. On a :* $sh^* = \delta$ *.*

Démonstration. En effet, on a besoin de montrer que :

$$\big(sh^*(w)\,,u \otimes v\big) = \big(\delta(w)\,,u \otimes v\big)$$

pour tout triplet $(u\,;v\,;w) \in (A^*)^3$.
D'après le corollaire [5.2.2], $\delta(w) = \sum_{u\,,v \in A^*} (w\,,u \sqcup\!\sqcup v) u \otimes v$, alors :

$$\big(\delta(w)\,,u \otimes v\big) = (w\,,u \sqcup\!\sqcup v) = \big(w\,,sh(u \otimes v)\big) = \big(u \otimes v\,,sh^*(w)\big) \ .$$

□

Définition 5.2.3. *Habituellement, on définit la concaténation sur*
$\mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>}$ *par :*

$$conc(u_1 \otimes u_2\,,v_1 \otimes v_2) = conc(u_1\,,v_1) \otimes conc(u_2\,,v_2) = u_1 v_1 \otimes u_2 v_2 \ .$$

On note plus simplement $uv = conc(u\,,v)$ *.*
Le shuffle sur $\mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>}$ *est défini par :*

$$(u_1 \otimes u_2) \sqcup\!\sqcup (v_1 \otimes v_2) = (u_1 \sqcup\!\sqcup v_1) \otimes (u_2 \sqcup\!\sqcup v_2) \ .$$

Proposition 5.2.3. *Si l'on voit la concaténation «conc» comme une application linéaire* $conc : \mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>} \longrightarrow \mathbb{K}{<}A{>}$ *. Pour tout* $R \in \mathbb{K}{<}A{>}$ *, on a :* $conc^*(R) = \sum_{u\,,v \in A^*} (R\,,uv) u \otimes v$ *.*

Démonstration. Pour tout $(u\,;v) \in (A^*)^2$ et $R \in \mathbb{K}{<}A{>}$,

$$\big(u \otimes v\,,conc^*(R)\big) = \big(conc(u \otimes v)\,,R\big) = (uv\,,R) \ .$$

Donc, $conc^*(R) = \sum_{u\,,v \in A^*} (R\,,uv) u \otimes v$. □

On introduit un lemme pour proposer les propriétés de sh^* et de $conc^*$.

Lemme 5.2.1. *Pour tout* $x\,,y\,,u\,,v \in A^*$ *, on a*

$$(xy\,,u \sqcup\!\sqcup v) = \sum_{u_1\,,u_2\,,v_1\,,v_2 \in A^*} (x\,,u_1 \sqcup\!\sqcup v_1)(y\,,u_2 \sqcup\!\sqcup v_2)(u\,,u_1 u_2)(v\,,v_1 v_2) \ .$$

Démonstration. $\delta(xy) = \delta(x)\delta(y)$, d'où

$$\sum_{u\,,v\in A^*} (xy\,,u \sqcup v)u \otimes v = \Big(\sum_{u_1\,,v_1} (x\,,u_1 \sqcup v_1)u_1 \otimes v_1\Big)\Big(\sum_{u_2\,,v_2\in A^*} (y\,,u_2 \sqcup v_2)u_2 \otimes v_2\Big)$$
$$= \sum_{u_1\,,v_1\,,u_2\,,v_2} (x\,,u_1 \sqcup v_1)(y\,,u_2 \sqcup v_2)(u_1u_2 \otimes v_1v_2)\ .$$

On fait le produit scalaire avec $u \otimes v$, donc

$$(xy\,,u \sqcup v) = \sum_{u_1\,,u_2\,,v_1\,,v_2\in A^*} (x\,,u_1 \sqcup v_1)(y\,,u_2 \sqcup v_2)(u\,,u_1u_2)(v\,,v_1v_2)\ .$$

□

Proposition 5.2.4. *i) sh^* est un morphisme pour la concaténation.*
ii) $conc^*$ est un morphisme pour le shuffle.

Démonstration. i) Soient $x\,,y \in A^*$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
sh^*(xy) &= \sum_{u\,,v\in A^*} (xy\,,u \sqcup v)u \otimes v\\
&= \sum_{u\,,v\in A^*}\ \sum_{u_1\,,u_2\,,v_1\,,v_2\in A^*} (x\,,u_1 \sqcup v_1)(y\,,u_2 \sqcup v_2)(u\,,u_1u_2)(v\,,v_1v_2)u \otimes v\\
&= \sum_{u_1\,,u_2\,,v_1\,,v_2\in A^*} \Big((x\,,u_1 \sqcup v_1)(y\,,u_2 \sqcup v_2)\big(\sum_{u\,,v\in A^*} (u\,,u_1u_2)(v\,,v_1v_2)u \otimes v\big)\Big)\\
&= \sum_{u_1\,,u_2\,,v_1\,,v_2\in A^*} (x\,,u_1 \sqcup v_1)(y\,,u_2 \sqcup v_2)(u_1u_2 \otimes v_1v_2)\\
&= \sum_{u_1\,,u_2\,,v_1\,,v_2\in A^*} (x\,,u_1 \sqcup v_1)(y\,,u_2 \sqcup v_2)(u_1 \otimes v_1)(u_2 \otimes v_2)\\
&= \Big(\sum_{u_1\,,v_1\in A^*} (x\,,u_1 \sqcup v_1)(u_1 \otimes v_1)\Big)\Big(\sum_{u_2\,,v_2\in A^*} (y\,,u_2 \sqcup v_2)(u_2 \otimes v_2)\Big)\\
&= sh^*(x)sh^*(y)\ .
\end{aligned}$$

ii) D'après la proposition [5.2.3], on a :

$$conc^*(x \sqcup y) = \sum_{u\,,v\in A^*} (x \sqcup y\,,uv)u \otimes v\ .$$

En procédant de même que pour sh^* , on a :

$$\begin{aligned}
conc^*(x \sqcup\!\sqcup y) &= \sum_{u\,,v\in A^*} (x \sqcup\!\sqcup y\,, uv) u \otimes v \\
&= \sum_{u\,,v\in A^*} \sum_{u_1\,,u_2\,,v_1\,,v_2\in A^*} (u\,, u_1 \sqcup\!\sqcup v_1)(v\,, u_2 \sqcup\!\sqcup v_2)(x\,, u_1u_2)(y\,, v_1v_2) u \otimes v \\
&= \sum_{u_1\,,u_2\,,v_1\,,v_2\in A^*} \Big((x\,, u_1u_2)(y\,, v_1v_2) \big(\sum_{u\,,v\in A^*} (u\,, u_1 \sqcup\!\sqcup v_1)(v\,, u_2 \sqcup\!\sqcup v_2) u \otimes v \big) \Big) \\
&= \sum_{u_1\,,u_2\,,v_1\,,v_2\in A^*} (x\,, u_1u_2)(y\,, v_1v_2)(u_1 \sqcup\!\sqcup v_1) \otimes (u_2 \sqcup\!\sqcup v_2) \\
&= \sum_{u_1\,,u_2\,,v_1\,,v_2\in A^*} (x\,, u_1u_2)(y\,, v_1v_2)(u_1 \otimes u_2) \sqcup\!\sqcup (v_1 \otimes v_2) \\
&= \Big(\sum_{u_1\,,u_2\in A^*} (x\,, u_1u_2)(u_1 \otimes u_2) \Big) \sqcup\!\sqcup \Big(\sum_{v_1\,,v_2\in A^*} (y\,, v_1v_2)(v_1 \otimes v_2) \Big) \\
&= conc^*(x) \sqcup\!\sqcup conc^*(y)\ .
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 6

La construction d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{K}{<}A{>}$

6.1 Quelques opérateurs sur $\mathbb{K}{<}A{>}$

Commençons cette section par définir quelques opérateurs sur $\mathbb{K}<A>$. Nous donnerons ensuite quelques liens entre eux.

Définition 6.1.1. *Définissons les opérateurs α et D de A^* en donnant leur action sur le mot $\omega = a_1a_2\cdots a_n$, et étendu par linéarité à $\mathbb{K}{<}A{>}$:*
i) $\alpha(\omega) = (-1)^n a_n a_{n-1}\cdots a_1$.
ii) $D(\omega) = l(\omega)\omega$ où $l(\omega)$ désigne la longueur de ω .
iii) On définit aussi $\bar{\delta}$ par $\bar{\delta} = (Id \otimes \alpha)\circ\delta$, où Id est l'identité de $\mathbb{K}{<}A{>}$.
iv) On définit un crochet de Lie sur $\mathbb{K}<A>$ en posant $[\omega_1\,,\omega_2] = \omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1$. Celui-ci est étendu par linéarité à $\mathbb{K}{<}A{>}$.
v) On définit aussi r par $r(\omega) = [a_1\,,\cdots,[a_{n-1}\,,a_n]]$, r(1)=0. On l'appelle le crochet de Lie de droit à gauche.

Remarque 6.1.1. *D est une dérivation de $\mathbb{K}{<}A{>}$.*

Démonstration. En effet, soient $(P_1\,;P_2) \in \mathbb{K}{<}A{>}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
D(P_1P_2) &= \sum_{\omega_1\,,\omega_2\in A^*}(P_1\,,\omega_1)(P_2\,,\omega_2)D(\omega_1\omega_2)\\
&= \sum_{\omega_1\,,\omega_2\in A^*}(P_1\,,\omega_1)(P_2\,,\omega_2)l(\omega_1\omega_2)\omega_1\omega_2\\
&= \sum_{\omega_1\,,\omega_2\in A^*}(P_1\,,\omega_1)(P_2\,,\omega_2)\big(l(\omega_1)+l(\omega_2)\big)\omega_1\omega_2\\
&= \sum_{\omega_1\,,\omega_2\in A^*}(P_1\,,\omega_1)(P_2\,,\omega_2)l(\omega_1)\omega_1\omega_2 + \sum_{\omega_1\,,\omega_2\in A^*}(P_1\,,\omega_1)(P_2\,,\omega_2)l(\omega_2)\omega_1\omega_2\\
&=D(P_1)P_2 + P_1D(P_2)\ .
\end{aligned}$$

□

Proposition 6.1.1. *Soit* $\lambda : \mathbb{K}\langle A\rangle \otimes \mathbb{K}\langle A\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle A\rangle$ *définie par* $\lambda(P \otimes Q) = D(P)Q$ *, où* $(P\,;Q) \in \mathbb{K}\langle A\rangle^2$ *. Pour tout* $P \in \mathbb{K}\langle A\rangle$ *, on a :* $\lambda \circ \bar{\delta}(P) = r(P)$ *et* $conc \circ \bar{\delta}(P) = (P\,,1)1$ *.*[1]

Démonstration. **Le cas** $n = 0$ **(**$P = 1$**) :** $\bar{\delta}(1) = 1 \otimes 1$, $\lambda \circ \bar{\delta}(1) = 0 = r(1)$, $conc \circ \bar{\delta}(1) = 1$.
Le cas $n = 1$ **:** $\bar{\delta}(a_1) = a_1 \otimes 1 - 1 \otimes a_1$, $\lambda \circ \bar{\delta}(a_1) = a_1 = r(a_1)$, $conc \circ \bar{\delta}(a_1) = 0$.
Vérifions les deux égalités par récurrence ; pour cela, on a besoin de ne montrer que sur les mots. Supposons que la proposition soit vraie dans le cas des mots de longueur n , et fixons $\omega = a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$ vérifiant

$$\delta(a_2 a_3 \cdots a_{n+1}) = \sum_i P_i \otimes Q_i \quad ,$$

où P_i , Q_i sont des mots de longueur non-supérieur que n . L'hypothèse de récurrence nous donne alors

$$\begin{aligned} r(a_2a_3\cdots a_{n+1}) &= \lambda \circ \bar{\delta}(a_2a_3\cdots a_{n+1}) \\ &= \lambda \circ (Id \otimes \alpha)\Big(\sum_i P_i \otimes Q_i\Big) \\ &= \lambda\Big(\sum_i P_i \otimes \alpha(Q_i)\Big) \\ &= \sum_i D(P_i)\alpha(Q_i) \ . \\ (a_2a_3\cdots a_{n+1}\,,1)1 &= conc \circ \bar{\delta}(a_2a_3\cdots a_{n+1}) \\ &= conc \circ (Id \otimes \alpha)\Big(\sum_i P_i \otimes Q_i\Big) \\ &= conc\Big(\sum_i P_i \otimes \alpha(Q_i)\Big) \\ &= \sum_i P_i\alpha(Q_i) \ . \end{aligned}$$

D'où, $\sum_i D(P_i)\alpha(Q_i) = r(a_2a_3\cdots a_{n+1})$ et $\sum_i P_i\alpha(Q_i) = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(a_1a_2\cdots a_{n+1}) &= (Id \otimes \alpha)\big(\delta(a_1)\delta(a_2a_3\cdots a_{n+1})\big) \\ &= (Id \otimes \alpha)\Big((a_1 \otimes 1 + 1 \otimes a_1)\big(\sum_i P_i \otimes Q_i\big)\Big) \\ &= \sum_i (Id \otimes \alpha)\big(a_1P_i \otimes Q_i + P_i \otimes a_1Q_i\big) \\ &= \sum_i \Big(a_1P_i \otimes \alpha\big(Q_i\big) + P_i \otimes \alpha\big(a_1Q_i\big)\Big) \\ &= \sum_i \Big(a_1P_i \otimes \alpha\big(Q_i\big) - P_i \otimes \alpha\big(Q_i\big)a_1\Big) \ . \end{aligned}$$

1. On rappelle la notation «*conc*» dans la proposition [5.2.3].

$$\begin{aligned}
\lambda \circ \bar{\delta}(a_1 a_2 \cdots a_{n+1}) =& \sum_i \Big(\big(a_1 D(P_i) + a_1 P_i\big)\alpha\big(Q_i\big) - D\big(P_i\big)\alpha\big(Q_i\big)a_1 \Big) \\
=& a_1\Big(\sum_i D\big(P_i\big)\alpha\big(Q_i\big)\Big) + a_1\Big(\sum_i P_i\alpha\big(Q_i\big)\Big) - \Big(\sum_i D\big(P_i\big)\alpha\big(Q_i\big)\Big)a_1 \\
=& a_1 \sum_i \lambda\Big(P_i \otimes \alpha\big(Q_i\big)\Big) + a_1 \sum_i conc\Big(P_i \otimes \alpha\big(Q_i\big)\Big) - \sum_i \lambda\Big(P_i \otimes \alpha\big(Q_i\big)\Big) \\
=& a_1\big(\lambda \circ \bar{\delta}(a_2 \cdots a_{n+1})\big) + a_1\big(conc \circ \bar{\delta}(a_2 \cdots a_{n+1})\big) - \big(\lambda \circ \bar{\delta}(a_2 \cdots a_{n+1})\big)a_1 \\
=& a_1 r(a_2 a_3 \cdots a_{n+1}) - r(a_2 a_3 \cdots a_{n+1})a_1 \\
=& r(a_1 a_2 \cdots a_{n+1}) \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
conc \circ \bar{\delta}(a_1 a_2 \cdots a_{n+1}) =& \sum_i \Big(a_1 P_i \alpha\big(Q_i\big) - P_i \alpha\big(Q_i\big)a_1\Big) \\
=& a_1\Big(\sum_i \big(P_i\alpha(Q_i)\big)\Big) - \Big(\sum_i \big(P_i\alpha(Q_i)\big)\Big)a_1 \\
=& 0 \ .
\end{aligned}$$

□

6.2 La construction d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{K}<A>$

Proposition 6.2.1. $\big(\mathbb{K}<A>\, , conc\, , k \cdot 1\, , \delta\, , (-\, , 1)\big)$ *est une bigèbre.*

Démonstration. On va vérifier les diagrammes dans les définitions [4.1.1 ,4.1.2 ,4.3.4] et la proposition [4.3.2].

Structure d'algèbre de $\mathbb{K}<A>$ **:**

La proposition [3.2.1] nous dit que $\big(\mathbb{K}<A>\, , conc\, , k \cdot 1\big)$ est une algèbre.

Structure de cogèbre de $\mathbb{K}<A>$ **:**

Axiome de coassociativité :

Pour tout $\omega \in A^*$

$$\begin{aligned}
(\delta \otimes Id) \circ \delta(\omega) =& (\delta \otimes Id)\Big(\sum_{u\,,v} (\omega\, , u \sqcup v) u \otimes v\Big) \\
=& \sum_{u\,,v}(\omega\, , u \sqcup v)\Big(\sum_{u'\,,u''} (u\, , u' \sqcup u'')u' \otimes u''\Big) \otimes v \\
=& \sum_{u'\,,u''\,,v} \Big(\sum_u (\omega\, , u \sqcup v)(u\, , u' \sqcup u'')\Big)u' \otimes u'' \otimes v \\
=& \sum_{u'\,,u''\,,v} \Big(\omega\, , u' \sqcup u'' \sqcup v\Big)u' \otimes u'' \otimes v \ .
\end{aligned}$$

De même, on a le même résultat de $(Id{\otimes}\delta){\circ}\delta$, on a prouvé l'axiome de coassociativité.

Axiome de counité :

Pour tout $\omega \in A^*$,

$$\begin{aligned}
\big((-\, , 1) \otimes Id\big) \circ \delta(\omega) =& \sum_{u\,,v} (\omega\, , u \sqcup v)(u\, , 1) \otimes v \\
=& \sum_v (\omega\, , v) 1 \otimes v \\
=& 1 \otimes \omega = \omega \ .
\end{aligned}$$

De même, on a : $\big(Id \otimes (-\,,1)\big) \circ \delta = \sim$. On a prouvé l'axiome de counité.
Compatibilité entre les deux structures :
En effet, on doit montrer :
i) $\delta \circ conc = (conc \otimes conc) \circ (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (\delta \otimes \delta)$,
ii) $\delta \circ (k \cdot 1) = (k \cdot 1 \otimes k \cdot 1) \circ \sim$,
iii) $(-\,,1) \circ conc = \sim \circ((-\,,1) \otimes (-\,,1))$,
iv) $(-\,,1) \circ k \cdot 1 = \sim$.

Preuve de i) :
Pour tout $\omega_1\,,\omega_2 \in A^*$,

$$\begin{aligned}
&(conc \otimes conc) \circ (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (\delta \otimes \delta)(\omega_1 \otimes \omega_2)\\
=&(conc \otimes conc) \circ (Id \otimes \tau \otimes Id)\Big(\big(\sum_{u_1\,,v_1 \in A^*} (\omega_1\,, u_1 \sqcup\!\sqcup v_1) u_1 \otimes v_1\big) \otimes \big(\sum_{u_2\,,v_2 \in A^*} (\omega_2\,, u_2 \sqcup\!\sqcup v_2) u_2 \otimes v_2\big)\Big)\\
=&\sum_{u_1\,,v_1\,,u_2\,,v_2 \in A^*} (\omega_1\,, u_1 \sqcup\!\sqcup v_1)(\omega_2\,, u_2 \sqcup\!\sqcup v_2)(u_1u_2 \otimes v_1v_2)\\
=&\sum_{u\,,v \in A^*} \sum_{u_1\,,v_1\,,u_2\,,v_2 \in A^*} (\omega_1\,, u_1 \sqcup\!\sqcup v_1)(\omega_2\,, u_2 \sqcup\!\sqcup v_2)(u\,, u_1u_2)(v\,, v_1v_2) u \otimes v.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme [5.2.1],

$$\begin{aligned}
&(conc \otimes conc) \circ (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (\delta \otimes \delta)(\omega_1 \otimes \omega_2)\\
=&\sum_{u\,,v \in A^*} (\omega_1\omega_2\,, u \sqcup\!\sqcup v) u \otimes v\\
=&\delta(\omega_1\omega_2)\\
=&\delta \circ conc(\omega_1 \otimes \omega_2)\ .
\end{aligned}$$

Preuve de ii) :
Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on a : $\delta(k \cdot 1) = k\delta(1) = k1 \otimes 1$.
Donc, $\delta \circ (k \cdot 1) = (k \cdot 1 \otimes k \cdot 1) \circ \sim$.

Preuve de iii) :
Pour tout $\omega_1\,,\omega_2 \in A^*$, il est évident que

$$(\omega_1\,,1)(\omega_2\,,1) = (\omega_1\omega_2\,,1)\ .$$

Preuve de iv) :
Pour tout $k \in \mathbb{K}$, $(k \cdot 1\,,1) = k$.

Donc, ($\mathbb{K}$<A> $, conc\,, k \cdot 1\,, \delta\,, (-\,,1))$ est une bigèbre. □

On rappelle que la définition de la convolution a été donnée à la définition [4.4.1].

Proposition 6.2.2. *$\alpha \in End($$\mathbb{K}$<A>$)$ (voir la définition [6.1.1]) est l'antipode de la bigèbre* $\big($$\mathbb{K}$<A> $, conc\,, k \cdot 1\,, \delta\,, (-\,,1)\big)$

Démonstration. D'une part, par la proposition [6.1.1], on a :

$$Id * \alpha = conc \circ (Id \otimes \alpha) \circ \delta = conc \circ \bar{\bar{\delta}} = (- \,, 1)1 \ .$$

Alors, α est l'inverse à droite de Id .

D'autre part,

$$\begin{aligned} \alpha * Id =& conc \circ (\alpha \otimes Id) \circ \delta \\ =& \alpha \circ \alpha \circ conc \circ (\alpha \otimes Id) \circ \delta \text{ , car } \alpha \circ \alpha = Id \ . \\ =& \alpha \circ conc \circ (\alpha \otimes \alpha) \circ (\alpha \otimes Id) \circ \delta, \text{car } \alpha \circ conc = conc \circ (\alpha \otimes Id) \ . \\ =& \alpha \circ conc \circ (Id \otimes \alpha) \circ \delta \\ =& \alpha \circ \big((- \,, 1)1\big) \\ =& (- \,, 1)1 \ . \end{aligned}$$

Alors, α est l'inverse à gauche de Id .

Donc, α est l'antipode de $\mathbb{K}<A>$. □

Théorème 6.2.1. $\big(\mathbb{K}<A> \,, conc \,, k \cdot 1 \,, \delta \,, (- \,, 1) \,, \alpha\big)$ *est une algèbre de Hopf.*

Ce théorème est bien démontré par le travail précédent. Maintenant, on dessine le diagramme de l'algèbre de Hopf $\mathbb{K}<A>$ comme suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{K}<A> \otimes \mathbb{K}<A> \arrow[rr, "\alpha \otimes Id"] & & \mathbb{K}<A> \otimes \mathbb{K}<A> \arrow[dr, "conc"] & \\ \mathbb{K}<A> \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, "(- \,, 1)"] \arrow[dr, "\delta"'] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "k \cdot 1"] & & \mathbb{K}<A> \\ & \mathbb{K}<A> \otimes \mathbb{K}<A> \arrow[rr, "Id \otimes \alpha"] & & \mathbb{K}<A> \otimes \mathbb{K}<A> \arrow[ur, "conc"'] & \end{tikzcd}$$

De manière immédiate, on déduit de ce théorème :

Corollaire 6.2.1. $\big(\mathbb{K}<A> \,, conc \,, k \cdot 1 \,, \delta \,, (- \,, 1) \,, \alpha\big)$ *est une algèbre de Hopf graduée.*

Définition 6.2.1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur un corps $\mathbb{K}$ (reps. un anneau) . Une graduation sur $\mathcal{A}$ est la donnée d'une famille de sous-espaces vectoriels (resp. sous-modules) $\big(\mathcal{A}_i\big)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ vérifiant :*

i) $\mathcal{A} = \displaystyle\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ *;*

ii) $\forall (i \,, j) \in \mathbb{N}^2$ *, on a :* $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$ *.*
L'algèbre $\mathcal{A}$ est alors dite graduée.

Définition 6.2.2. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur un corps $\mathbb{K}$ (reps. un anneau) . $\mathcal{A}$ est dite filtrée si elle est la réunion d'une famille de sous-espaces vectoriels (resp. sous-modules) $\big(\mathcal{A}_i\big)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ vérifiant :*

i) $\mathcal{A}_0 = \mathbb{K}$ *;*

ii) $\forall (i\,,j) \in \mathbb{N}^2$ *vérifiant* $i \leq j$ *, on a :* $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_j$ *;*

iii) $\forall (i\,,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$.

On dispose du théorème suivant (cité de l'article [5]) :

Théorème 6.2.2. *Soit* $\big(\mathcal{H}\,, M\,, u\,, \Delta\,, \varepsilon\big)$ *une bigèbre filtrée connexe. Alors,* $\mathcal{H}$ *est automatiquement une algèbre de Hopf. L'antipode* S *est définie récursivement par :*
i) $S(1) = 1$ *;*
ii) $\forall x \in ker\varepsilon$ *,*

$$\begin{aligned} S(x) &= -\,x - \sum_{(x)} S(x^1)x^2 \\ &= -\,x - \sum_{(x)} x^1 S(x^2)\ , \end{aligned}$$

où $\Delta(x) = \sum_{x} x^1 \otimes x^2$ *, mais la somme s'effectue sauf si* $x^1 = x$ *et* $x^2 = x$ *.*

Remarque 6.2.1. *Ici,* $\mathbb{K}$<*A*> *est graduée (par la longueur des mots, donc filtrée) ; sa composante de poids est constitué des mots, donc est de dimension* 1 *. Cela signifie que* $\mathbb{K}$<*A*> *est filtrée connexe, donc il s'agit d'une algèbre de Hopf.*
Ici, la filtration utilisée est :
$\mathbb{K}$<*A*>$= \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_i < A >$ *avec* $\mathbb{K}_i < A >= Vect(a_1 \cdots a_i \in A^*)$ *et* $\mathbb{K}_0 < A >= \mathbb{K}$ *.*
Puisqu'avec la notation $\varepsilon = (-\,,1)$ *, on a :* $ker\varepsilon = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbb{K}_i < A >$ *.*
Donc, récursivement, on a :
si $a \in A$ *est une lettre,* $\delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$ *. Alors la somme* $\sum_{(x)} S(x^1)x^2$ *dans le théorème précédent n'existe pas. Donc* $S(a) = -a$ *.*
Si $a_1a_2 \in A^*$ *un mot de deux lettres,*

$$\delta(a_1a_2) = a_1a_2 \otimes 1 + a_1 \otimes a_2 + a_2 \otimes a_1 + 1 \otimes a_1a_2\ .$$

Donc,

$$\begin{aligned} S(a_1a_2) &= -\,a_1a_2 - S(a_1)a_2 - S(a_2)a_1 \\ &= a_2a_1\ . \end{aligned}$$

Bien que l'on sache déjà α est l'unique antipode, il n'y a plus de sens de continuer ce calcul. Le calcul ci-dessus est seulement pour remarquer le théorème [6.2.2] .

Chapitre 7

L'algèbre duale d'algèbre de Hopf $\mathbb{K}{<}A{>}$

Dans cette section, on va chercher la structure duale de l'algèbre de Hopf $\mathbb{K}{<}A{>}$.

7.1 La notion de limite inductive et projective

Définition 7.1.1 (Ensemble ordonné filtrant). *Soit $(I\,;\leq)$ un ensemble ordonné. $(I\,;\leq)$ est un ensemble ordonné filtrant si et seulement si pour tout $(i\,;j)\in I^2$, il existe $k\in I$ tel que*

$$i\leq k \text{ et } j\leq k\ .$$

Définition 7.1.2 (Catégorie). *Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée :*

i) de deux classe, l'une dite des objets, l'autre dite des morphismes de $\mathcal{C}$;

ii) pour tout couple $(X\,,Y)$ d'objets de la catégorie, d'un ensemble noté $Hom_{\mathcal{C}}(X\,,Y)$, dit des morphismes de X vers Y , tel que $Hom(X\,,Y)$ et $Hom(X'\,,Y')$ soient disjoints sauf si $X=X'$ et $Y=Y'$;

iii) pour tout triplet $(X\,,Y\,,Z)$ d'objets de la catégorie, d'une application de $Hom(X\,,Y)\times Hom(Y\,,Z)$ dans $Hom(X\,,Z)$, dite composition des morphismes, notée $(f\,,g)\longmapsto g\circ f$, où $g\circ f$ est appelé le morphisme composé de f suivi de g , et vérifiant deux conditions :

a) lorsque les compositions ont un sens : $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$;

b) pour tout objet X , il existe un morphisme, noté id_X , dit identité de X et tel que, lorsque les compositions ont un sens : $id_X\circ f=f$ et $g\circ id_X=g$.

7.1.1 Limite inductive

Définition 7.1.1.1 (Système inductif). *Soient $(I\,;\leq)$ un ensemble ordonné filtrant et C une catégorie. On appelle système inductif d'objets de C , indexés par I , la donnée d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de C et de morphismes $f_i^j : X_i\longrightarrow X_j$ pour chaque couple d'indices $(i\,;j)\in I^2$ tel que $i\leq j$, vérifiant :*

i) $\forall i\in I$, $f_i^i=Id_{X_i}$,

ii) $\forall(i\,;j\,;k)\in I^3$, $i\leq j\leq k\longrightarrow f_j^k\circ f_i^j=f_i^k$.

Définition 7.1.1.2 (Limite inductive). *Soit $\big((X_i)_{i\in I}\,,f_i^j\big)$ un système inductif dans une catégorie C . La limite inductive X , notée $X=\varinjlim X_i$, lorsqu'elle existe, est* *un objet de la catégorie C muni de morphismes $\phi_i : X_i \longrightarrow X$ vérifiant les relations de compatibilité $\phi_i = \phi_j \circ f_i^j$ pour tout $i \leq j$. De plus, la donnée $\big(X\,;(\phi_i)_{i\in I}\big)$ possède la propriété universelle : pour tout autre objet Y muni d'une famille des morphismes $(\psi_i)_{i\in I}$ vérifiant des relations de compatibilité analogues, il existe un unique morphisme $u : X \to Y$ telle que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_i^j"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Remarque 7.1.1.1. *La limite inductive d'ensemble existe uniquement à l'isomorphisme près.*

Proposition 7.1.1.1 (Limite inductive d'ensemble)**.** *Soit $\big((X_i)_{i\in I}\,, f_i^j\big)$ un système inductif d'ensemble. On obtient la limite inductive par le quotient de l'union disjointe $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ modulo la relation d'équivalence :*
$(i\,,x_i) \sim (j\,,y_j) \Leftrightarrow \exists k \in I\,, i \leq k\,, j \leq k$ tel que $f_i^k(x_i) = f_j^k(y_j)$.
Notons $X = \varinjlim X_i = \bigsqcup_{i\in I} X_i \big/ \sim$. On note $\overline{(i\,;x_i)}$ la classe d'équivalence de $(i\,;x_i)$.
Pour tout $i \in I$ et $x_i \in X_i$, on définit $\phi_i(x_i) = \overline{(i\,;x_i)}$.

Démonstration. i) **Vérifions que ϕ_i est correctement défini :** Évident. Rien à dire.
ii) **Vérifions que si $(i\,;j) \in I^2$ vérifiant $i \leq j$, on a : $\phi_i = \phi_j \circ f_i^j$:**
Pour tout $x_i \in X_i$,

$$\begin{cases} \phi_i(x_i) = \overline{(i\,;x_i)} \\ \phi_j \circ f_i^j(x_i) = \overline{\big(j\,;f_i^j(x_i)\big)} \end{cases}$$

Il existe $k \in I$ tel que $i \leq k\,, j \leq k$ car I est filtrant.
$f_i^k(x_i) = f_j^k(f_i^j(x_i))$ car $\big((X_i)_{i\in I}\,, f_i^j\big)$ est un système inductif.
Donc, $\overline{(i\,;x_i)} = \overline{\big(j\,;f_j^i(x_i)\big)}$.
iii) **Vérifions la propriété universelle :**
Avec les notations précédentes, donnons-nous Y et $\psi_i : X_i \longrightarrow Y$ tel que $\psi_i = \psi_j \circ f_i^j$, c'est-à-dire :

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_i^j"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, dotted, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Existence : Définissons

$$u : \begin{array}{ccc} \overline{X} & \longrightarrow & Y \\ \overline{(i\,;x_i)} & \longmapsto & \psi_i(x_i) \end{array}$$

Vérifions que u est bien définie :
Soit $\overline{(j\,;y_j)} \in X$ tel que $\overline{(j\,;y_j)} = \overline{(i\,;x_i)}$. Alors, il existe $k \in I$ vérifiant $i \leq k \,, j \in k$ tel que $f_i^k(x_i) = f_j^k(y_j)$.

$$\begin{aligned} u\big(\overline{(i\,;x_i)}\big) =& \psi_i(x_i) \\ =& \psi_k \circ f_i^k(x_i) \\ =& \psi_k \circ f_j^k(y_j) \\ =& \psi_j(y_j) \\ =& u\big(\overline{(j\,;y_j)}\big) \ . \end{aligned}$$

Vérifions que u fait commuter le diagramme :
Par la définition de u , pour tout $x_i \in X_i$, $u \circ \phi_i(x_i) = \psi_i(x_i)$. Et pour tout $y_j \in X_j$, $u \circ \phi_j(y_j) = \psi_j(y_j)$. Le diagramme est donc commutatif.
Unicité : Pour tout $\overline{(i\,;x_i)} \in X$, si le diagramme est commutatif, il faudra que

$$u\big(\overline{(i\,;x_i)}\big) = \psi_i(x_i) \ .$$

Cela entraîne l'unicité. □

Définition 7.1.1.3. *Supposons que les X_i soient des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et les f_i^j soient des applications linéaires. Définissons une structure d'espace vectoriel sur $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i \Big/ \sim$:*
Soient $x = \overline{(i\,;x_i)} \in X$, $y = \overline{(j\,;y_j)} \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Puisque I est un ensemble ordonné filtrant : il existe $k \in I$ vérifiant $i \leq k$ et $j \leq k$, alors :

$$\begin{aligned} x = \overline{(i\,;x_i)} = \phi_i(x_i) = \phi_k \circ f_i^k(x_i) \\ y = \overline{(j\,;y_i)} = \phi_j(y_j) = \phi_k \circ f_j^k(y_j) \ . \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition, on pose :

$$x + y = \phi_k\big(f_i^k(x_i) + f_j^k(y_j)\big)$$

et

$$\lambda x = \phi_i(\lambda x_i) \ .$$

Proposition 7.1.1.2. *Le + et la multiplication par un scalaire ci-dessus sont bien définis. X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. **Vérifions que + est bien défini, c'est-à-dire que + ne dépend pas du choix de k :**
Soit $l \in I$ vérifiant $i \leq l$ et $j \leq l$. On peut supposer que $k \leq l$. Par les notations ci-dessus,

$$\begin{aligned} \phi_l\big(f_i^l(x_i) + f_j^l(y_j)\big) =& \phi_l\big(f_k^l \circ f_i^k(x_i) + f_k^l \circ f_j^k(y_j)\big) \\ =& \phi_l \circ f_k^l\big(f_i^k(x_i) + f_j^k(y_j)\big) \quad \textit{car } f_k^l \textit{ est linéaire} \\ =& \phi_k\big(f_i^k(x_i) + f_j^k(y_j)\big) \ . \end{aligned}$$

Vérifions que la multiplication par un scalaire est bien défini :
Soit $x = \overline{(i\,;x_i)} = \overline{(j\,;y_j)}$. k est comme ci-dessus.

$$\begin{aligned}\phi_i(\lambda x_i) =&\phi_k \circ f_i^k(\lambda x_i)\\ =&\phi_k\big(\lambda f_i^k(x_i)\big) \quad \textit{car } f_i^k \textit{ est linéaire}\\ =&\phi_k\big(\lambda f_j^k(y_j)\big)\\ =&\phi_k \circ f_j^k(\lambda y_j) \quad \textit{car } f_j^k \textit{ est linéaire}\\ =&\phi_j(\lambda y_j)\ .\ \square\end{aligned}$$

Vérifions que X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :
i) l'associativité de + : Soient $x = \overline{(i\,;x_i)}$, $y = \overline{(j\,;y_j)}$, $z = \overline{(k\,;z_k)} \in X$. Choisissons $l \in I$ vérifiant $i \leq l\,, j \leq l\,, k \leq l$.

$$\begin{aligned}(x+y)+z =&\phi_l\big(f_i^l(x_i)+f_j^l(y_j)\big)+\phi_l\big(f_k^l(z_k)\big)\\ =&\phi_l\big(f_i^l(x_i)+f_j^l(y_j)+f_k^l(z_k)\big)\\ =&\phi_l\big(f_i^l(x_i)\big)+\phi_l\big(f_j^l(y_j)+f_k^l(z_k)\big)\\ =&x+(y+z)\ .\end{aligned}$$

ii) la commutativité de + : Évident par la commutativité de l'addition sur $X_i\,, i \in I$.
iii) l'associativité de la multiplication par un scalaire :
Soient $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $x = \overline{(i\,;x_i)} \in X$

$$\begin{aligned}\lambda(\mu x) =&\lambda\big(\phi_i(\mu x_i)\big)\\ =&\phi_i\big(\lambda(\mu x_i)\big)\\ =&\phi_i\big((\lambda\mu)x_i\big)\\ =&(\lambda\mu)x\ .\end{aligned}$$

iv) la distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à + :
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = \overline{(i\,;x_i)}\,, y = \overline{(j\,;x_j)} \in X$. Il existe $k \in I$ vérifiant $i \leq k$ et $j \leq k$.

$$\begin{aligned}\lambda(x+y) =&\lambda\Big(\phi_k\big(f_i^k(x_i)+f_j^k(y_j)\big)\Big)\\ =&\phi_k\Big(\lambda\big(f_i^k(x_i)+f_j^k(y_j)\big)\Big)\\ =&\phi_k\big(f_i^k(\lambda x_i)+f_j^k(\lambda y_j)\big) \quad \textit{car } f_i^k \textit{ et } f_j^k \textit{ sont linéaires}\\ =&\lambda x+\lambda y\ .\end{aligned}$$

On a donc montré que X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\square$

Proposition 7.1.1.3. *Pour tout $i \in I$, $\phi_i : X_i \longrightarrow X$ est linéaire.*

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_i\,;y_i) \in {X_i}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\phi_i(\lambda x_i+y_i) =&\overline{(i\,;\lambda x_i+y_i)}\\ =&\overline{(i\,;\lambda x_i)}+\overline{(i\,;y_i)} \quad \textit{par définition}\\ =&\lambda\overline{(i\,;x_i)}+\overline{(i\,;y_i)}\\ =&\lambda\phi_i(x_i)+\phi_i(y_i)\ .\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 7.1.1.4. *L'application u définie dans la propriété [7.1.1.1] est linéaire.*

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = \overline{(i\,;x_i)}\,, y = \overline{(j\,;y_j)} \in X$. Il existe $k \in I$ vérifiant $i \leq k$ et $j \leq k$. On a :

$$\begin{aligned} u(\lambda x + y) =& u \circ \phi_k\big(f_i^k(\lambda x_i) + f_j^k(y_j)\big) \\ =& \psi_k\big(f_i^k(\lambda x_i) + f_j^k(y_j)\big) \\ =& \psi_k\big(f_i^k(\lambda x_i)\big) + \psi_k\big(f_j^k(y_j)\big) \\ =& \psi_i(\lambda x_i) + \psi_j(y_j) \\ =& \lambda\psi_i(x_i) + \psi_j(y_j) \\ =& \lambda u(x) + u(y)\ . \end{aligned}$$

□

Corollaire 7.1.1.1. *La limite inductive d'espace vectoriel existe.*

noindent**Exemple :** On pose $I = \mathbb{N}$. Il estévident que $\mathbb{N}$ est un ensemble ordonné filtrant. On pose $X_i\,, i \in \mathbb{N}$ des espaces vectoriels tels que pour tout $(i\,;j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i \leq j$, on ait : $X_i \subset X_j$. De plus, on pose $f_i^j : X_i \longrightarrow X_j$ l'injection canonique. Alors, $\varinjlim X_i \simeq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

Démonstration. Il est évident que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f_i^i = Id_{X_i}$ et que pour tout triplet $(i\,;j\,;k) \in \mathbb{N}^3$ avec $i \leq j \leq k$, $f_j^k \circ f_i^j = f_i^k$.
$\big((X_i)_{i\in\mathbb{N}}; f_i^j\big)$ est donc un système inductif d'espaces vectoriels.
Par définition, $X = \varinjlim X_i = \big\{\overline{(i\,,x)}; i \in \mathbb{N}\ , x \in X_i\big\}$.
Si $\overline{(i\,,x)} = \overline{(j\,,y)}$, il existe k avec $i \leq k\,, j \leq k$ tel que $f_i^k(x) = f_j^k(y)$. En effet, $f_i^k(x) = f_j^k(y) \Longrightarrow x = y$ car chaque f_i^j est l'inclusion canonique.
Donc, $\varinjlim X_i \simeq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$. □

7.1.2 Limite projective

Définition 7.1.2.1 (Système projectif)**.** *Soient $(I\,;\leq)$ un ensemble ordonné filtrant et C une catégorie. On appelle système projectif d'objets de C , indexée par I , la donné d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de C et de morphismes $f_i^j : X_j \to X_i$ pour chaque couple d'indices $(i\,;j) \in I^2$ tel que $i \leq j$, vérifiant :*
i) $\forall i \in I$, $f_i^i = Id_{X_i}$,
ii) $\forall (i\,,j\,,k) \in I^3$, $i \leq j \leq k \Longrightarrow f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$.
On dit que $\big((X_i)_{i\in I}\,, f_i^j\big)$ est un système projectif.

Définition 7.1.2.2 (Limite projective)**.** *Soit $\big((X_i)_{i\in I}\,; f_i^j\big)$ un système projectif dans une catégorie C . La limite projective X , notée $X = \varprojlim X_i$, lorsqu'elle existe, est un objet de C muni de morphismes $\pi_i : X \to X_i$ vérifiant les relations de compatibilité $\pi_i = f_i^j \circ \pi_j$ pour tout $i \leq j$. De plus, la donnée $\big((X_i)_{i\in I}\,;\pi_i\big)$ possède la propriété universelle : Pour tout objet Y muni d'une autre famille des morphismes $(\psi_i)_{i\in I}$ vérifiant des relations de compatibilité analogues, il existe un unique morphisme u : $Y \to X$ tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\
& X \arrow[dl, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & \\
X_j \arrow[rr, "f_i^j"'] & & X_i
\end{tikzcd}$$

Proposition 7.1.2.1 (Limite projective d'ensemble)**.** *Soit* $\left((X_i)_{i\in I}\,, f_i^j\right)$ *un système projectif d'ensemble. On obtient la limite projective par*

$$X = \varprojlim X_i = \left\{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i | \forall i \leq j \in I\,, a_i = f_i^j(a_j)\right\}\ .$$

Notons $a = (a_i)_{i\in I}$ *. Pour tout* $i \in I$ *, on définit* $\pi_i(a) = a_i$ *.*

Démonstration. **Vérifions que π_i est correctement défini :** Évident. Rien à dire.
Vérifions que si $(i\,;j) \in I^2$ vérifiant $i \leq j$, on a : $\pi_i = f_i^j \circ \pi_j$:
Soit $a = (a_i)_{i\in I} \in X$, alors

$$f_i^j \circ \pi_j(a) = f_i^j(a_j) = a_i = \pi_i(a)$$

Vérifions la propriété universelle :
Avec les notations précédentes, donnons-nous Y et $\psi_i : Y \longrightarrow X_i$ tel que $\psi_i = f_i^j \circ \psi_j$, c'est-à-dire

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\
& X \arrow[dl, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & \\
X_j \arrow[rr, "f_i^j"'] & & X_i
\end{tikzcd}$$

Existence : Pour tout $b \in Y$, $i \in I$, définissons $u(b) = \big(\psi_i(b)\big)_{i\in I}$. Il est évident que u est correctement défini.
Vérifions que le diagramme est commutatif :
Pour tout $b \in Y$,

$$\pi_i \circ u(b) = \pi_i\Big(\big(\psi_i(b)\big)_{i\in I}\Big) = \psi_i(b)\ .$$

De même, $\pi_j \circ u = \psi_j$.
Le diagramme est donc commutatif.
Unicité : Si le diagramme commute, on a : pour tout $b \in Y$, $i \in I$,

$$\pi_i\big(u(b)\big) = \psi_i(b)\ .$$

Par définition de π_i , on sait que $u(b) = \big(\psi_i(b)\big)_{i\in I}$.
D'où, on obtient l'unicité. $\square$

Remarque 7.1.2.1. *La limite projective d'ensemble existe uniquement à l'isomorphisme près.*

Définition 7.1.2.3. *Supposons que les X_i soient des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et les f_i^j soient des applications linéaires. Définissonss une structure d'espace vectoriel sur* $X = \lim\limits_{\longleftarrow} X_i = \left\{(a_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} X_i | \forall i \leq j \in I \, , a_i = f_i^j(a_j)\right\}$ *:*
Soient $a = (a_i)_{i\in I} \in X$ *et* $b = (b_i)_{i\in I} \in X$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *.*
Par définition, on pose :

$$a + b = (a_i + b_i)_{i\in I}$$

et

$$\lambda a = (\lambda a_i)_{i\in I} \ .$$

Proposition 7.1.2.2. *X est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. i) l'associativité de $+$: Soient $a = (\lambda a_i)_{i\in I} \, , b = (\lambda b_i)_{i\in I} \, , c = (\lambda c_i)_{i\in I} \in X$.

$$\begin{aligned}(a+b)+c =&(a_i+b_i)_{i\in I} + (c_i)_{i\in I}\\ =&(a_i+b_i+c_i)_{i\in I}\\ =&(a_i)_{i\in I} + (b_i+c_i)_{i\in I}\\ =&a + (b+c) \ .\end{aligned}$$

ii) la commutativité de $+$: Évident par la commutativité de l'addition sur $X_i \, , i \in I$.
iii) l'associativité de la multiplication par un scalaire :
Soient $\lambda \, , \mu \in \mathbb{K}$ et $a = (a_i)_{i\in I} \in X$.

$$\lambda(\mu a) = \lambda(\mu a_i)_{i\in I} = (\lambda\mu a_i)_{i\in I} = (\lambda\mu)(a_i)_{i\in I} = (\lambda\mu)a \ .$$

iv) la distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à $+$:
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $a = (a_i)_{i\in I} \, , b = (b_i)_{i\in I} \in X$.

$$\begin{aligned}\lambda(a+b) =&\lambda(a_i+b_i)_{i\in I}\\ =&\big(\lambda(a_i+b_i)\big)_{i\in I}\\ =&(\lambda a_i + \lambda b_i)_{i\in I}\\ =&(\lambda a_i)_{i\in I} + (\lambda b_i)_{i\in I}\\ =&\lambda a + \lambda b \ .\end{aligned}$$

On a donc montré que X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Proposition 7.1.2.3. *Pour tout $i \in I$, π_i est linéaire.*

Démonstration. Soients $\lambda \in \mathbb{K}$ et $a = (a_i)_{i\in I} \, , b = (b_i)_{i\in I} \in X$.

$$\begin{aligned}\pi_i(\lambda a + b) =&\pi_i\big((\lambda a_i + b_i)_{i\in I}\big)\\ =&\lambda a_i + b_i\\ =&\pi_i(\lambda a) + \pi_i(b)\\ =&\lambda\pi_i(a) + \pi_i(b) \ .\end{aligned}$$

□

Proposition 7.1.2.4. *L'application u définie dans la propriété [7.1.2.1] est linéaire.*

Démonstration. On vient de montrer que X a une structure d'espace vectoriel et les π_i sont linéaires. Donc on suppose que Y soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et les ψ_i sont linéaires.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $y_1\,, y_2 \in Y$.

$$\begin{aligned} u(\lambda y_1 + y_2) =& \big(\psi_i(\lambda y_1 + y_2)\big)_{i\in I} \\ =& \big(\lambda\psi_i(y_1) + \psi_i(y_2)\big)_{i\in I} \\ =& \lambda\big(\psi_i(y_1)\big)_{i\in I} + \big(\psi_i(y_2)\big)_{i\in I} \\ =& \lambda u(y_1) + u(y_2)\ . \end{aligned}$$

□

7.2 Le dual de $\mathbb{K}<A>$ et de $\mathbb{K}<A>\otimes\mathbb{K}<A>$

Proposition 7.2.1. $\mathbb{K}<A>^* \simeq \mathbb{K}\ll A\gg$.

Démonstration. Montrons que l'on peut identifier tout élément $W \in \mathbb{K}<A>^*$ à $\sum\limits_{\omega\in A^*} W(\omega)\omega$. Définissons :

$$\begin{array}{rccl} T_0: & \mathbb{K}<A>^* & \longrightarrow & \mathbb{K}\ll A\gg \\ & W & \mapsto & \sum\limits_{\omega\in A^*} W(\omega)\omega\ . \end{array}$$

D'une part, si $T_0(W) = T_0(\tilde{W})$, alors $\forall\omega \in A^*$, $W(\omega) = \tilde{W}(\omega)$. $W = \tilde{W}$. Donc, T_0 est injective.
D'autre part, $\forall S \in \mathbb{K}\ll A\gg$, $(S\,,\cdot) : \mathbb{K}<A>\longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire et vérifie $T_0\big((S\,,\cdot)\big) = S$. Donc T_0 est surjective. □

Maintenant, on écrit $\mathbb{K}<A>= \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, où E_n est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à n .
On note $E = \mathbb{K}<A> \otimes\mathbb{K}<A>$. On écrit $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(E_n \otimes E_n)$.

Proposition 7.2.2. *i) Soit $f_i^j : E_i \otimes E_i \hookrightarrow E_j \otimes E_j$ l'injection canonique, définie pour tout $(i\,;j) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $0 \leq i \leq j$. $\big((E_i \otimes E_i)_{i\in I}\,, f_i^j\big)$ est un système inductif. Sa limite inductive est isomorphe à $E = \mathbb{K}<A> \otimes\mathbb{K}<A>$:*

$$E_0 \otimes E_0 \xhookrightarrow{f_0^1} E_1 \otimes E_1 \xhookrightarrow{f_1^2} E_2 \otimes E_2 \xhookrightarrow{f_1^2} \cdots\cdots E$$

ii) Soit $f_i^{j^*} : (E_j\otimes E_j)^* \longrightarrow (E_i\otimes E_i)^*$ l'application duale de f_i^j . Alors, $\big((E_i \otimes E_i)^*{}_{i\in I}\,, f_i^{j^*}\big)$ est un système projectif. Sa limite projective est notée $E^*{}_\infty$:

$$(E_0 \otimes E_0)^* \xleftarrow{f_0^{1^*}} (E_1 \otimes E_1)^* \xleftarrow{f_1^{2^*}} (E_2 \otimes E_2)^* \xleftarrow{f_2^{3^*}} \cdots\cdots E^*{}_\infty$$

iii) Soit E^* l'espace dual de E . Alors, $E^* \simeq E^*{}_\infty$.

Démonstration. i) D'après l'exemple [7.1.1] dans la section 7.1.1, on sait que $\varinjlim E_i \otimes E_i \simeq E$.

ii) Chaque $f_i^{j^*}$ est une projection car f_i^j est une inclusion. Alors, pour tout $i \leq j \leq k$, $f_i^{j^*} \circ f_j^{k^*} = f_i^{k^*}$. Il est évident que $f_i^{i^*} = Id_{(E_i \otimes E_i)^*}$. Donc, $\left((E_i \otimes E_i)^*{}_{i \in I} \,, f_i^{j^*}\right)$ est un système projectif.
Par la définition,

$$E^*{}_\infty = \left\{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} |\ \forall 0 \leq i \leq j \,, a_i = f_i^{j^*}(a_j) \,, a_i \in (E_i \otimes E_i)^* \,, a_j \in (E_j \otimes E_j)^*\right\} .$$

iii) On considère l'application T ,

$$\begin{array}{rccc} T: & E^* & \longrightarrow & E^*{}_\infty \\ & \varphi & \mapsto & (\varphi_{|(E_i \otimes E_i)^*})_{i \in \mathbb{N}} \end{array}$$

Il est évident que T est bien à valeur dans $E^*{}_\infty$ car pour tout $0 \leq i \leq j$, $\varphi_{|(E_i \otimes E_i)^*} = f_i^{j^*}\left(\varphi_{|(E_j \otimes E_j)^*}\right)$.
D'une part, si $\varphi \,, \psi \in E^*$ sont telles que $(\varphi_{|(E_i \otimes E_i)^*})_{i \in \mathbb{N}} = (\psi_{|(E_i \otimes E_i)^*})_{i \in \mathbb{N}}$, alors $\forall u_{i1} \otimes u_{i2} \in E_i \otimes E_i$ et $\forall i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\varphi(u_{i1} \otimes u_{i2}) = \psi(u_{i1} \otimes u_{i2}) .$$

$\varphi = \psi$. T est donc injective.
D'autre part, pour tout $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E^*{}_\infty$, définissons $\varphi \in E^*$ tel que $T(\phi) = a$: pour tout $u_1 \otimes u_2 \in E$,
il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_1 \otimes u_2 \in E_k \otimes E_k$; on pose alors :

$$\varphi(u_1 \otimes u_2) = a_k(u_1 \otimes u_2) .$$

Puisque $\left((E_i \otimes E_i)^*{}_{i \in I} \,, f_i^{j^*}\right)$ est un système projectif, la définition de φ ne dépend pas du choix de k . Ainsi, φ est bien définie, ce qui prouve que T est surjective.
T est une bijection : $E^* \simeq E^*{}_\infty$. □

Définition 7.2.1. *Par le lemme [4.2.2], pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *, il existe la bijection* $\rho_i : {E_i}^* \otimes {E_i}^* \longrightarrow (E_i \otimes E_i)^*$ *. Pour tout* $(i\,;j) \in \mathbb{N}^2$ *vérifiant* $0 \leq i \leq j$ *, on définit* $\widetilde{f_i^{j^*}} = \rho_i^{-1} \circ f_i^{j^*} \circ \rho_j$ *.*

$$\begin{tikzcd} (E_i \otimes E_i)^* \arrow[d, "\rho_i^{-1}"] & (E_j \otimes E_j)^* \arrow[l, "f_i^{j^*}"'] \\ {E_i}^* \otimes {E_i}^* & {E_j}^* \otimes {E_j}^* \arrow[l, "\widetilde{f_i^{j^*}}"] \arrow[u, "\rho_j"'] \end{tikzcd}$$

Proposition 7.2.3. $E^*{}_\infty \simeq \mathbb{K}{<}A{>}^* \otimes \mathbb{K}{<}A{>}^*$ *.*

Démonstration. Pour tout $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E^*{}_\infty$, on note $\widetilde{a_i} = \rho_i^{-1}(a_i)$.
Pour tout $(i\,;j) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $0 \leq i \leq j$, $\widetilde{a_i} = \rho_i^{-1} \circ f_i^{j^*} \circ \rho_j(\widetilde{a_j}) = \widetilde{f_i^{j^*}}(\widetilde{a_j})$.
Puisque ρ_i est une bijection, identifions $\tilde{a}_i$ à a_i . Alors, on a :

$$\begin{aligned} E^*{}_\infty =& \left\{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} ; \forall 0 \leq i \leq j \,, a_i = f_i^{j^*}(a_j) \,, a_i \in (E_i \otimes E_i)^* \,, a_j \in (E_j \otimes E_j)^*\right\} \\ \simeq& \left\{(\widetilde{a_i})_{i \in \mathbb{N}} ; \widetilde{a_i} = \widetilde{f_i^{j^*}}(\widetilde{a_j}) \,, \widetilde{a_i} \in {E_i}^* \otimes {E_i}^* \,, \forall i \in \mathbb{N}\right\} . \end{aligned}$$

Pour tout $(i\,;j) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $0 \leq i \leq j$, supposons que $\widetilde{a_j} = \widetilde{a_{j1}} \otimes \widetilde{a_{j2}}$ avec $\widetilde{a_{j1}}\,,\widetilde{a_{j2}} \in {E_j}^*$.
Pour tout $u_1 \otimes u_2 \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\big(\rho_j(\widetilde{a_{j1}} \otimes \widetilde{a_{j2}})_{|(E_i\otimes E_i)^*}\,, u_1 \otimes u_2\big) &= \widetilde{a_{j1}}(u_{1|E_i})\widetilde{a_{j2}}(u_{2|E_i})\\ &= \widetilde{a_{j1}}_{|{E_i}^*}(u_1)\widetilde{a_{j2}}_{|{E_i}^*}(u_2)\\ &= \big(\rho_i(\widetilde{a_{j1}}_{|{E_i}^*} \otimes \widetilde{a_{j2}}_{|{E_i}^*})\,, u_1 \otimes u_2\big)\ .\end{aligned}$$

Alors, $\rho_j(\widetilde{a_{j1}} \otimes \widetilde{a_{j2}})_{|(E_i\otimes E_i)^*} = \rho_i(\widetilde{a_{j1}}_{|{E_i}^*} \otimes \widetilde{a_{j2}}_{|{E_i}^*})$. On a :

$$\begin{aligned}\widetilde{f_i^{j^*}}(\widetilde{a_j}) &= \rho_i^{-1} \circ \big(\rho_j(\widetilde{a_{j1}} \otimes \widetilde{a_{j2}})_{|(E_i\otimes E_i)^*}\big)\\ &= \rho_i^{-1} \circ \rho_i(\widetilde{a_{j1}}_{|{E_i}^*} \otimes \widetilde{a_{j2}}_{|{E_i}^*})\\ &= \widetilde{a_{j1}}_{|{E_i}^*} \otimes \widetilde{a_{j2}}_{|{E_i}^*}\ .\end{aligned}$$

Ainsi, si $0 \leq i \leq j$, $\widetilde{f_i^{j^*}}$ est la projection de ${E_j}^* \otimes {E_j}^*$ sur ${E_i}^* \otimes {E_i}^*$.
$\big(({E_i}^* \otimes {E_i}^*)_{i\in\mathbb{N}}\,, \widetilde{f_i^{j^*}}\big)$ est donc un système projectif. On note $\widetilde{{E^*}_\infty} = \varprojlim {E_i}^* \otimes {E_i}^*$.
Montrons que

$$\begin{array}{rccl}\tilde{T}: & \widetilde{{E^*}_\infty} & \longrightarrow & \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle\\ & (\widetilde{a_i})_{i\in\mathbb{N}} & \mapsto & \lim\limits_{i\to\infty}\Big(\sum\limits_{u\in A^*}\widetilde{a_{i1}}(u)u\Big) \otimes \lim\limits_{i\to\infty}\Big(\sum\limits_{v\in A^*}\widetilde{a_{i2}}(v)v\Big)\end{array}$$

est une bijection, où $\widetilde{a_i} = \widetilde{a_{i1}} \otimes \widetilde{a_{i2}}$.
Par la propriété projective de $(\widetilde{a_{i1}} \otimes \widetilde{a_{i2}})_{i\in\mathbb{N}}$, la limite des polynômes au-dessus a un sens car la limite est une série définie degré par degré.
$\tilde{T}$ est linéaire par rapport à l'addition.
D'une part, si $\lim\limits_{i\to\infty}\Big(\sum\limits_{u\in A^*}\widetilde{a_{i1}}(u)u\Big) \otimes \lim\limits_{i\to\infty}\Big(\sum\limits_{v\in A^*}\widetilde{a_{i2}}(v)v\Big) = 0$, on sait que soit $\widetilde{a_{i1}} = 0$, soit $\widetilde{a_{i2}} = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors, $\widetilde{a_i} = \widetilde{a_{i1}} \otimes \widetilde{a_{i2}} = 0$.
Donc, $\tilde{T}$ est injective.
D'autre part, pour tout $S_1 \otimes S_2 \in \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$, pour tout i , on pose $\widetilde{a_{i1}}(u) = (S_1\,, u)$, $\widetilde{a_{i2}}(v) = (S_2\,, v)$ où $u\,, v \in E_i$.
De même, par la propriété de $(\widetilde{a_{i1}} \otimes \widetilde{a_{i2}})_{i\in\mathbb{N}}$, cette manière de prise est possible. $\tilde{T}$ est surjective.
$\tilde{T}$ est donc une bijection. □

Théorème 7.2.1. $(\mathbb{K}\langle A\rangle \otimes \mathbb{K}\langle A\rangle)^* \simeq \mathbb{K}\langle A\rangle^* \otimes \mathbb{K}\langle A\rangle^*$.

Démonstration.
$(\mathbb{K}\langle A\rangle \otimes \mathbb{K}\langle A\rangle)^* \simeq E^* \simeq {E^*}_\infty \simeq (\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle A\rangle) \simeq \mathbb{K}\langle A\rangle^* \otimes \mathbb{K}\langle A\rangle^*$. □

7.3 L'algèbre duale d'algèbre de Hopf $\mathbb{K}\langle A\rangle$

Tout d'abord, rappelons le lemme [4.2.1].
Maintenant, considérons *conc* : $\mathbb{K}\langle A\rangle \otimes \mathbb{K}\langle A\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle A\rangle$.

Définition 7.3.1. *Par la notation de la section précédente, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *,* $conc|_{E_n \otimes E_n} : E_n \otimes E_n \longrightarrow \mathbb{K}{<}A{>}$ *induit* $(conc|_{E_n \otimes E_n})^* : (\mathbb{K}{<}A{>})^* \longrightarrow (E_n \otimes E_n)^*$ *. On peut aussi définir* $conc^*$ *comme cela : pour tout* $u_1 \otimes u_2 \in E$ *, il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_1 \otimes u_2 \in E_k \otimes E_k$ *. Pour tout* $u^* \in (\mathbb{K}{<}A{>})^*$ *,*

$$< conc^*(u^*)\,, u_1 \otimes u_2 >=< (conc|_{E_k \otimes E_k})^*(u^*)\,, u_1 \otimes u_2 > \quad .$$

Il est évident que cette définition ne dépend pas du choix de k *. Elle permet d'utiliser le lemme [4.2.1] niveau par niveau.*

Définition 7.3.2. *De même, on définit* $(\alpha \otimes Id)^* : E^* \longrightarrow E^*$ *,* $\delta^* : E^* \longrightarrow \mathbb{K}{<}A{>}^*$ *,* $(k \cdot 1)^* : \mathbb{K}{<}A{>}^* \longrightarrow \mathbb{K}^*$ *et* $(-\,,1)^* : \mathbb{K}^* \longrightarrow \mathbb{K}^*$ *.*

Par la dualité, on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>})^* \arrow[dl, "\delta^*"'] & & (\mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>})^* \arrow[ll, "(\alpha\otimes Id)^*"'] & \\
\mathbb{K}{<}A{>}^* & & \mathbb{K}^* \arrow[ll, "(-\,,1)^*"'] & & \mathbb{K}{<}A{>}^* \arrow[ll, "(k\cdot 1)^*"'] \arrow[ul, "conc^*"'] \arrow[dl, "conc^*"] \\
 & (\mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>})^* \arrow[ul, "\delta^*"] & & (\mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>})^* \arrow[ll, "(Id\otimes\alpha)^*"'] &
\end{tikzcd}$$

On a montré que $E^* \simeq \mathbb{K}{<}A{>}^* \otimes \mathbb{K}{<}A{>}^*$.
Notons $\rho : \mathbb{K}{<}A{>}^* \otimes \mathbb{K}{<}A{>}^* \longrightarrow E^*$.
Donc, on a le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}{<}A{>}^* \otimes \mathbb{K}{<}A{>}^* \arrow[d, "\rho"] \arrow[ddl, bend right] & & \mathbb{K}{<}A{>}^* \otimes \mathbb{K}{<}A{>}^* \arrow[ll, "\widetilde{(\alpha\otimes Id)}^*"'] & \\
 & (\mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>})^* \arrow[dl, "\delta^*"'] & & (\mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>})^* \arrow[ll, "(\alpha\otimes Id)^*"'] \arrow[u, "\rho^{-1}"] & \\
\mathbb{K}{<}A{>}^* & & \mathbb{K}^* \arrow[ll, "(-\,,1)^*"'] & & \mathbb{K}{<}A{>}^* \arrow[ll, "(k\cdot 1)^*"'] \arrow[ul, "conc^*"'] \arrow[dl, "conc^*"] \arrow[uul, bend right] \arrow[ddl, bend left] \\
 & (\mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>})^* \arrow[ul, "\delta^*"] & & (\mathbb{K}{<}A{>} \otimes \mathbb{K}{<}A{>})^* \arrow[ll, "(Id\otimes\alpha)^*"'] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] & \\
 & \mathbb{K}{<}A{>}^* \otimes \mathbb{K}{<}A{>}^* \arrow[u, "\rho"'] \arrow[uul, bend left] & & \mathbb{K}{<}A{>}^* \otimes \mathbb{K}{<}A{>}^* \arrow[ll, "\widetilde{(\alpha\otimes Id)}^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Par l'abus des notations, on obtient le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}{<}A{>}^* \otimes \mathbb{K}{<}A{>}^* \arrow[dl, "\delta^*"'] & & \mathbb{K}{<}A{>}^* \otimes \mathbb{K}{<}A{>}^* \arrow[ll, "\alpha^*\otimes Id^*"'] & \\
\mathbb{K}{<}A{>}^* & & \mathbb{K}^* \arrow[ll, "(-\,,1)^*"'] & & \mathbb{K}{<}A{>}^* \arrow[ll, "(k\cdot 1)^*"'] \arrow[ul, "conc^*"'] \arrow[dl, "conc^*"] \\
 & \mathbb{K}{<}A{>}^* \otimes \mathbb{K}{<}A{>}^* \arrow[ul, "\delta^*"] & & \mathbb{K}{<}A{>}^* \otimes \mathbb{K}{<}A{>}^* \arrow[ll, "Id^*\otimes\alpha^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Théorème 7.3.1. $\big(\mathbb{K}{<}A{>}^*\,, \delta^*\,, (-\,,1)^*\,, conc^*\,, (k\cdot 1)^*\,, \alpha^*\big)$ *est une algèbre de Hopf.*

Démonstration. D'après les théorème [4.2.1, 4.2.2],
$\left(\mathbb{K}\langle A\rangle^*\,,\delta^*\,,(-\,,1)^*\,,conc^*\,,(k\cdot 1)^*\right)$ est une bigèbre qui vérifie le diagramme précédent. Donc $\left(\mathbb{K}\langle A\rangle^*\,,\delta^*\,,(-\,,1)^*\,,conc^*\,,(k\cdot 1)^*\,,\alpha^*\right)$ est une algèbre de Hopf. □

Il est difficile de préciser les opérateurs de $\mathbb{K}\langle A\rangle^*$. Mais $(\mathbb{K}\langle A\rangle)^* \simeq \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. On peut identifier $\left(\mathbb{K}\langle A\rangle^*\,,\delta^*\,,(-\,,1)^*\,,conc^*\,,(k\cdot 1)^*\,,\alpha^*\right)$ à
$\left(\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle\,,\delta^*\,,(-\,,1)^*\,,conc^*\,,(k\cdot 1)^*\,,\alpha^*\right)$.

Théorème 7.3.2. $\left(\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle\,,sh\,,k\cdot 1\,,conc^*\,,(-\,,1)\,,\alpha\right)$ *est une algèbre de Hopf.*

Démonstration. Rappelons que $sh(\omega)=\delta^*(\omega)$, pour tout $\omega\in A^*$. Toute la conclusion sur $\mathbb{K}\langle A\rangle$ marche aussi sur $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. Pour tout $u\,,v\in\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$,

$$\begin{aligned}\left(sh\circ(\alpha\otimes Id)\circ conc^*(u)\,,v\right) =&\left((\alpha\otimes Id)\circ conc^*(u)\,,\delta(v)\right)\\ =&\left(conc^*(u)\,,(\alpha\otimes Id)\circ\delta(v)\right)\\ =&\left(u\,,conc\circ(\alpha\otimes Id)\circ\delta(v)\right)\\ =&\left(u\,,(v\,,1)\cdot 1\right)\\ =&\left(\left((-\,,1)\cdot 1\right)^*(u)\,,v\right)\ .\end{aligned}$$

Quand $u\neq 1$, $\left(\left((-\,,1)\cdot 1\right)^*(u)\,,v\right)=0$ pour tout $v\in A^*$
et quand $u=1$, $\left(\left((-\,,1)\cdot 1\right)^*(1)\,,v\right)=(v\,,1)$, d'où $\left((-\,,1)\cdot 1\right)^*(1)=1$.
Donc $\left((-\,,1)\cdot 1\right)^*=(-\,,1)\cdot 1$.
On a $sh\circ(\alpha\otimes Id)\circ conc^*=(-\,,1)\cdot 1$. De même, $sh\circ(Id\otimes\alpha)\circ conc^*=(-\,,1)\cdot 1$.

D'après la section [**4.2**], on sait que $\left(\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle\,,\delta^*\,,(-\,,1)^*\right)$ est une algèbre. $\left(\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle\,,conc^*\,,(k\cdot 1)^*\right)$ est une cogèbre.
La compatibilité entre elles est préservée pour la dualité car elle est en effet un changement de direction des flèches. On a vérifié que $(-\,,1)^*=k\cdot 1$ et $(k\cdot 1)^*=(-\,,1)$.
On vient de montrer que α est aussi l'antipode de l'algèbre duale de $\mathbb{K}\langle A\rangle$.
D'où $\left(\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle\,,\delta^*\,,(-\,,1)^*\,,conc^*\,,k\cdot 1^*\,,\alpha\right)$ est une algèbre de Hopf. On le réécrit en $\left(\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle\,,sh\,,k\cdot 1\,,conc^*\,,(-\,,1)\cdot 1\,,\alpha\right)$. □

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle\otimes\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \arrow[dl, "sh"'] & & \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle\otimes\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \arrow[ll, "\alpha\otimes Id"'] & \\
\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle & & \mathbb{K} \arrow[ll, "k\cdot 1"'] & & \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \arrow[ll, "(-\,,1)"'] \arrow[ul, "conc^*"'] \arrow[dl, "conc^*"] \\
 & \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle\otimes\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \arrow[ul, "sh"] & & \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle\otimes\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \arrow[ll, "Id\otimes\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Remarque 7.3.1. *On peut restreindre $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ à $\mathbb{K}\langle A\rangle$. On sait que les opérateurs sont bien définis aussi sur $\mathbb{K}\langle A\rangle$. On a le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}\langle A\rangle\otimes\mathbb{K}\langle A\rangle \arrow[dl, "sh"'] & & \mathbb{K}\langle A\rangle\otimes\mathbb{K}\langle A\rangle \arrow[ll, "\alpha\otimes Id"'] & \\
\mathbb{K}\langle A\rangle & & \mathbb{K} \arrow[ll, "k\cdot 1"'] & & \mathbb{K}\langle A\rangle \arrow[ll, "(-\,,1)"'] \arrow[ul, "conc^*"'] \arrow[dl, "conc^*"] \\
 & \mathbb{K}\langle A\rangle\otimes\mathbb{K}\langle A\rangle \arrow[ul, "sh"] & & \mathbb{K}\langle A\rangle\otimes\mathbb{K}\langle A\rangle \arrow[ll, "Id\otimes\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{K}\langle A\rangle$ devient une sous-algèbre de Hopf de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$.

Chapitre 8

L'algèbre de Lie et l'algèbre de Lie libre

8.1 Algèbre de Lie et algèbre enveloppante

Définition 8.1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif unitaire. Une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module $\mathcal{L}$, muni d'une application $\mathbb{K}$-bilinéaire, appelée un crochet de Lie*

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,] & \mathcal{L}\times\mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ & (x\,;y) & \longmapsto & [x\,,y] \end{array}$$

vérifiant les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathcal{L}\ ,\ \ [x\,,x] = 0 \tag{8.1}$$

$$\forall (x\,;\,y\,;z) \in \mathcal{L}^3\ ,\ \ [[x\,,y]\,,z] + [[y\,,z]\,,x] + [[z\,,x]\,,y] = 0\ . \tag{8.2}$$

Définition 8.1.2. *Soient $\mathcal{L}_1\,,\mathcal{L}_2$ deux algèbres de Lie. $\varphi : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ est un morphisme d'algèbre de Lie si φ est un morphisme d'algèbre et pour tout $(x\,;y) \in {\mathcal{L}_1}^2$, $\varphi([x\,,y]) = \big[\varphi(x)\,,\varphi(y)\big]$.*

Définition 8.1.3. *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre associative , elle possède une structure naturelle d'algèbre de Lie. On définit $[x\,,y] = xy - yx$ pour tout $x\,,y \in \mathcal{A}$.*

Proposition 8.1.1. *Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Il existe une algèbre associative $\mathcal{A}_0$ sur $\mathbb{K}$ et un morphisme d'algèbre de Lie $\varphi_0 : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}_0$ tels que $(\mathcal{A}_0\,,\varphi_0)$ ait la propriété universelle : pour tout algèbre associative $\mathcal{A}$ et tout morphisme d'algèbre de Lie $\varphi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}$, il existe un unique morphisme d'algèbre de Lie $f : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}$ tel que le diagramme suivant commute. $\mathcal{A}_0$ est dite algèbre enveloppante de $\mathcal{L}$. Elle est unique à isomorphisme près.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{A}_0 \arrow[d, "f"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Démonstration. **1. La construction de $\mathcal{A}_0$**
On voit $\mathcal{L}$ comme un espace vectoriel et on considère son algèbre tensorielle $T(\mathcal{L}) = \bigoplus\limits_{n\geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$ sur $\mathbb{K}$.

$$\begin{tikzcd} & T(\mathcal{L}) \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{L} \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{A}_0 \arrow[d, "f"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Soit I l'idéal de $T(\mathcal{L})$ engendré par $\{x \otimes y - y \otimes x - [x\,,y]; (x\,;y) \in \mathcal{L}^2\}$. On pose $\mathcal{A}_0 = T(\mathcal{L})/I$. Soient i l'inclusion $i : \mathcal{L} \longrightarrow T(\mathcal{L})$ et $p : T(\mathcal{L}) \longrightarrow T(\mathcal{L})/I$ la projection canonique. On pose $\varphi_0 = p \circ i$. $\mathcal{A}_0$ est une algèbre associative munie du crochet de Lie naturel.
2. Vérifions que φ_0 est un morphisme de l'algèbre de Lie
Pour tout $(x\,;y) \in \mathcal{L}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_0([x\,,y]) = &\; p([x\,,y]) = p(x \otimes y - y \otimes x) \\ = &\; p(x)p(y) - p(y)p(x) = [p(x)\,,p(y)] \\ = &\; [p \circ i(x)\,,p \circ i(y)] = [\varphi_0(x)\,,\varphi_0(y)]\ . \end{aligned}$$

Donc, φ_0 est un morphisme de l'algèbre de Lie.
3. Vérifions que f est bien définie
Pour tout n et tout $a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \in T(\mathcal{L})$, l'unique façon de definir f pour que f soit un morphisme et que $\varphi = f \circ p$ est

$$f\big(p(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n)\big) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_n) \quad ,$$

f est correctement définie. En effet, si $p(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) = p(\tilde{a_1} \otimes \tilde{a_2} \otimes \cdots \otimes \tilde{a_n})$, on a :
$a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n - \tilde{a_1} \otimes \tilde{a_2} \otimes \cdots \otimes \tilde{a_n} \in I$, c'est-à-dire :

$$a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n - \tilde{a_1} \otimes \tilde{a_2} \otimes \cdots \otimes \tilde{a_n} = b \otimes (\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha - [\alpha\,,\beta]) \otimes c \quad ,$$

où $(b; c) \in T(\mathcal{L})^2\,, \alpha\,, \beta \in \mathcal{L}$.

$$\begin{aligned} & f\big(p(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) - p(\tilde{a_1} \otimes \tilde{a_2} \otimes \cdots \otimes \tilde{a_n})\big) \\ & = f\big(p(b \otimes (\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha - [\alpha\,,\beta]) \otimes c)\big) \\ & = f\big(p(b)p(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha - [\alpha\,,\beta])p(c)\big) \\ & = 0 \end{aligned}$$

Donc f est bien définie. Pour tout $a \in \mathcal{L}$,

$$f \circ \varphi_0(a) = f\big(p(a)\big) = \varphi(a)\ .$$

Donc, le diagramme commute. $\square$

8.2 Objets libres sur un ensemble

Définition 8.2.1. *Soit A un ensemble. On appelle groupe libre (resp. magma libre, algèbre libre, algèbre libre associative, $\cdots$) sur A la donnée d'un groupe X (resp. magma libre, algèbre libre, algèbre libre associative, $\cdots$) et d'une application $i : A \longrightarrow X$ tels que $(X\,, i)$ possède la propriété universelle suivante : pour tout groupe Y (resp. magma libre, algèbre libre, algèbre libre associative, $\cdots$) et toute application $j : A \longrightarrow Y$, il existe un unique morphisme de groupe $f : X \longrightarrow Y$ tel que $f \circ i = j$ (resp. magma libre, algèbre libre, algèbre libre associative, $\cdots$) .*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[dl, "f"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Remarque 8.2.1. *Comme à chaque fois avec la propriété universelle, si de tels objets libres existent, il sont uniques à isomorphisme près.*

Remarque 8.2.2. *Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif unitaire. Le $\mathbb{K}$-module libre sur E est un groupe libre sur E . Les polynômes associatifs sur $\mathbb{K}$ dont les indéterminées sont les objets de A est une $\mathbb{K}$-algèbre libre associative sur A .*

Dans cette section, nous nous intéressons au cas des magmas libres et des algèbres non associatives libres.

8.2.1 Magmas libres

Définition 8.2.1.1. *Fixons A un ensemble. On appelle aussi alphabet par abus de terminologie avec le cas des monoïdes. Le magma libre sur A noté $M(A)$ est l'ensemble des mots parenthésés ; il est muni de la loi :*

$$\begin{array}{rccc} (\,,\,): & M(A) \times M(A) & \longrightarrow & M(A) \\ & (u\,, v) & \longmapsto & \big((u)(v)\big)\ . \end{array}$$

Nous le définissons récursivement en définissant la famille $M_n(X)$:

$$\begin{cases} M_1(A) = A \\ \\ M_n(A) = \displaystyle\bigsqcup_{(p\,,q)\in\mathbb{N}^2, p+q=n} M_p(A) \times M_q(A)\ , \end{cases}$$

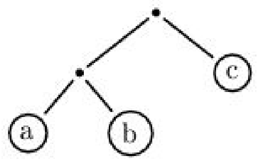
où $\bigoplus$ désigne l'union disjointe d'ensembles. Alors, $M(A) = \displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} M_n(A)$ est bien un magma.

Exemple : Si $A = \{a\,; b\,; c\}$, $\big((ab)\big)$ et $\big((bc)a\big)$ sont deux éléments de $M(A)$, ainsi que :

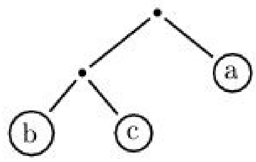
$$\Big(\big((ab)c\big)\big((bc)a\big)\Big)\ .$$

Remarque 8.2.1.1. *$M(A)$ s'identifie à l'ensemble des arbres binaires complet (planaires) .*

Deux mots parenthésés à concaténer :



(ab)c



(bc)a

L'arbre représentant la concaténation des deux mots parenthésés :

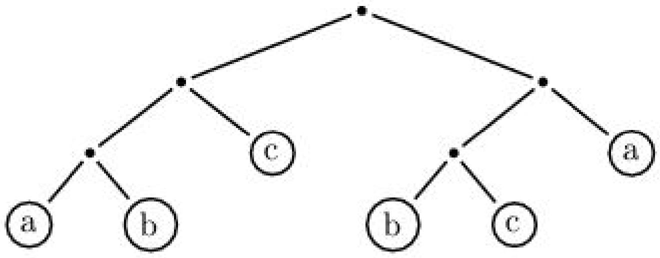


FIGURE 8.1 – Représentation sous forme d'arbre d'un élément de $M(A)$, lorsque $A = \{a\,;b\,;c\}$.

Vérifions maintenant que $\big(M(A)\,,i\big)$ avec $i : A \longrightarrow M(A)$ l'injection canonique possède la propriété universelle :
Soient N un magma et $j : A \longrightarrow N$ une application. Alors, il existe un unique morphisme de magma $f : M(A) \longrightarrow N$ tel que $f \circ i = j$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & M(A) \arrow[dl, "f"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Preuve : On définit $f_n : M_n(A) \longrightarrow N$ récursivement :
Si $n = 1$, $f_1 = j$,
Si $u \in M_p(A)$, $v \in M_q(A)$, $p + q = n + 1$, $f_{n+1}(u\,,v) = \big(f_p(u)\,,f_q(v)\big)$.
Il est alors clair que $f : M(A) \longrightarrow N$ étant induite par chacune des f_n est l'unique morphisme rendant le diagramme ci-dessus commutatif.

8.2.2 Algèbre libre

Fixons toujours le même ensemble A et un anneau commutatif $\mathbb{K}$. Dans ce paragraphe $(M\,,\cdot)$ désigne un anneau.

Définition 8.2.2.1. *Soit $f_m : M \longrightarrow \mathbb{K}$, où f_m l'indicatrice de $m \in M$, c'est-à-dire :*

$$f_m(x) = \begin{cases} 1\ , & si\ x = m; \\ 0\ , & si\ x \neq m\ . \end{cases}$$

Définissons $\mathbb{K}^{(M)}$ l'ensemble des formes $\sum_{m \in M} \lambda_m f_m$, où $(\lambda_m)_{m \in M}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ dont un nombre fini sont non-nuls. Munissons $\mathbb{K}^{(M)}$ une structure *de $\mathbb{K}$-algèbre en posant $f_{m \cdot n} = f_m f_n$ pour tout $(m\,,n) \in M^2$, et on étend la multiplication à $\mathbb{K}^{(M)}$ par bilinéarité. La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}^{(M)}$ s'appelle la $\mathbb{K}$-algèbre du magma M .*

Remarque 8.2.2.1. *Nous avons une injection $i : M \longrightarrow \mathbb{K}^{(M)}$:*

$$\begin{array}{rccl} i : & M & \longrightarrow & \mathbb{K}^{(M)} \\ & m & \longmapsto & f_m \ . \end{array}$$

Nous prouvons maintenant définir l'algèbre libre sur A .

Définition 8.2.2.2. *Notons $M(A)$ le magma libre sur A . On appelle, et on note $D(A)$, $\mathbb{K}$-algèbre libre sur A la $\mathbb{K}$-algèbre du magma $M(A)$.*

Remarque 8.2.2.2. *Nous avons les injections $A \longrightarrow D(A)$ et $M(A) \longrightarrow D(A)$ puisque nous avons les injections $A \longrightarrow M(A) \longrightarrow \mathbb{K}^{\big(M(A)\big)} = D(A)$.*

Désormais, notons $i : A \longrightarrow D(A)$ et identifions $\displaystyle\sum_{m \in M(A)} \lambda_m f_m \in D(A)$ à $\displaystyle\sum_{m \in M(A)} \lambda_m m$ où $(\lambda_m)_{m \in M}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ dont un nombre fini sont non-nuls car on peut identifier f_m à m . Vérifions que $\big(D(A)\,,i\big)$ possède la propriété universelle : soient B une $\mathbb{K}$-algèbre et $j : A \longrightarrow B$ une application. Il existe un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre $f : D(A) \longrightarrow B$ tel que $f \circ i = j$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & D(A) \arrow[dl, "f"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Démonstration. On voit tout d'abord B comme un magma. Soit $i_1 : A \longrightarrow M(A)$ l'injection canonique. D'après la propriété universelle de $\big(M(A)\,,i\big)$, il existe un morphisme de magma $f_1 : M(A) \longrightarrow B$ tel que $f_1 \circ i_1 = j$, où $i_1 : A \longrightarrow M(A)$ désigne l'injection canonique.
Pour tout $P = \displaystyle\sum_{m \in M(A)} \lambda_m m$, définissons $f(P) = \displaystyle\sum_{m \in M(A)} \lambda_m f_1(m)$.
Pour tout $a \in A$, $f \circ i(a) = f_1(a) = f_1 \circ i(a) = j(a)$. On a donc $f \circ i = j$. $\square$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[rr, bend left, "i"] \arrow[d, "j"'] & M(A) \arrow[r] \arrow[dl, "f_1"'] & D(A) \arrow[dll, "f"] \\ B & & \end{tikzcd}$$

8.3 L'algèbre de Lie libre

Soit A un ensemble. On note comme précédent $M(A)$ et $D(A)$ le magma libre sur A et la $\mathbb{K}$-algèbre libre sur A .
Bien que $D(A)$ ne soit pas associative (car sinon $M(A)$ serait associatif), nous allons tout de même parler de la notion d'idéal. [1] Nous définissons un idéal (à gauche) I de D(A) comme étant un sous-module (à gauche) de $\mathbb{K}$-module B . Il est donc possible de considérer B/I .
Désormais, nous considérons l'idéal I de $D(A)$ engendré par tout élément de la forme $(xy)z + (yz)x + (zx)y$ et (xx) , où $(x\,;y\,;z) \in D(A)^3$.

Définition 8.3.1. *On note $\mathcal{L}(A) = D(A)/I$.*

Puisque $D(A)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, $\mathcal{L}(A)$ possède une structure d'algèbre naturelle. $\mathcal{L}(A)$ possède aussi une structure d'algèbre de Lie naturelle.
En effet, en considérant le crochet

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & D(A) \times D(A) & \longrightarrow & D(A) \\ & (x\,,y) & \longmapsto & xy - yx \end{array}$$

et en le faisant passer en quotient, il induit un crochet de Lie sur $\mathcal{L}(A)$:
$\forall x \in D(A)$, $[x\,,x] = xx - xx = 0$, donc le crochet vérifie l'équation [8.1] .
$\forall (x\,,y\,,z) \in D(A)^3$, $\big[[x\,,y]\,,z\big] = (xy)z - (yx)z - z(xy) + z(yx)$,
d'où $\big[[x\,,y]\,,z\big] + \big[[y\,,z]\,,x\big] + \big[[z\,,x]\,,y\big] \in I$, donc sur $\mathcal{L}(A)$ le crochet vérifie l'équation [8.2] .
Le crochet est donc bien défini.
En appelant degré de $m \in M(A)$ l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $m \in M_n(A)$, $D(A)$ devient une $\mathbb{K}$-algèbre graduée.
En effet, en notant $D_n(A) = \mathbb{K}^{\left(M_n(A)\right)}$, il est clair que

$$\begin{cases} D(A) = \displaystyle\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} D_n(A) \\ \\ \forall (p\,;q) \in \mathbb{N}^2\ ,\ D_p(A)D_q(A) \in D_{p+q}(A) \end{cases}$$

Cette graduation passe naturellement en quotient, car I est engendré par des éléments homogènes. Ainsi : $\mathcal{L}(A) = \displaystyle\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} D_n(A)/_{(I\cap D_n(A))} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n(A)$.
Enfin, $\mathcal{L}(A)$ est une algèbre de Lie graduée. Pour vérifier cela, il suffit de voir que pour tout couple $(p\,,q) \in \mathbb{N}^2$, $\big[\mathcal{L}_p(A)\,,\mathcal{L}_q(A)\big] \in \mathcal{L}_{p+q}(A)$. Cela est clair par définition de crochet de Lie sur $\mathcal{L}_(A)$.
Ainsi, nous avons le résultat suivant :

Proposition 8.3.1. *Soit A un ensemble, alors $\mathcal{L}(A)$ est une algèbre de Lie graduée naturellement.*

L'injection $i : A \longrightarrow D(A)$ induit l'injection $i : A \longrightarrow \mathcal{L}(A)$ en gardant la même notation car l'idéal I ne contient pas d'éléments de degré 1 .

1. la notion d'idéal est normalement définie pour les anneaux. Nous, ici, $D(A)$ ne peut être un anneau (car sinon elle serait associative) .

Proposition 8.3.2. *Soit i l'inclusion $i : A \to \mathcal{L}(A)$. $\big(\mathcal{L}(A)\,,i\big)$ possède la propriété universelle suivante : pour toute algèbre de Lie $\mathcal{L}$ et toute application $f : A \to \mathcal{L}$, il existe un unique morphisme d'algèbre de Lie $\bar{f} : \mathcal{L}(A) \longrightarrow \mathcal{L}$ telle que $f = \bar{f} \circ i$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{L}(A) \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & \mathcal{L} \end{tikzcd}$$

Démonstration. Pour tout $\bar{m} \in M(A)/I$, l'unique moyen de définir $\bar{f}$ tel que le diagramme commute est $\bar{f}(\bar{m}) = f_1(m)$ où f_1 est le morphisme de magma de $M(A)$ dans $\mathcal{L}$ tel que $f_1 \circ i_1 = f$ qui existe grâce à la propriété universelle de $\big(M(A)\,,i_1\big)$ et on étend cette définition en $\mathcal{L}(A)$ par linéarité.$\bar{f}$ est naturellement un morphisme d'algèbre.
Par la démonstration de la partie 3 de la proposition [8.1.1] , on sait que $\bar{f}$ est bien définie et le diagramme commute.
Vérifions que $\bar{f}$ est un morphisme par rapport du crochet de Lie. Pour tout $\bar{m_1}\,,\bar{m_2} \in M(A)/I$,

$$\begin{aligned}\bar{f}([\bar{m_1}\,,\bar{m_2}]) =& \bar{f}\big((\bar{m_1})(\bar{m_2}) - (\bar{m_2})(\bar{m_1})\big)\\ =& \bar{f}(\bar{m_1})\bar{f}(\bar{m_2}) - \bar{f}(\bar{m_2})\bar{f}(\bar{m_1})\\ =& f_1(m_1)f_1(m_2) - f_1(m_2)f_1(m_1)\\ =& [f(m_1)\,,f(m_2)]\end{aligned}$$

Donc, $\bar{f}$ est un morphisme d'algèbre de Lie. □

Maintenant, on considère l'algèbre enveloppante de $\mathcal{L}(A)$. On note $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$. φ_0 est l'application introduite dans la proposition [8.1.1].

Proposition 8.3.3. $\Big(U\big(\mathcal{L}(A)\big)\,,\varphi_0 \circ i\Big)$ *possède la propriété universelle : pour toute algèbre associative $\mathcal{A}$ et l'application $f : A \to \mathcal{A}$, il existe un unique morphisme d'algèbre $\bar{f} : U\big(\mathcal{L}(A)\big) \longrightarrow \mathcal{A}$ tel que $f = \bar{f} \circ (\varphi_0 \circ i)$.*

Démonstration. En effet, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi_0 \circ i"] \arrow[dr, "i"] \arrow[ddr, "f"'] & & U\big(\mathcal{L}(A)\big) \arrow[ddl, "\bar{f}"] \\ & \mathcal{L}(A) \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[d, "g"] & \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

g uniquement existe d'après la propriété universelle de $\big(\mathcal{L}(A)\,,i\big)$; donc $\bar{f}$ uniquement existe d'après la propriété universelle de $\Big(U\big(\mathcal{L}(A)\big)\,,\varphi_0\Big)$. Ainsi :

$$\bar{f} \circ (\varphi_0 \circ i) = g \circ i = f \ .$$

Donc, $\Big(U\big(\mathcal{L}(A)\big)\,,\varphi_0 \circ i\Big)$ possède la propriété universelle. □

Désormais, on notera $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre sur A .

Chapitre 9

Le dual gradué de $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$ et l'algèbre de mélange

Dans ce chapitre, on suppose que A soit un ensemble fini : $A = \{a_1; \cdots; a_n\}$. Cela entraîne que $\mathcal{L}(A)$, l'algèbre de Lie libre sur A est une somme directe d'espaces vectoriels de dimension finie (la proposition [8.3.1]) .

9.1 La structure de Hopf sur $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$

Le théorème suivant sera central dans ce qui suit. Il est bien connu ; c'est pourquoi nous ne le démontrerons pas.

Théorème 9.1.1 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Supposons que $\mathcal{L}$ soit un $\mathbb{K}$-module libre avec une base totalement ordonnée $(x_i)_{i\in I}$. Soient $\mathcal{A}_0$ son algèbre enveloppante et $\varphi_0 : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}_0$ le morphisme naturel d'algèbre de Lie. Alors, $\mathcal{A}_0$ est une $\mathbb{K}$-module libre. Sa base est l'ensemble des produits croissants $\varphi_0(x_{i_1})\cdots\varphi_0(x_{i_k})$ où :*
$k \geq 0\,,(i_1\,;\cdots\,;i_k) \in I^k$ et $i_1 \leq \cdots \leq i_k$.

Proposition 9.1.1. *Soit $A = \{a_1\,;\cdots\,;a_n\}$. $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$ est engendrée par les éléments $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$ où :*
$k \geq 0\,, i_1\,,\cdots\,,i_k \in [\![1\,;n]\!]$ et $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$.

Remarque 9.1.1. *Il serait plus précis de dire que $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$ est engendrée par les éléments de la forme $\pi\circ\varphi_2\circ\varphi_1(a_{i_1})\cdots\pi\circ\varphi_2\circ\varphi_1(a_{i_k})$, où π , φ_2 et φ_1 sont les injections canoniques :*

$$A \xhookrightarrow{\varphi_1} M(A) \xhookrightarrow{\varphi_2} \mathbb{K}^{\big(M(A)\big)} = D(A) \xhookrightarrow{\pi} D(A)/I = \mathcal{L}(A)\ .$$

Mais cela serait beaucoup plus lourd. Nous ne le ferons pas.

Démonstration. Dans ce cas, l'application correspondante φ_0 est le quotient par rapport à l'idéal introduit dans la proposition [8.1.1]. Le quotient préserve les éléments de A , ce qui montre que $\varphi_0(a_i) = a_i\,, i \in \{1\,,2\,,\ldots\,,n\}$. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt prouve alors cette proposition. □

Remarque 9.1.2. *L'algèbre tensorielle $T\big(\mathcal{L}(A)\big)$ de $\mathcal{L}(A)$ est une algèbre associative non-commutative. $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$ est aussi associative non-commutative comme algèbre quotient de $T\big(\mathcal{L}(A)\big)$.*

Proposition 9.1.2. *Il y a une identification entre $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$ et $\mathbb{K}{<}A{>}$.*

Démonstration. Par l'identification de la remmarque et par la proposition précédente, il est facile de voir que $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$ est une algèbre associative non-commutative graduée dont la partie homogène de degré l est engendrée par $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_l}$,
où $i_1\,,\cdots,i_l\in\{1\,,2\,,\ldots,n\}$ avec $i_1\le i_2\le\cdots\le i_l$.
Chaque terme $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_l}$ s'identifie naturellement au mot $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_l}\in A^*$.
On définit les opérateurs $conc\,,\delta\,,k\cdot 1\,,(-\,,1)$ sur $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$ en suivant les mêmes formules que sur $\mathbb{K}{<}A{>}$.
Par l'associativité et la non-commutativité de $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$, on sait que cette implémentation est possible.
Donc, de cette façon, on a une identification entre $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$ et $\mathbb{K}{<}A{>}$. □

Cette identification montre alors :

Théorème 9.1.2. $\Big(U\big(\mathcal{L}(A)\big)\,,conc\,,k\cdot 1\,,\delta\,,(-\,,1)\Big)$ *possède une structure d'algèbre de Hopf graduée.*

9.2 Le dual gradué de $U\big(\mathcal{L}(A)\big)$ et sa structure d'algèbre de mélange

Définition 9.2.1 (Le dual gradué d'une algèbre graduée)**.** *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre graduée. On définit une algèbre graduée $\mathcal{A}^g$ dont la partie homogène de degré n est donné par : ${\mathcal{A}^g}_{(n)}={\mathcal{A}_{(n)}}^*$. $\mathcal{A}^g$ est appelé le dual gradué de $\mathcal{A}$.*

Pour que cela ait un sens, on prolonge toute forme linéaire d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ en une forme linéaire de $\mathcal{A}$. Cela revient à identifier, pour tout $n\in\mathbb{N}$, dans notre contexte, ${\mathcal{A}_{(m)}}^*$ à $\{f\in\mathcal{A}^*|f(\mathcal{A}_{(k)})=(0)\ si\ k\neq m\}$. Cette identification autorise désormais l'addition de $f\in{\mathcal{A}_{(p)}}^*$ et $g\in{\mathcal{A}_{(q)}}^*$, même si $p\neq q$.
On vérifie alors, avec cette identification que ${\mathcal{A}_{(1)}}^*,{\mathcal{A}_{(2)}}^*,\cdots$ sont bien en somme directe.

Désormais, on considère $U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g$, que l'on veut munir d'une structure d'algèbre de Hopf graduée.

Par définition, ${U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g}_{(l)}=U\big(\mathcal{L}(A)\big)^*_{(l)}\,,l\in\mathbb{N}$. C'est un espace vectoriel de dimension fini car A est un ensemble fini.
La base duale de $U\big(\mathcal{L}(A)\big)^*_{(l)}$ est
$\big\{(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_l})^*|a_{i_1}\,,a_{i_2}\,,\cdots,a_{i_l}\in A\,,i_1\,,\cdots,i_l\in[\![1\,;n]\!]\,,i_1\le i_2\le\cdots\le i_l\big\}$.
Pour obtenir une structure d'algèbre de Hopf, on va définir quelques opérateurs sur $U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g$ en citant les notations $sh\,,k\cdot 1\,,conc^*\,,(-\,,1)\,,\alpha$ dans le chapitre 7.

Définition 9.2.2. *i) Soient $(u_1u_2\cdots u_l)^*\in{U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g}_{(l)}$, $(v_1v_2\cdots v_m)^*\in{U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g}_{(m)}$. Définissons la multiplication*

$$sh\big((u_1u_2\cdots u_l)^*,(v_1v_2\cdots v_m)^*\big)=\big((u_1u_2\cdots u_l)\sqcup\!\sqcup(v_1v_2\cdots v_m)\big)^*\ .$$

On note sh sans ambiguïté avec la notation dans le chapitre 7.

$$\begin{array}{rccc} sh : & U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g \otimes U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g & \longrightarrow & U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g \\ & (u_1u_2\cdots u_l)^* \otimes (v_1v_2\cdots v_m)^* & \longmapsto & \big((u_1u_2\cdots u_l) \sqcup (v_1v_2\cdots v_m)\big)^* . \end{array}$$

ii) L'unité est

$$u(1_{\mathbb{K}}) = 1^* \ .$$

Notons $u = k \cdot 1^*$.

Remarque 9.2.1. $\Big(U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g \,, sh \,, k{\cdot}1^*\Big)$ *est une algèbre associative non-commutative graduée, grâce à la définition de sh et* $k \cdot 1^*$.

Définition 9.2.3. *i) Définissons une comultiplication* $conc^*$ *sur* $U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g$ *: pour tout* $(u_1u_2\cdots u_l)^* \in U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g{}_{(l)}$,

$$conc^*\big((u_1u_2\cdots u_l)^*\big) = (u_1u_2\cdots u_l)^* \otimes 1^* + (u_1)^* \otimes (u_2\cdots u_l)^* + \cdots + 1^* \otimes (u_1u_2\cdots u_l)^* \ .$$

On note $conc^*$ *sans ambiguïté avec la notation dans le chapitre 7.*
ii) La counité est définie par $\varepsilon(1^*) = 1_{\mathbb{K}}$ *et* $\varepsilon(u^*) = 0$ *pour tout* $u^* \in \mathcal{L}(A)^*$ *. Notons*

$$(- \,, 1^*) = \varepsilon \ .$$

Remarque 9.2.2. $\Big(U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g \,, conc^* \,, (- \,, 1^*)\Big)$ *est une cogèbre associative non-com -mutative, grâce à la définition de* $conc^*$ *et de* $(- \,, 1^*)$.

Définition 9.2.4. *Définissons l'antipode* α *: pour tout* $(u_1u_2\cdots u_l)^* \in U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g{}_{(l)}$,

$$\alpha\big((u_1u_2\cdots u_l)^*\big) = \big(\alpha(u_1u_2\cdots u_l)\big)^* \ .$$

Notons aussi α *sans ambiguïté avec la notation dans le chapitre 7.*

La compatibilité entre sh et $conc^*$ est préservée, car ils commutent avec * . α est l'antipode car elle commute avec * . D'où, la proposition suivante :

Proposition 9.2.1. $\Big(U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g \,, sh \,, k \cdot 1^* \,, conc^* \,, (- \,, 1^*)\Big)$ *est une algèbre de Hopf.*

En utilisant le résultat de la proposition [9.1.2], on obtient le théorème suivant :

Théorème 9.2.1. $\Big(U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g \,, sh \,, k \cdot 1^* \,, conc^* \,, (- \,, 1^*) \,, \alpha\Big)$ *s'identifie à* $\big(\mathbb{K}{<}A{>} \,, sh \,, k \cdot 1 \,, conc^* \,, (- \,, 1) \,, \alpha\big)$ *comme l'algèbre de mélange.*

9.3 Algèbre de mélange sur A

Pour conclure, on appelle algèbre de mélange sur A la structure d'algèbre de Hopf que l'on vient de décrire sur $U\big(\mathcal{L}(A)\big)^g$, ou ce qui revient au même d'après l'identification précédente, celle de décrite sur $\mathbb{K}{<}A{>}$ au chapitre 7 par dualité :
Par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on a vu qu'une base de l'algèbre de mélange est donnée par les mots $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_l}$ où $i_1 \,, \cdots \,, i_l \in [\![1\,;n]\!]$ avec
$i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_l$. De tels mots sont appélés mots de *Lyndon*.

Rappelons la définition donnée des mots de *Lyndon* est celle-ci : un mot est de *Lyndon* s'il est plus petit que tous ses facteurs droits. Évidemment, ces deux définitions sont équivalentes. Pour plus de détails sur ces mots, on renvoit le lecteur à [6] Chapitre 5. Pour finir, nous mentionnons un théorème que l'on trouvera la démonstration dans [6] Chapitre 4,5,6 . Celle-ci repose sur la factorisation de *Lyndon* des mots (tout mot est produit d'une suite décroissante de mots de *Lyndon*, et ce d'une unique façon) .

Théorème 9.3.1. *L'algèbre de mélange sur l'alphabet totalement ordonné A est librement engendré par les mots de Lyndon.*

Bibliographie

[1] BOURBAKI, *Algèbre* in *Éléments de mathématiques.*, Paris, Herman, 1947. Chapitre 1-3.

[2] BOUVIER Alain et al. *Dictionnaire des Mathématiques*, 3e édition,Paris, PUF, 2009. p. 132.

[3] CHAMBADAL L, J.L. OVAERT. *Algèbre linéaire et algèbre tensorielle*, Paris, Dunod, 1968.

[4] KASSEL C. *Quantum groupes*, New York, Springer-Verlag, , 1995. Chapitre 1-3.

[5] MANCHON.D. *Hopf algebras and renormalisation* in *Handbook of algebra, Vol. 5*, Amsterdam, CWI, 2009.

[6] REUTENAUER C. *Free lie algebras*, New York, Oxford University Press , 1993. Chapitre 0-3, 6.

[7] SWEEDLER, E. MOSS *Hopf algebras*, New York, W.A.Benjamin, 1969.

[8] *Wikipédia*, «Limite inductive.», [Consultation : 25 Avril 2012]. Disponible : $http : //fr.wikipedia.org/wiki/Limite_inductive.$

[9] *Wikipédia*, «Limite projective.», [Consultation : 25 Avril 2012]. Disponible : $http : //fr.wikipedia.org/wiki/Limite_projective.$