

CH.7 PROBLÈME DE FLOTS

- 7.1 Les réseaux de transport
- 7.2 Le flot maximum et la coupe minimum
- 7.3 L'algorithme de Ford et Fulkerson

IMAC ch 7 1

7.1 Les réseaux de transports

Réseau de transport : graphe orienté avec pour chaque arc une *capacité*.

La capacité $c(a)$ est un entier positif ou nul.

Il y a aussi une source s et un puits t . Aucun arc n'arrive à la source et aucun arc ne quitte le puits.

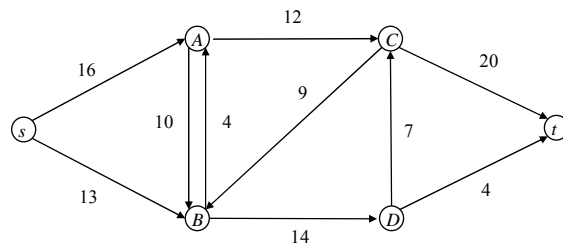
Un flot est une fonction entière positive ou nulle f définie sur les arcs satisfaisant :

Contrainte de capacité : $f(a) \leq c(a)$;

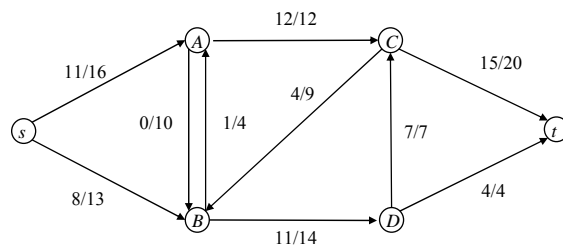
Conservation du flot : pour tout sommet autre que s et t , la somme des flots sur les arcs entrants et la somme des flots sur les arcs sortants sont égales.

Exemples : circuits électriques ou hydrauliques,
réseaux de communication, modélisation de transports

IMAC ch 7 2



Réseau de transport avec les capacités



Un flot sur le réseau de transport

Quand deux arcs en sens inverse relient deux sommets, on peut toujours annuler la fonction flot sur l'un des deux.

Propriétés :

la somme des flots sur les arcs sortant de source et la somme des flots sur les arcs arrivant au puits sont égales ; cette valeur est la *valeur* du flot $|f|$;

si on sépare les sommets en deux sous-ensembles E contenant s et $F = A - E$, contenant t , alors, la somme des valeurs du flot sur les arcs de E vers F moins la somme des valeurs du flot sur les arcs de F vers E vaut aussi $|f|$.

Une telle séparation en deux sous ensembles des sommets est appelée une *coupe* et cette différence de sommes de flots est appelée *flot net* traversant la coupe.

La deuxième propriété est donc que le flot net traversant une coupe ne dépend pas de la coupe.

Démonstration des propriétés :

Pour la deuxième, on part de $E_0 = \{ s \}$.

Puis on ajoute les sommets un à un jusqu'à obtenir E .

La propriété de conservation du flot pour chaque sommet ajouté permet de vérifier que le flot net est invariant.

La première propriété en découle, avec $E = \{ s \}$, puis avec $E = A - \{ t \}$.

Si E/F est une coupe du réseau, la *capacité* de la coupe est la somme des capacités des arcs allant de E vers F .

La propriété de l'invariance du flot net montre que $|f|$ est inférieur à la capacité de n'importe quelle coupe.

IMAC ch 7 5

7.2 Le flot maximum et la coupe minimum

Il existe toujours un flot possible qui est le flot nul.

Problème : comment trouver un flot qui a la valeur maximum ?

Celui de l'exemple est-il maximum ?

Recherche d'un *chemin améliorant*.

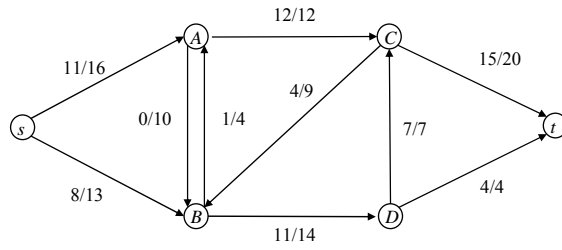
Déterminer le *réseau résiduel* :

pour chaque arc $a = uv$, $f(a) \leq c(a)$, on peut augmenter le flot de $c(a) - f(a)$, et on peut le diminuer de $f(a)$, donc faire passer un flot $f(a)$ sur un arc $-a = vu$. Si cet arc existe déjà avec une capacité $c(-a)$, celle-ci s'ajoute à $f(a)$.

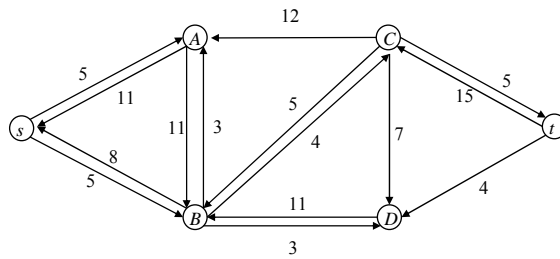
Le graphe orienté avec ces capacités est le *réseau résiduel*.

On cherche un chemin de s à t dans le réseau résiduel. Il correspond à une possibilité d'amélioration du flot en modifiant de la valeur du minimum des capacités résiduelles sur le chemin.

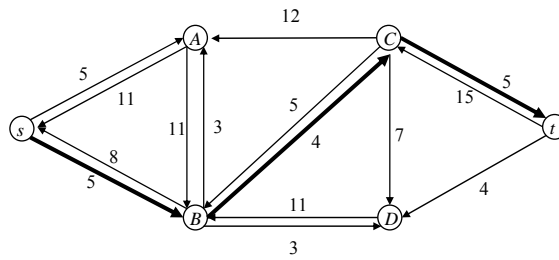
IMAC ch 7 6



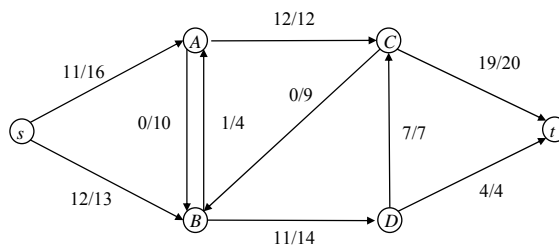
Le flot



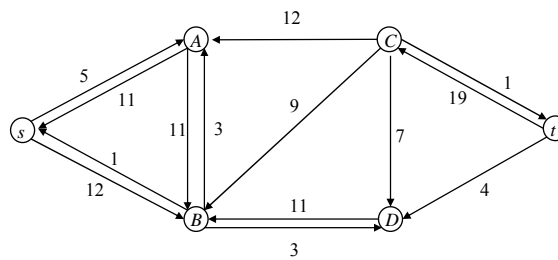
Le réseau résiduel correspondant



Un chemin améliorant



Le flot après amélioration



Le nouveau réseau résiduel

Dans ce réseau, il n'y a pas de chemin de s à t , donc pas de chemin améliorant.

Théorème (flot maximum et coupe minimum)

Si f est un flot dans un réseau de transport, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est un flot maximum ;
2. Le réseau résiduel de f ne contient aucun chemin améliorant ;
3. Il existe une coupe E/F dont la capacité vaut $|f|$.

Remarque :

La condition 3. implique que $|f|$ est la valeur minimum des capacités des coupes du réseau, puisqu'on sait déjà que $|f|$ est inférieur à la capacité de n'importe quelle coupe.

D'où le nom du théorème.

Démonstration :

1. \Rightarrow 2. Si on trouve un chemin améliorant, on peut augmenter f . Ce flot n'était donc pas maximum.
2. \Rightarrow 3. S'il n'y a pas de chemin améliorant, soit E la composante fortement connexe de s dans le graphe résiduel. Le complémentaire $F = A - E$ contient t . Tous les arcs entre E et F dans le graphe résiduel vont de F vers E . Donc pour tout arc a du réseau initial de E vers F la valeur du flot est égale à la capacité et elle est nulle pour tout arc de F vers E . Donc $|f|$ est égal à la capacité de la coupe E/F .
3. \Rightarrow 1. Si un flot a comme valeur la capacité d'une coupe, il est nécessairement maximum, puisque tous les flots sont inférieurs à la capacité de n'importe quelle coupe.

Ce théorème justifie la recherche d'un chemin améliorant pour obtenir un flot maximal.

IMAC ch 7 11

7.3 L'algorithme de Ford et Fulkerson

On part d'un flot quelconque (éventuellement nul) ;
On fabrique le réseau résiduel ;
On cherche un chemin améliorant ;
On itère jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de tel chemin.

La complexité de l'algorithme dépend de l'implémentation.
La recherche d'un chemin améliorant peut être faite en $O(A)$;
l'actualisation du graphe résiduel aussi ;
ce qui donne donc $O(A |f_{max}|)$.
Lorsque la valeur de $|f_{max}|$ est petite, cette complexité est bonne.

La meilleure stratégie pour la recherche d'un chemin améliorant est de faire une exploration du graphe résiduel *en largeur*.
L'algorithme prend alors le nom d'algorithme d'Edmonds-Karp.

IMAC ch 7 12

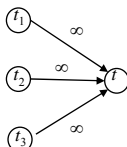
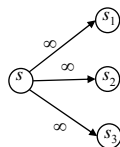
Supposons que le réseau comporte S sommets et A arcs.
 Une analyse approfondie des différences entre les divers réseaux résiduels permet de montrer que le nombre d'itérations dans l'algorithme d'Edmonds-Karp est en $O(SA)$.
 Chaque itération donne un chemin améliorant en $O(A)$, d'où une complexité en $O(SA^2)$.

D'autres méthodes (préflots) permettent de trouver le flot maximum en $O(S^3)$.

Variante et applications :

Parfois, il y a plusieurs sources et plusieurs puits.

On peut dans ce cas rajouter une "super-source" et un "super-puits" reliés respectivement aux sources et aux puits par des arcs de capacité infinie.

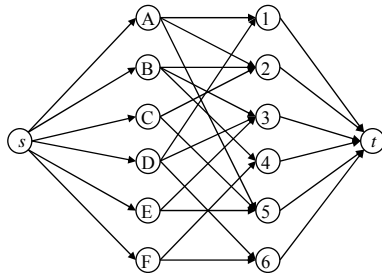


Adjonction d'une super-source et d'un super-puits

La recherche d'un couplage dans un graphe biparti peut être effectuée au moyen d'un algorithme de flot.

On oriente toutes les arêtes des personnes vers les tâches, on leur donne la capacité 1, puis on ajoute une source et un puits reliés respectivement aux personnes et aux tâches par des arcs de capacité 1.

La chaîne améliorante devient alors un chemin améliorant au sens de Floyd et Fulkerson.



Toutes les capacités
valent 1.

La valeur de $|f_{max}|$ est ici majorée par n . On a donc une complexité en $O(nA)$, comme on a déjà vu.

IMAC ch 7 15

Le théorème flot maximum et coupe minimum permet de trouver les arcs critiques. Si la capacité d'un de ces arcs est augmentée, la coupe maximum est modifiée. on peut alors progressivement arriver à avoir une suite d'augmentation de capacités permettant d'obtenir un flot améliorant.

Parfois, un réseau évolue dans le temps : phase transitoire, modification des capacités avec le temps. Si le temps est discret et que le parcours d'un arc prend une unité de temps, on peut représenter le réseau à chaque valeur du temps discret en connectant les sommets d'un niveau au suivant. Cela permet de résoudre des problèmes logistiques (Délestages de routes en cas de bouchons prévus, ...)

IMAC ch 7 16