COMBINATOIRE DES POLYNÔMES MULTIVARIÉS

Alain Lascoux
CNRS, Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée
77454 Marne-la-Vallée Cedex, France
Center for Combinatorics, Nankai University
Tianjin 300071, P.R. China
Alain.Lascoux@univ-mlv.fr

25 avril 2003

1 Fonctions symétriques

Alphabet $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ (totalement ordonné, pour préparer le cas non symétrique, ou non commutatif).

1.1 Séries génératrices

.

Avec une variable supplémentaire filtrant le degré, on a trois séries associées à un alphabet :

$$\lambda_z(\mathbb{A}) := \prod_{a\in\mathbb{A}} (1+za) \ , \ \sigma_z(\mathbb{A}) := \prod_{a\in\mathbb{A}} \frac{1}{1-za} \ , \ \Psi_z(\mathbb{A}) := \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{a\in\mathbb{A}} z^i a^i / i \quad (1)$$

dont le développement donne les *fonctions symétriques élémentaires* $\Lambda^i(\mathbb{A})$, *fonctions complètes* $S^i(\mathbb{A})$, les *sommes de puissance* $\Psi_i(\mathbb{A})$:

$$\lambda_z(\mathbb{A}) = \sum z^i \, \Lambda^i(\mathbb{A}) \ , \ \sigma_z(\mathbb{A}) = \sum z^i \, S^i(\mathbb{A}) \ , \ \boldsymbol{\Psi}_z(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} z^i \Psi_i(\mathbb{A})/i \ . \quad (2)$$

Comme $\log(1/(1-a) = \sum_{i>0} a^i/i$, on a

$$\sigma_z(\mathbb{A}) = \exp\left(\boldsymbol{\Psi}_z(\mathbb{A})\right) \quad , \quad \boldsymbol{\Psi}_z(\mathbb{A}) = \log\left(\sigma_z(\mathbb{A})\right) \quad (3)$$

Les séries $\sigma_z(\mathbb{A})$ ou $\lambda_z(\mathbb{A})$ jouent le role de l'exponentielle. L'addition des alphabets induit le produit :

$$\lambda_z(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \lambda_z(\mathbb{A})\,\lambda_z(\mathbb{B}) \quad , \quad \sigma_z(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \sigma_z(\mathbb{A})\,\sigma_z(\mathbb{B}) \ . \tag{4}$$

En prenant les coefficients de z^n, $n \in \mathbb{N}$, on obtient les identités équivalentes

$$\Lambda^n(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \sum_{i+j=n} \Lambda^i(\mathbb{A})\Lambda^j(\mathbb{B}) \quad \& \quad S^n(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \sum_{i+j=n} S^i(\mathbb{A})S^j(\mathbb{B}) \tag{5}$$

Réciproquement, une série formelle en z : $1 + zS^1 + z^2S^2 + \cdots$ peut s'interpréter comme une série $\sigma_z(\mathbb{A})$ ou $\lambda_z(\mathbb{A})$, de la même manière que l'on peut écrire un polynôme en z sous forme factorisée : toute suite finie $1, \Lambda^1, \ldots, \Lambda^n$ peut être interprétée comme la suite des fonctions élémentaires d'un alphabet de cardinal n.

Etendant l'analogie avec l'exponentielle, on écrit le quotient de deux séries, ou une puissance complexe quelconque comme suit :

$$\sigma_z(\mathbb{A}-\mathbb{B}) := \frac{\prod_{b\in\mathbb{B}}(1-zb)}{\prod_{a\in\mathbb{A}}(1-za)} \quad , \quad \sigma_z(c\,\mathbb{A}) = (\sigma_z(\mathbb{A}))^c \ , \ c \in \mathbb{C} \ . \tag{6}$$

Par produit des fonctions de base, on obtient des bases linéaires de l'anneau des polynômes symétriques $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$:

$$\begin{cases} \Lambda^I(\mathbb{A}) & := & \Lambda^{i_1}(\mathbb{A})\Lambda^{i_2}(\mathbb{A})\cdots \\ S^I(\mathbb{A}) & := & S^{i_1}(\mathbb{A})S^{i_2}(\mathbb{A})\cdots \\ \Psi^I(\mathbb{A}) & := & \Psi^{i_1}(\mathbb{A})\Psi^{i_2}(\mathbb{A})\cdots \end{cases} \ , \tag{7}$$

1.2 Fonctions génératrices matricielles

Pour tout alphabet, on définit les deux matrices de Toeplitz infinies suivantes :

$$\mathbb{S}(\mathbb{A}) = \left[S^{j-i}(\mathbb{A})\right]_{i,j\geq 0} \quad \& \quad \mathbb{L}(\mathbb{A}) = \left[\Lambda^{j-i}(\mathbb{A})\right]_{i,j\geq 0} \ , \tag{8}$$

c'est-à-dire, de manière plus détaillée,

$$\mathbb{S}(\mathbb{A}) = \begin{bmatrix} S^0(\mathbb{A}) & S^1(\mathbb{A}) & S^2(\mathbb{A}) & S^3(\mathbb{A}) & \cdots \\ S^{-1}(\mathbb{A}) & S^0(\mathbb{A}) & S^1(\mathbb{A}) & S^2(\mathbb{A}) & \cdots \\ S^{-2}(\mathbb{A}) & S^{-1}(\mathbb{A}) & S^0(\mathbb{A}) & S^1(\mathbb{A}) & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}(\mathbb{A}) = \begin{bmatrix} \Lambda^0(\mathbb{A}) & \Lambda^1(\mathbb{A}) & \Lambda^2(\mathbb{A}) & \Lambda^3(\mathbb{A}) & \cdots \\ \Lambda^{-1}(\mathbb{A}) & \Lambda^0(\mathbb{A}) & \Lambda^1(\mathbb{A}) & \Lambda^2(\mathbb{A}) & \cdots \\ \Lambda^{-2}(\mathbb{A}) & \Lambda^{-1}(\mathbb{A}) & \Lambda^0(\mathbb{A}) & \Lambda^1(\mathbb{A}) & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix} .$$

Produit, inverse et puissance des fonctions génératrices $\sigma_z(\mathbb{A})$ correspondent aux mêmes opérations sur les matrices.

```
##  matrice de Toeplitz en b (=h ou e), avec signe eventuel
Toeplitz:=proc(n,b)  local i,j,cof;
  if nargs=3 then cof:=args[3] else cof:=1 fi;
  matrix([seq([0$(i-1),1,seq(cof^(j-i)* cat(b,j-i),j=i+1..n)],i=1..n)])
end:
ACE> Toeplitz(5,h);
                                    [1     h1     h2     h3     h4]
                                    [0     1      h1     h2     h3]
                                    [0     0      1      h1     h2]
                                    [0     0      0      1      h1]
                                    [0     0      0      0      1 ]

ACE> map(Toe, inverse(%));
                                  [1     -e1     e2      -e3     e4 ]
                                  [0      1      -e1     e2      -e3]
                                  [0      0       1      -e1     e2 ]
                                  [0      0       0       1      -e1]
                                  [0      0       0       0       1 ]
```

1.3 Fonctions de Schur

Prendre des matrices au lieu de séries génératrices permet de considérer des **mineurs**.

Contrairement aux conventions usuelles, on décide d'indicer les mineurs par des couples de *partitions*, écrivant J/I pour le mineur pris sur les colonnes $j_1, j_2 +1, \ldots, j_n+n-1$ et lignes $i_1, i_2 +1, \ldots, i_n+n-1$ (colonnes et lignes numérotées à partir de 0). Ainsi le mineur origine d'ordre n aura pour indice $0^n/0^n$. Pour simplifier, on écrira J pour $J/0^n$.

Par définition, la *fonction de Schur gauche* $S_{J/I}(\mathbb{A})$ est le mineur d'indice J/I de $\mathbb{S}(A)$, et la *fonction de Schur* $S_J(\mathbb{A})$, $J \in \mathbb{N}$, est le mineur d'indice $J/0^n$ de $\mathbb{S}(A)$.

La formule de Binet-Cauchy relative aux mineurs d'un produit de matrices induit

$$S_{J/I}(\mathbb{A} \pm \mathbb{B}) = \sum\nolimits_K S_{J/K}(\mathbb{A})\, S_{K/I}(\pm\mathbb{B}) \ , \tag{9}$$

somme sur toutes les partitions K (seules les partitions telles que $I \subseteq K \subseteq J$ donnent une contribution non-nulle).

De même, le théorème de Jacobi décrivant les mineurs de l'inverse d'une matrice, implique

$$\Lambda_{J/I}(\mathbb{A}) = S_{J^\sim/I^\sim}(\mathbb{A}) = (-1)^{|J/I|} S_{J/I}(-\mathbb{A}) \ , \tag{10}$$

en notant $J \to J^\sim$ la *conjugaison* des partitions.

Les fonctions de Schur sont les fonctions symétriques les plus fondamentales, et interviendront directement dans toutes les applications de la théorie des fonctions symétriques que nous allons donner.

Mais, entre autres pour faciliter les inductions, on a besoin de les généraliser.

Etant donné n et deux suites d'alphabets $\{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_n\}$, $\{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \ldots, \mathbb{B}_n\}$, and $I, J \in \mathbb{N}^n$, on définit la *(multi)fonction de Schur* par

$$S_{J/I}(\mathbb{A}_1 - \mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{A}_n - \mathbb{B}_n) := \left| S_{j_k - i_h + k - h}(\mathbb{A}_k - \mathbb{B}_k) \right|_{1 \le h,k \le n} \ . \tag{11}$$

Bien entendu, on dira fonction de Schur au lieu de multifonction ou superfonction.

Dans le cas où les mêmes alphabets sont répétés dans plusieurs colonnes successives, on séparera les blocs par un point virgule '$;$' sans répéter les alphabets à l'intérieur de chaque bloc :

$$S_{12;4}(\mathbb{A};\, \mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_1(\mathbb{A}) & S_3(\mathbb{A}) & S_6(\mathbb{B}) \\ S_0(\mathbb{A}) & S_2(\mathbb{A}) & S_5(\mathbb{B}) \\ S_{-1}(\mathbb{A}) & S_1(\mathbb{A}) & S_4(\mathbb{B}) \end{vmatrix} \ .$$

Notez que pour écrire commodément une fonction S_J, on écrit d'abord la diagonale, et on complète chaque colonne indépendamment des autres :

$$S_{12;4}(\mathbb{A};\, \mathbb{B}) \Rightarrow \begin{vmatrix} S_1(\mathbb{A}) & & \\ & S_2(\mathbb{A}) & \\ & & S_4(\mathbb{B}) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} S_1(\mathbb{A}) & S_3(\mathbb{A}) & S_6(\mathbb{B}) \\ S_0(\mathbb{A}) & S_2(\mathbb{A}) & S_5(\mathbb{B}) \\ S_{-1}(\mathbb{A}) & S_1(\mathbb{A}) & S_4(\mathbb{B}) \end{vmatrix}$$

```
Entrer une partition croissante, une liste d'alphabets
SchurDrap:=proc(pa,lA)   local n,i,j,ma;
 n:=nops(pa);
 transpose(array([seq(
  map(proc(x,i,ll) if (x>0) then s[x](op(i,ll)) elif (x=0)
         then 1 else 0 fi end,[seq(pa[i]-j+i,j=1..n)],i,lA),i=1..n)] ));
 end:
ACE> SchurDrap([1,3,5], [A1,A1, A2-A3]);
                    [s[1](A1)    s[4](A1)    s[7](A2 - A3)]
                    [   1        s[3](A1)    s[6](A2 - A3)]
                    [   0        s[2](A1)    s[5](A2 - A3)]
```

1.4 Transformations

Les fonctions de Schur ont été définies comme des déterminants. On ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice par multiplication par une matrice triangulaire de diagonale 1, mais par contre, on transforme les éléments de la matrice. Reste à trouver les multiplications qui fassent apparaître des propriétés. Le lemme suivant sera utilisé très fréquemment (pour ma part je m'en suis servi dans de nombreux calculs dès que j'ai commencé à utiliser les fonctions de Schur).

Lemme 1 *Soient $S_J(\mathbb{A}_1 - \mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{A}_n - \mathbb{B}_n)$ une fonction de Schur, et $\mathbb{D}_0, \mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_{n-1}$ une famille d'alphabets finis tels que card$(\mathbb{D}_i) \leq i$, $0 \leq i \leq n-1$. Alors $S_J(\mathbb{A}_1 - \mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{A}_n - \mathbb{B}_n)$ est égale au déterminant*

$$\left| S_{j_k - i_h + k - h}(\mathbb{A}_k - \mathbb{B}_k - \mathbb{D}_{n-h}) \right|_{1 \leq h, k \leq n}$$

En d'autres termes, on ne change pas la valeur d'une fonction de Schur $S_J(\mathbb{A}_1 - \mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{A}_n - \mathbb{B}_n)$ en remplaçant, dans la ligne h, et colonne k, la différence d'alphabet $\mathbb{A}_k - \mathbb{B}_k$ par $\mathbb{A}_k - \mathbb{B}_k - \mathbb{D}_{n-h}$. En effet, d'après (9) :

$$S_j(\mathbb{A}-\mathbb{B}-\mathbb{D}_h) = S_j(\mathbb{A}-\mathbb{B}) + S_1(-\mathbb{D}_h)\, S_{j-1}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) + \cdots + S_h(-\mathbb{D}_h)\, S_{j-h}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) \, .$$

Cette somme est tronqueé parceque $S_k(-\mathbb{D}_h)$ est nul pour $k > h$. La transformation a donc consisté à additionner à chaque ligne une combinaison linéaire des lignes inférieures, ce que l'on peut voir aussi comme la multiplication à gauche par une matrice triangulaire de diagonale 1.

Par exemple, la transformation de $S_{ijk}(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3)$ utilisant $D_0 = \emptyset$, $\mathbb{D}_1 = \{x\}$, $\mathbb{D}_2 = \{y, z\}$, est

$$\begin{bmatrix} S_i(\mathbb{A}_1 - y - z) & S_{j+1}(\mathbb{A}_2 - y - z) & S_{h+2}(\mathbb{A}_3 - y - z) \\ S_{i-1}(\mathbb{A}_1 - x) & S_j(\mathbb{A}_2 - x) & S_{h+1}(\mathbb{A}_3 - x) \\ S_{i-2}(\mathbb{A}_1) & S_{j-1}(\mathbb{A}_2) & S_h(\mathbb{A}_3) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -y-z & yz \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_i(\mathbb{A}_1) & S_{j+1}(\mathbb{A}_2) & S_{h+2}(\mathbb{A}_3) \\ S_{i-1}(\mathbb{A}_1) & S_j(\mathbb{A}_2) & S_{h+1}(\mathbb{A}_3) \\ S_{i-2}(\mathbb{A}_1) & S_{j-1}(\mathbb{A}_2) & S_h(\mathbb{A}_3) \end{bmatrix}$$

Les fonctions de Schur en un seul alphabet $\mathbb{A}$ sont par construction des fonctions symétriques. Mais avec les multifonctions de Schur, on trouve une classe beaucoup plus générale. En fait on va voir que même les monômes peuvent être écrits comme des multifonctions. L'intéret de cette écriture est d'utiliser des techniques de fonctions symétriques pour calculer des fonctions qui ne le sont pas. On verra plus tard des techniques qui permettent d'enlever la contrainte d'avoir une expression déterminantale.

Pour tout alphabet infini (totalement ordonné) $\mathbb{A}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, notons $A_n := \{a_1, \ldots, a_n\}$. Pour tout $J = [j_1, \ldots, j_n]$, notons $J^\omega := [j_n, \ldots, j_1]$ le retourné.

Lemme 2 *Soit $J \in \mathbb{N}^n$. Alors le monome a^J est égale à*

$$a^J := a_1^{j_1} \cdots a_n^{j_n} = S_{J^\omega}(\mathbb{A}_n, \ldots, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_1) \tag{12}$$

Preuve. On soustrait $\mathbb{A}_0 = 0, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots$ dans les lignes successives à partir du bas. Alors les entrées au dessus de la diagonale sont du type $S_k\big(-(\mathbb{A}_j - \mathbb{A}_i)\big)$, avec $k > (j-i)$, $j \geq i$. Elles sont donc nulles puisque ce sont des fonctions élémentaires de trop grand degré par rapport au cardinal. On lit le monôme sur la diagonale.

$$a^{532} = a_1^5 a_2^3 a_3^2 = S_{2;3;5}(a_1 + a_2 + a_3;\ a_1 + a_2;\ a_1) =$$

$$= \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 7 & -\mathbb{A}_2 \\ 1 & 3 & 6 & -\mathbb{A}_1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ \hline \mathbb{A}_3 & \mathbb{A}_2 & \mathbb{A}_1 & \end{array} = \begin{vmatrix} S_2(a_3) & S_4(0) & S_7(-a_2) \\ S_1(a_2 + a_3) & S_3(a_2) & S_6(0) \\ S_0(a_1 + a_2 + a_3) & S_2(a_1 + a_2) & S_5(a_1) \end{vmatrix}.$$

1.5 Résultant

Etant donnés deux alphabets finis $\mathbb{A}, \mathbb{B}$, notons $R(x, \mathbb{A})$, $R(x, \mathbb{B})$ les deux polynômes dont les racines sont les $a \in \mathbb{A}$ (resp. $b \in \mathbb{B}$), et
$R(\mathbb{A}, \mathbb{B}) := \prod_{a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}} (a-b)$, le *résultant* de $R(x, \mathbb{A})$ et $R(x, \mathbb{B})$.

Le résultant est le polynôme en $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ de plus petit degré parmi ceux qui s'annulent quand $R(x, \mathbb{A})$ et $R(x, \mathbb{B})$ ont une racine commune. C'était un objet essentiel de l'algèbre classique, ou de la théorie de l'élimination en une variable. Le théorème suivant montre que l'on peut l'écrire comme une fonction de Schur d'indice "rectangle", et réciproquement, toutes les constructions qui font apparaître de telles fonctions (nous verrons des fractions continues, polynômes orthogonaux et approximantes de Padé) sont liées au calculs de résultants.

Théorème 1 *Soient deux alphabets* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ *de cardinaux* n, m. *Alors*

$$R(\mathbb{A},\mathbb{B}) = S_{m^n}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = (-1)^{mn} S_{n^m}(\mathbb{B}-\mathbb{A}) \tag{13}$$

Preuve. Choisissons $a \in \mathbb{A}$. On soustrait $(\mathbb{A}-a)$ à la première ligne du déterminant $S_{m^n}(\mathbb{A}-\mathbb{B})$. Les indices étant consécutifs dans chaque ligne, on peut aussi soustraire a dans les colonnes à partir de la seconde. La première ligne est devenue

$$[\, S^m(a-\mathbb{B}), S^{m+1}(-\mathbb{B}), \ldots, S^{m+n-1}(-\mathbb{B})\,] = [\, R(a,\mathbb{B}), 0, \ldots, 0\,]$$

et le cofacteur de $R(a,\mathbb{B})$ est une expression du même type, avec $\mathbb{A}$ remplacé par $\mathbb{A}-a$. Le déterminant est donc égal à $\prod_{a\in\mathbb{A}} R(a,\mathbb{B})$. QED

2 Division

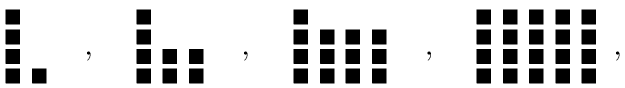
2.1 Méthode d'Euler

La division euclidienne de deux polynômes $P(x), Q(x)$, de degré m, n : $m \geq n$, produit[1] une suite de polynômes $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \ldots$, dits *restes successifs* :

$$\begin{aligned} P &= \star Q + \mathcal{R}_1 \ , deg(\mathcal{R}_1) < deg(Q)\,, \\ Q &= \star \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \ , deg(\mathcal{R}_2) < deg(\mathcal{R}_1)\,, \\ \mathcal{R}_1 &= \star \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 \, , deg(\mathcal{R}_3) < deg(\mathcal{R}_2)\,, \ldots \end{aligned} \tag{14}$$

Le dernier reste est le résultant, dont nous avons vu l'expression comme une fonction de Schur. Plus généralement, la division étant une opération qui préserve la symétrie entre les racines $b \in \mathbb{B}$ de P (et entre les racines $a \in \mathbb{A}$ de Q), les restes succesifs sont des fonctions symétriques de $\mathbb{A}$ et aussi de $\mathbb{B}$. En identifiant ces fonctions symétriques, on en obtiendra facilement différentes expressions, et en particulier, on retrouvera toutes les expressions classiques comme *sous-résultants*.

En fait, les fonctions de Schur sont encore au rendez-vous, et le résultat, peut se traduire par la suite de diagrammes suivante (pour $m = 5$, $n = 4$) :



(15)

[1]Dans le cas générique, où les coefficients des deux polynômes sont des indéterminées.

le dernier diagramme codant le résultant.

On aura compris que l'on a représenté ainsi des diagrammes indiçant des fonctions de Schur. Il reste à donner les alphabets, et une preuve.

En fait, Euler [1] a déjà indiqué la méthode à suivre. Pour deux polynômes de degré quelconque $S^m(x\text{–}\mathbb{B})$, $S^n(x\text{–}\mathbb{A})$, avec $m \geq n$ par commodité[2], les restes successifs (à normalisation près) sont les polynômes de degré minimal dans les espaces $\mathfrak{Pol}_N(\mathbb{A},\mathbb{B})$, $N = m, m+1, m+2, \ldots$

$$\mathfrak{Pol}_N(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \text{ espace } \{S^m(x\text{–}\mathbb{B}), \ldots, S^N(x\text{–}\mathbb{B})\,;\, S^n(x\text{–}\mathbb{A}), \ldots, S^N(x\text{–}\mathbb{A})\}\,.$$

En d'autres termes, Euler indique qu'il existe des multiplicateurs $\mathcal{E}_r(x)$ et $\mathcal{E}'_r(x)$ tels que

$$\mathcal{R}_r = \mathcal{E}_r(x)S^m(x\text{–}\mathbb{B}) + \mathcal{E}'_r(x)S^m(x\text{–}\mathbb{A})$$

et que $\mathcal{E}_r(x)$ et $\mathcal{E}'_r(x)$ soient de degré $\leq r\text{–}1$ et $\leq r\text{–}1 + m\text{–}n$ respectivement.

A l'aide de déterminants, il est facile de réaliser la condition d'appartenir à l'espace $\mathfrak{Pol}_N(\mathbb{A},\mathbb{B})$ et d'être de petit degré.

Soit $\mathcal{D}_r(\mathbb{A},\mathbb{B})$ le déterminant suivant, d'ordre $m\text{–}n+2r$, avec $k = m\text{–}n+2r\text{–}2$:

$$\mathcal{D}_r(\mathbb{A},\mathbb{B}) := \begin{vmatrix} S_0(-\mathbb{B}) & \cdots & S_k(-\mathbb{B}) & S_{m+r-1}(x-\mathbb{B}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{-r+1}(-\mathbb{B}) & \cdots & S_{k-r+1}(-\mathbb{B}) & S_m(x-\mathbb{B}) \\ & & & \\ S_0(-\mathbb{A}) & \cdots & S_k(-\mathbb{A}) & S_{m+r-1}(x-\mathbb{A}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{n+1-m-r}(-\mathbb{A}) & \cdots & S_{r-1}(-\mathbb{A}) & S_n(x-\mathbb{A}) \end{vmatrix}\,. \qquad (16)$$

Théorème 2 *Pour deux alphabets finis génériques, de cardinaux m, n, $m \geq n$, le determinant $\mathcal{D}_r(\mathbb{A},\mathbb{B})$ est égal au r-ième reste dans la division de $S^m(x-\mathbb{B})$ par $S^n(x-\mathbb{A})$.*

Preuve. Si on développe la dernière colonne suivant les puissances de x, on voit que les puissances $x^j : j = m+r\text{–}1, \ldots, n\text{–}r+1$ ont pour coefficients successifs les $k+1$ premières colonnes. Le déterminant est donc un polynôme de degré $\leq n\text{–}r$. Par ailleurs, la dernière colonne est exactement la base définissant $\mathfrak{Pol}_{m+r-1}$, et donc le déterminant appartient bien à cet espace. QED

Les multiplicateurs n'ont pas été perdus. La dernière colonne peut être décomposéee en deux : la partie supérieure forméee de multiples de $S^m(x\text{–}\mathbb{B})$,

[2]Si $m < n$, la première division échange le rôle de P et Q. De fait, chacune des expressions que nous donnerons a sa symétrique, où les rôles de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont échangés.

la partie inférieure comportant les multiples de $S^n(x-\mathbb{A})$. Le déterminant peut donc s'écrire comme la somme de deux déterminants respectivement obtenus en remplaçant $S^m(x-\mathbb{B})$ ou $S^n(x-\mathbb{A})$ par 0. Mais si l'on soustrait x dans les $r-1$ premières lignes, on transforme la dernière colonne

$$[\, S_{m+r-1}(x-\mathbb{B}), \dots, S_{m-1}(x-\mathbb{B}),\ S_m(x-\mathbb{B}), 0, \dots, 0\,]$$

en

$$[\, S_{m+r-1}(-\mathbb{B}), \dots, S_{m-1}(-\mathbb{B}),\ S_m(x-\mathbb{B}), 0, \dots, 0\,] = [0, \dots, 0, S_m(x-\mathbb{B}), 0, \dots, 0]$$

Le cofacteur de $S_m(x-\mathbb{B})$ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} S_0(-x-\mathbb{B}) & \cdots & S_k(-x-\mathbb{B}) \\ \vdots & & \vdots \\ S_{-r+2}(-x-\mathbb{B}) & \cdots & S_{k-r+2}(-x-\mathbb{B}) \\ S_0(-\mathbb{A}) & \cdots & S_k(-\mathbb{A}) \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n+1-m-r}(-\mathbb{A}) & \cdots & S_{r-1}(-\mathbb{A}) \end{vmatrix}$$

En le développant suivant ses $r-1$ premières lignes, on reconnait le développement de la fonction $S_\square(\mathbb{A}-x-\mathbb{B})$, avec $\square = (m-n+r)^{r-1}$, $k = m-n+2r-2$, en terme de $\mathbb{A}$ et $-x-\mathbb{B}$.

En résumé, ignorant les signes, on a

$$\mathcal{D}_r(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \pm S_{(m-n+r)^{r-1}}(\mathbb{A}-x-\mathbb{B}) R(x, \mathbb{B}) \pm S_{r^{m-n+r-1}}(\mathbb{B}-x-\mathbb{A}) R(x, \mathbb{A}) \quad (17)$$

Le résultant lui-même peut s'obtenir de cette manière. Réintroduisant signes et constantes, on trouve l'identité

$$1 = \frac{S_{n^{m-1}}(\mathbb{B}-\mathbb{A}-x)}{S_{n^m}(\mathbb{B}-\mathbb{A})} S^n(x-\mathbb{A}) + \frac{S_{m^{n-1}}(\mathbb{A}-\mathbb{B}-x)}{S_{m^n}(\mathbb{A}-\mathbb{B})} S^m(x-\mathbb{B}) \ , \qquad (18)$$

qu'il est facile de contrôler directement en spécialisant x en une lettre de $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ (ce qui suffit à déterminer le polynôme, qui est de degré $\leq m+n-1$). En effet, si l'on pose $x = a \in \mathbb{A}$, alors l'équation se réduit à

$$1 = S_{m^{n-1}}((\mathbb{A}-a) - \mathbb{B})\, S^m(a-\mathbb{B})\, S_{m^n}(\mathbb{A}-\mathbb{B})^{-1},$$

qui est bien vraie, puisque $S_{m^{n-1}}((\mathbb{A}-a) - \mathbb{B})$ est le résultant de $(\mathbb{A}-a)$ et $\mathbb{B}$, et $S_{m^n}(\mathbb{A}-\mathbb{B})$ est le résultant de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$.

2.2 Reste comme fonction de Schur

Mais il y a une expression plus compacte de chacun des restes successifs, qui est de manière plus évidente reliée à la théorie des fonctions symétriques, et qui nous permettra de lier la division euclidienne à d'autres constructions.

Théorème 3 *Soient $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ des alphabets de cardinaux respectifs $n < m$, et soit $r : 1 \le r \le n{-}1$. Alors le r-ième reste dans la division de $S^m(x-\mathbb{B})$ par $S^n(x-\mathbb{A})$ est*

$$S_{1^{n-r};\,(m-n+r)^r}(\mathbb{A}-x;\mathbb{A}{-}\mathbb{B}) \ . \tag{19}$$

Preuve. La fonction de Schur est un polynôme de degré $\le n{-}r$, puisque x apparait dans les $r{-}1$ premières colonnes seulement, et ce, en degré 1. On a rempli un des critères caractérisant le reste, mais il est plus compliqué de vérifier que la fonction appartient à l'espace $\mathfrak{Pol}_{m+r-1}$. Il faudrait se servir pour cela de relations entre mineurs. Nous éviterons la manipulation de déterminants en contrôlant les spécialisations de $S_{1^{n-r};\,(m-n+r)^r}(\mathbb{A}-x;\mathbb{A}{-}\mathbb{B})$ en les points de $\mathbb{A}$.

Soit $x = a \in \mathbb{A}$, $\mathbb{A}' := \mathbb{A}\setminus a$. On soustrait $\mathbb{A}'$ aux alphabets de la première ligne, puis a dans les $r{-}1$ dernières colonnes[3]. Les alphabets deviennent maintenant

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a-\mathbb{B} & -\mathbb{B} & \cdots & -\mathbb{B} \\ \mathbb{A} & \dots & \mathbb{A} & \mathbb{A}-\mathbb{B} & \mathbb{A}'-\mathbb{B} & \cdots & \mathbb{A}'-\mathbb{B} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \mathbb{A} & \dots & \mathbb{A} & \mathbb{A}-\mathbb{B} & \mathbb{A}'-\mathbb{B} & \cdots & \mathbb{A}'-\mathbb{B} \end{bmatrix}$$

et tous les éléments de la première ligne sont nuls, sauf celui égal à $S^n(a{-}\mathbb{B})$, dont le cofacteur est $S_{0\ldots0}(\mathbb{A}') \times S_{(m-n+r)^{r-1}}(\mathbb{A}-a-\mathbb{B})$. On voit que la dite spécialisation coincide avec celle de $\mathcal{D}_r(\mathbb{A},\mathbb{B})$, pour toute valeur x prise dans $\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$, et donc les deux polynômes sont identiques. QED

Les diagrammes figurant en (15), pour $m=5$, $n=4$, doivent donc se lire

$$S_{111;2}(\mathbb{A}{-}x;\mathbb{A}{-}\mathbb{B}),\ S_{11;33}(\mathbb{A}{-}x;\mathbb{A}{-}\mathbb{B}),\ S_{1;444}(\mathbb{A}{-}x;\mathbb{A}{-}\mathbb{B}),\ S_{5555}(\mathbb{A}{-}\mathbb{B}) \ .$$

Une autre preuve aurait été possible, par récurrence sur r, en utilisant des relations entre fonctions de Schur impliquées par les relations de Plücker.

[3]On a ici le droit d'opérer aussi sur les colonnes, comme nous l'avons fait sur les lignes, car les r derniers éléments de chaque ligne sont du type $S^j(\mathbb{C}),\ldots,S^{j+r-1}(\mathbb{C})$.

A titre d'exemple, voici pour $r=3, n=6, m=7$, le troisème reste, qui est égal à $S_{111;444}(\mathbb{A}-x;\mathbb{A}-\mathbb{B})$, c'est-à-dire au déterminant[4]

	1	2	3	7	8	9
	0	1	2	6	7	8
	·	0	1	5	6	7
	·	·	0	4	5	6
	·	·	·	3	4	5
	·	·	·	2	3	4
alphabet	$\mathbb{A}-x$	$\mathbb{A}-x$	$\mathbb{A}-x$	$\mathbb{A}-\mathbb{B}$	$\mathbb{A}-\mathbb{B}$	$\mathbb{A}-\mathbb{B}$

Pour $x=a\in\mathbb{A}$, ce déterminant spécialise en

$$S^7(a-\mathbb{B})\,S_{000}(\mathbb{A})\,S_{44}(\mathbb{A}-a-\mathbb{B})\ ,$$

comme l'indique la séparation en blocs que nous avons figurée.

`Maple` accepte de donner les restes successifs, mais pour interpréter le résultat, dont la taille croit vite, il faut l'exprimer dans la base Schur (en tenant compte des facteurs parasites).

```
Division of a polynomial ‘pol‘ by a generic polynomial of degree  $n$
Euclid4:=proc(pol,n)   local i,f1,f2,f3,q,res;  res:=NULL;
  CLG_n(n);  # To use symmetric functions in $n$ variables
  f1:=pol;
  f2:=x^n +convert([seq( (-1)^i*x^(n-i)*e.i,i=1..n)],‘+‘);
  for i from 1 to n do
     f3:=factor(rem(f1,f2,x));
     res:=res,numer(f3);
   f1:=f2; f2:=f3;
  od;
  [res]
end:
ACE>aa:= Euclid4(x^5,4);
   3       2              3    2       2
[-x  e2 + x  e3 - x e4 + x  e1  - e1 x  e2 + xe1e3 -e1e4, -xe4e3-e1e4e3

          2      2  2              2       2         2                  2  2
+ x e1 e3  + e1  x  e4 - x e3 e2  - e2 x  e4 - 2 x e3e1e2 +xe4e1e2 +x e3

   2   3     2        2      2        3               2          2
```

[4] Les alphabets, constants par colonnes, sont écrits en bas de chaque colonne. On écrit "·" pour une entrée nulle, et i pour S^i.

```
+ x  e2  + e2  e4, (e1  - e2)  (-e1 e4  + 2 e1 x e3 e4  + 2 e3 e4  e2

       2            4        3        3       2   2
- 3 x e3  e4 e2 + x e3  - e4 e3  - x e4  + x e4  e2 )]

ACE> map(Tos_n, [aa[1],aa[2]], collect);
                                            2          3
[-s[2, 1, 1, 1] + x s[2, 1, 1] - s[2, 1] x  + s[2] x ,
                                               2
    -s[3, 3, 1] x + s[3, 3, 1, 1] + s[3, 3] x ]

ACE> map(Tos_n, aa[3], collect); # aa[3] est un produit
       (s[4] + s[3, 1] + s[2, 2]) (-s[4, 4, 4, 1] + s[4, 4, 4] x)
```

2.3 Reste par $\mathbb{A} - \mathbb{B}$

Nous avons donné trois expressions de chaque reste, en utilisant des développements de déterminants, ou des spécialisations utilisant elles aussi des manipulations de déterminants. A dire vrai, nous n'avons pas utilisé les techniques de fonctions symétriques et λ-anneaux. Montrons que celles-ci fournissent en quelques lignes l'expression des restes comme fonctions de Schur.

Le seul ingrédient non trivial est le point de départ,

$$S_\square(\mathbb{A} - \mathbb{B} - x)S^m(x{-}\mathbb{B}) = S_{\square;m}(\mathbb{A} - \mathbb{B};\ x{-}\mathbb{B}) \ ,$$

évalué modulo $S^n(x{-}\mathbb{A})$, avec $\square = (m{-}n\ {+}r)^{r-1}$.

Ecrivant $x{-}\mathbb{B} = x{-}\mathbb{A}{+}(\mathbb{A}{-}\mathbb{B})$, on peut développer par linéarité la dernière colonne de la fonction de Schur :

$$S_{\square;m}(\mathbb{A} - \mathbb{B};\ x{-}\mathbb{B}) = \sum_{i=0}^{\infty} S_{\square,\,m-i}(\mathbb{A} - \mathbb{B})S^i(x{-}\mathbb{A}) \ .$$

Cette somme se décompose en trois parties :

- $i \geq n$. Les facteurs $S^i(x{-}\mathbb{A})$ sont nuls modulo $S^n(x{-}\mathbb{A})$
- $n{-}r < i < n$. Les facteurs $S_{\square,\,m-i}(\mathbb{A}{-}\mathbb{B})$ sont nuls, ayant deux colonnes identiques.
- $i \leq n{-}r$, donnant un polynôme de degré $n{-}r$.

Changeant chaque $S^i(x{-}\mathbb{A})$ en $(-1)^i S_{1^i}(\mathbb{A}{-}x)$, on reconnait en cette dernière sous-somme le développement de Laplace de $\pm S_{1^{n-r};\,(m-n\ +r)^r}(\mathbb{A}{-}x; \mathbb{A}{-}\mathbb{B})$.

L'expression étudiée est donc le r-ième reste (puisque de degré $\leq n{-}r$ dans l'espace engendré par les restes de $S^m(x{-}\mathbb{B}), \ldots, S^{m+r-1}(x{-}\mathbb{B})$), mais elle est aussi égale à la fonction de Schur $S_{1^{n-r};\,(m-n\ +r)^r}(\mathbb{A}{-}x; \mathbb{A}{-}\mathbb{B})$.

2.4 Matrice Companion

L'algèbre linéaire permet de reécrire la division. Attachons nous plus particulièrement au cas du premier reste.

Soit $\mathbb{A}$ de cardinal n et $\mathfrak{Pol}_n$ l'espace des polynômes en x de degré $\leq n-1$. Le morphisme u : "multiplication par x modulo $S^n(x-\mathbb{A})$" est un morphisme linéaire de $\mathfrak{Pol}_n$, décrit par la matrice *companion* suivante, dans la base $\{x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}\}$:

$$\mathcal{C}(\mathbb{A}) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -S^n(-\mathbb{A}) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -S^{n-1}(-\mathbb{A}) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -S^{n-2}(-\mathbb{A}) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -S^1(-\mathbb{A}) \end{bmatrix} . \tag{20}$$

C'est donc la matrice exprimant les restes de $x^1, \ldots, x^n$ modulo $S^n(x-\mathbb{A})$. Mais il est plus judicieux de considérer la matrice infinie $\mathcal{CC}(\mathbb{A})$ des restes de $x^0, x^1, \ldots, x^\infty$. Nous avons obtenu le reste de x^k sous la forme $S_{1^{n-1}, k-n+1}(\mathbb{A}-x, \mathbb{A})$. Le développement en x fait donc apparaître des fonctions de Schur indicées par des partitions équerre $1^i, k-n+1$, $i = n-1, \ldots, 0$, lesquelles nous réécrirons

$$S_{k,0^{n-1}}(\mathbb{A}), S_{k-1,0^{n-2}}(\mathbb{A}), \ldots, S_{k-n+1}(\mathbb{A}) .$$

Avec ces notations, la matrice companion infinie prend la forme

$$\mathcal{CC}(\mathbb{A}) = \Big[S_{k-i,0^{n-i-1}}(\mathbb{A}) \Big]_{0\leq k,\, 0\leq i\leq n-1} .$$

De manière plus détaillée, pour $n = 3$, on a les différentes écritures suivantes :

$$\mathcal{CC}(\mathbb{A}) = \begin{bmatrix} S_{000} & S_{100} & S_{200} & S_{300} & S_{400} & S_{500} & \cdots \\ S_{-10} & S_{00} & S_{10} & S_{20} & S_{30} & S_{40} & \cdots \\ S_{-2} & S_{-1} & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & \cdots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & S_{300} & S_{400} & S_{500} & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & S_{20} & S_{30} & S_{40} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & S_{111} & S_{112} & S_{113} & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & -S_{11} & -S_{12} & -S_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 & \cdots \end{bmatrix}$$

La matrice companion finie est la sous-matrice de $\mathcal{CC}(\mathbb{A})$ prise sur les colonnes $1, \ldots, n$ (numérotant à partir de 0). La matrice décrivant la multiplication par x^k est sa k-ième puissance, et c'est aussi la sous-matrice de $\mathcal{CC}(\mathbb{A})$ prise sur les colonnes $k, \ldots, n+k-1$. La description directe des puissances de $\mathcal{C}(\mathbb{A})$ sans son interprétation comme représentant le morphisme u ne serait pas aisée.

En fait, on peut prendre d'autres bases de $\mathfrak{Pol}_n$. Supposons que tous les éléments de $\mathbb{A}$ soient distincts, et prenons comme base les n polynômes $S^{n-1}(x-(\mathbb{A}-a)) = S^{n-1}(x+a-\mathbb{A})$, $a \in \mathbb{A}$. Alors le morphisme u est diagonal dans cette base, puisque

$$xS^{n-1}(x+a-\mathbb{A}) \equiv aS^{n-1}(x+a-\mathbb{A}) \ .$$

Plus généralement, pour tout polynôme $f(x)$, le morphisme $f(u)$ est diagonal, de diagonale $f(a)$, $a \in \mathbb{A}$.

De cette forme simple de la matrice companion découle par exemple que la trace de $\mathcal{C}(\mathbb{A})^k$, $k \in \mathbb{Z}$, est égale à $\sum a^k$. On peut aussi écrire les puissances négatives de $\mathcal{C}(\mathbb{A})$ et compléter vers les indices négatifs la matrice companion infinie.

Le résultant n'est pas oublié. Le déterminant de la matrice $R\big(\mathcal{C}(\mathbb{A})\,,\,\mathbb{B}\big)$ factorise en effet en le produit

$$\prod_{b\in\mathbb{B}} \det\left(\mathcal{C}(\mathbb{A}) - b\right) = \prod_{b\in\mathbb{B}} R(\mathbb{A}, b) = R(\mathbb{A},\mathbb{B}) \ .$$

2.5 Méthode de Wroński

Nous avons dit que le r-ième reste $\mathcal{R}_r$ était le polynôme de degré minimal dans l'espace $\mathfrak{Pol}_N(\mathbb{A},\mathbb{B})$ engendré par

$$S^m(x-\mathbb{B}), \ldots, S^N(x-\mathbb{B})\,;\ S^n(x-\mathbb{A}), \ldots, S^N(x-\mathbb{A}) \ ,$$

avec $N = m + r - 1$. Mais dans l'espace des polynômes modulo $S^n(x-\mathbb{A})$ (identifié à l'espace des polynômes de degré $< n$), le reste est donc aussi le polynôme de degré minimal dans le sous-espace engendré par les restes de $S^m(x-\mathbb{B}), \ldots, S^N(x-\mathbb{B})$.

Comme ces polynômes ont tous degré $n-11$ (dans le cas générique), Wronski a remarqué que leurs *différences normalisées* permettent d'obtenir $\mathcal{R}_r$. En étendant la notion de différence normalisée pour couvrir le cas où les degrés ne sont pas maximaux, on peut donc trouver les restes successifs à partir de ces premiers restes.

On dispose les restes de $S^m(x-\mathbb{B}), \ldots, S^N(x-\mathbb{B})$ sur une première ligne. Chaque ligne est obtenue à partir de celle au dessus par l'algorithme

$$(f_1, f_2) \to L(f_2)f_1 - L(f_1)f_2 \ ,$$

où, pour un polynôme $f(x)$, $L(f)$ est le coefficient de son terme de plus haut degré. Le r-ième reste est, à normalisation près, le dernier polynôme obtenu.

Par exemple, pour $S_5(x-\mathbb{B}) = x^5+2x^4+3x^3+4x^2+3x+2$, $S_4(x-\mathbb{A}) = x^4+x^3+x^2+x+1$ l'algorithme de Wroński produit la table suivante, les restes successifs figurant en tête de chaque ligne.

La première ligne est composéee des restes de $S_5(x-\mathbb{B}), \ldots, S_8(x-\mathbb{B})$ modulo $S_4(x\text{–}\mathbb{A})$.

$$\begin{array}{ccccccc}
x^3+2x^2+x+1 & & x^3-1 & & -x^3-x^2-2x-1 & & -x^2+1 \\
& 2x^2+x+2 & & x^2+2x+2 & & x^2-1 & \\
& & 3x+2 & & 2x+3 & & \\
& & & 5 & & &
\end{array}$$

3 Division et Fractions continues

Prenons le cas $m = n+1$ pour plus de régularité.

La division euclidienne de $S^m(x\text{–}\mathbb{B})$ par $S^n(x\text{–}\mathbb{A})$ a produit une suite de restes successifs, mais aussi une suite de quotients successifs $x+\zeta_0$, $x+\zeta_1, \ldots$ que nous avons négligés jusqu'à présent.

Normalisant les restes pour qu'ils soient moniques, posant $\mathcal{R}_{-1} = S^{n+1}(x\text{–}\mathbb{B})$, $\mathcal{R}_0 = S^n(x\text{–}\mathbb{A})$, l'algorithme d'Euclide s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{-1} &= (x\text{–}\zeta_0)\,\mathcal{R}_0 + \beta_1\mathcal{R}_1\,, \\
\mathcal{R}_0 &= (x\text{–}\zeta_1), \mathcal{R}_1 + \beta_2\mathcal{R}_2\ , \\
\mathcal{R}_1 &= (x\text{–}\zeta_2)\,\mathcal{R}_2 + \beta_3\mathcal{R}_3\,, \ldots
\end{aligned} \tag{21}$$

avec des constantes $\zeta_0, \zeta_1, \ldots,\ \beta_1, \beta_2, \ldots$ dont voici les premières valeurs, écrivant J pour $S_J(\mathbb{B}\text{–}\mathbb{A})$:

$$\zeta_0 = [1],\ \zeta_1 = \frac{[12]}{[11]} - [1],\ \zeta_2 = \frac{[223]}{[222]} - \frac{[12]}{[11]},\ \zeta_3 = \frac{[3334]}{[3333]} - \frac{[223]}{[222]}, \ldots$$

$$\beta_1 = [11],\ \beta_2 = \frac{[222]}{[11]^2},\ \beta_3 = \frac{[3333]\,[11]}{[222]^2}, \ldots$$

Théorème 4 *Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deux alphabets de cardinaux respectifs n, $n+1$. Soient $\mathcal{R}_{-1} = S^{n+1}(x\text{–}\mathbb{B})$, $\mathcal{R}_0 = S^n(x\text{–}\mathbb{A})$, et $\zeta_0 = S_1$,*

$$\zeta_n = \frac{S_{n^n, n+1}}{S_{n^{n+1}}} - \frac{S_{(n-1)^{n-1}, n}}{S_{(n-1)^n}} \quad \& \quad \beta_n = \frac{S_{n^{n+1}}\, S_{(n-2)^{n-1}}(\mathbb{A})}{(S_{(n-1)^n})^2}\ , \tag{22}$$

où S_J désigne $S_J(\mathbb{B}-\mathbb{A})$. Alors

$$\frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}_{-1}} = \cfrac{1}{x-\zeta_0+\cfrac{\beta_1}{x-\zeta_1+\cfrac{\beta_2}{x-\zeta_2+\cfrac{\beta_3}{\ddots}}}} \tag{23}$$

On suppose en effet, par récurrence sur le degré, qu'une telle écriture est valable pour $\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0$. Il faut alors vérifier que

$$\frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}_{-1}} = \frac{1}{x-\zeta_0+\beta_1\dfrac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_0}} \ ,$$

mais c'est bien l'équation

$$\mathcal{R}_{-1} = (x-\zeta_0)\,\mathcal{R}_0 + \beta_1\mathcal{R}_1 \ .$$

QED

Par définition des fonctions complètes, $\mathcal{R}_0/\mathcal{R}_{-1}$ est la fonction génératrice des fonctions complètes de $\mathbb{B}-\mathbb{A}$. En d'autres termes, le développement de Taylor de $\mathcal{R}_0/\mathcal{R}_{-1}$ au voisinage de $x=\infty$ est égal à

$$x^{-1} + x^{-2}S^1(\mathbb{B}-\mathbb{A}) + x^{-3}S^2(\mathbb{B}-\mathbb{A}) + \cdots \ .$$

```
ZetaW:=proc(r)
  if r=0 then RETURN(s[1])
  elif r=1 then RETURN( s[2,1]/s[1,1]-s[1]) fi;
  s[r+1, r$r]/s[r$(r+1)]- s[r,(r-1)$(r-1)]/s[(r-1)$r]
end:
BetaW:=proc(r)
  if r=1 then RETURN(s[1,1])
  elif r=2 then RETURN( s[2,2,2]/s[1,1]^2) fi;
  s[r$(r+1)]*s[(r-2)$(r-1)]/s[(r-1)$r]^2
end:
WronskiRec:=proc(zet,beta)
  if nops(zet)=1 then RETURN( 1/(x- zet[1])) fi;
  1/(x-zet[1]+beta[1]*WronskiRec(subsop(1=NULL,zet),subsop(1=NULL,beta)))
end:
Wronski:=proc(n)  local i;
```

```
  WronskiRec( [seq(ZetaW(i),i=0..n)], [seq(BetaW(i),i=1..n)])
end:
ACE> Wronski(2);                                1
       -----------------------------------------------------------------
                                             s[1, 1]
      x - s[1] + -------------------------------------------------------
                     s[2, 1]                           s[2, 2, 2]
                 x - ------- + s[1] + ----------------------------------
                     s[1, 1]                   2 /    s[3, 2, 2]   s[2, 1]\
                                      s[1, 1]   |x - ---------- + -------|
                                                \    s[2, 2, 2]   s[1, 1]/
ACE> taylor(%,x=infinity, 7):
ACE> map(i->simplify(Rat2h(i)), %);
                             h1     h2     h3     h4     h5       1
                     1/x + ---- + ---- + ---- + ---- + ---- + O(----)
                           x^2    x^3    x^4    x^5   x^6      x^7
```

4 Fractions continues

Reprenons les fractions continues, sans les lier pour le moment à la division.

On peut remonter aux Egyptiens pour ce qui est de $\frac{a}{b}$. En itérant, on obtient des expressions telles que $a_1 + \dfrac{b_2}{a_2}$, $a_1 + \dfrac{b_2}{a_2 + \dfrac{b_3}{a_3}}$ …. Nos anciens n'hésitaient pas à mettre les trois points à l'intérieur de l'objet mathématique lui-même :

$$a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}\ , \tag{24}$$

définissant par là même une *fraction continue.*

```
# Input: Deux vecteurs [a],[b]
# ->  montre la fraction continue a1 + b2/( a2+ (b3/..))
MontreFrac:=proc(va,vb)    # a1+ b2/( a2+b3/(...) )
  if nops(va)=1 then RETURN( va[1]) fi;
  va[1] + vb[1]/(MontreFrac(subsop(1=NULL,va),subsop(1=NULL,vb)))
end:
ACE> MontreFrac([a1,a2,a3],[b1,b2]);
```

```
                b1
a1 + ---------
                    b2
          a2 + ----
                    a3
```

La troncation d'une fraction continue à l'ordre n s'appelle *convergente d'ordre n*. Euler a trouvé des relations de récurrence entre convergentes successives, relations que nous écrirons de manière matricielle dans le théorème suivant.

4.1 Récurrences d'Euler

Théorème 5 *Les convergentes d'une fraction continue*

$$\frac{P_n}{Q_n} := a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

peuvent s'exprimer par multiplication de matrices d'ordre 2 :

$$\begin{bmatrix} P_n \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & 1 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \tag{25}$$

Preuve. Il faut raisonner par récurrence, mais de bas en haut ! Ecrivons

$$\begin{bmatrix} a_3 & 1 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

On suppose le théorème vrai pour

$$a_2 + \frac{b_3}{\cdots + \frac{b_n}{a_n}} = \frac{a_2\alpha + \beta}{\alpha} .$$

Comme

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 \alpha + b_2 \alpha + a_1 \beta \\ a_2 \alpha + \beta \end{bmatrix} ,$$

on trouve bien que les deux composantes de ce dernier vecteur sont les numérateur et dénominateur de

$$a_1 + \cfrac{b_2}{\cfrac{a_2\alpha + \beta}{\alpha}} = \frac{a_1(a_2\alpha + \beta) + b_2\alpha}{a_2\alpha + \beta}$$

QED

4.2 Interpolation d'une série formelle

Les fractions continues peuvent être utilisées de différentes manières en théorie de l'interpolation, nous nous contenterons ici de décrire les relations entre les paramètres figurant dans des fractions continues classiques, et leurs développements de Taylor.

On prend tout d'abord tous les $a_i = 1$, et on remplace les b_i par zb_i :

$$1 + \cfrac{zb_2}{1 + \cfrac{zb_3}{1 + \cfrac{zb_4}{\ddots}}}$$

Dans le cas générique, les degrés en z des convergentes successives $P_n(z)/Q_n(z)$ sont

$$d^o(P_{2n}) = n,\ d^o(Q_{2n}) = n-1,\ d^o(P_{2n+1}) = n,\ d^o(Q_{2n+1}) = n\ ,$$

partant de $P_2/Q_2 = (1+zb_2)/1$.

Posons nous le problème de trouver une approximation d'une série formelle écrite sous la forme $\sigma_z(\mathbb{A})$.

Comptant les paramètres, on voit que le choix de $b_2, \ldots, b_n$ permet de faire coincider le développement de Taylor de la convergente P_n/Q_n et ceux de $\sigma_z(\mathbb{A})$ jusqu'à l'ordre n inclus, P_n et Q_n étant déterminés à un scalaire près. L'expression des b_i en terme des $S^j(\mathbb{A})$ est due à Heilerman [3] :

Théorème 6 *1. La série $\sigma_z(\mathbb{A})$ admet un développement en fraction continue du type* $1 + \cfrac{zb_2}{1 + \cfrac{zb_3}{\ddots}}$ *avec*

$$b_{2n} = \frac{S_{n^n} S_{(n-1)^{n-2}}}{S_{n^{n-1}} S_{(n-1)^{n-1}}} \quad \& \quad b_{2n+1} = \frac{S_{(n+1)^n} S_{(n-1)^{n-1}}}{S_{n^n} S_{n^{n-1}}}\ . \tag{26}$$

2. Les convergentes sont

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = (-1)^{n-1} z \frac{S_{n^n}(\mathbb{A} + \frac{1}{z})}{S_{(n-1)^{n-1}}(\mathbb{A} - \frac{1}{z})} \ \& \ \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = (-1)^n z \frac{S_{n^{n+1}}(\mathbb{A} + \frac{1}{z})}{S_{(n+1)^n}(\mathbb{A} - \frac{1}{z})} \tag{27}$$

Voilà les premiers paramètres :

$$b_2 = S_1,\ b_4 = S_{22}/S_2 S_1,\ b_6 = S_{333} S_2 / S_{33} S_{22},\ \ldots$$

$$b_3 = -S_2/S_1,\ b_5 = S_{33}S_1/S_{22}S_2,\ b_7 = S_{444}S_{22}/S_{333}S_{33},\ \ldots$$

et les premières convergentes :

$$\frac{P_2}{Q_2} = zS_1(\mathbb{A}+\frac{1}{z})\ ,\ \frac{P_4}{Q_4} = -z\frac{S_{22}(\mathbb{A}+\frac{1}{z})}{S_3(\mathbb{A}-\frac{1}{z})}\ ,\ \frac{P_6}{Q_6} = z\frac{S_{333}(\mathbb{A}+\frac{1}{z})}{S_{44}(\mathbb{A}-\frac{1}{z})}\ ,\ldots$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = 1\ ,\ \frac{P_3}{Q_3} = -\frac{S_{11}(\mathbb{A}+\frac{1}{z})}{S_2(\mathbb{A}-\frac{1}{z})}\ ,\ \frac{P_5}{Q_5} = \frac{S_{222}(\mathbb{A}+\frac{1}{z})}{S_{33}(\mathbb{A}-\frac{1}{z})}\ ,\ldots$$

Preuve. Prenons des indices précis, pour simplifier, et retrouvons que l'expression donnée de P_6/Q_6 est bien une convergente.

Développant en z, écrivant S_I pour $S_I(\mathbb{A})$, on a

$$z\frac{S_{333}(\mathbb{A}+\frac{1}{z})}{S_{44}(\mathbb{A}-\frac{1}{z})} = \frac{S_{033}+zS_{133}+z^2S_{233}+z^3S_{333}}{S_{33}-zS_{34}+z^2S_{44}}\ .$$

La convergente est caractérisée par le fait que c'est une fraction rationnelle de numérateur de degré 3, et de dénominateur de degré 2, dont le développement de Taylor à l'ordre 6 est $1+zS^1(\mathbb{A})+\cdots+z^5S^5(\mathbb{A})+\mathcal{O}z^6$. On peut donc l'écrire

$$x^{-1}R(x,\mathbb{B}_3)R(x,\mathbb{B}_2)^{-1}\ ,$$

avec deux alphabets de cardinaux 3 et 2, en posant $x = z^{-1}$. Multipliant haut et bas par le facteur $R(\mathbb{B}_2,\mathbb{B}_3)$, on obtient l'expression

$$x^{-1}\frac{R(x+\mathbb{B}_2,\mathbb{B}_3)}{R(x+\mathbb{B}_3,\mathbb{B}_2)} = 1+zS^1(\mathbb{B}_2-\mathbb{B}_3)+z^2S^2(\mathbb{B}_2-\mathbb{B}_3)+\cdots\ .$$

Le membre de gauche est le quotient des deux résultants $S_{333}(x+\mathbb{B}_2-\mathbb{B}_3)$ et $S_{44}(\mathbb{B}_2-\mathbb{B}_3-x)$, mais, comme $S^i(\mathbb{A}) = S^i(\mathbb{B}_2-\mathbb{B}_3)$ jusqu'en degré 5 inclus, on peut y remplacer $\mathbb{B}_2-\mathbb{B}_3$ par $\mathbb{A}$. QED

Notons que le développement de P_6/Q_6 est, en écrivant S_I pour $S_I(\mathbb{A})$,

$$z\frac{S_{333}(\mathbb{A}+\frac{1}{z})}{S_{44}(\mathbb{A}-\frac{1}{z})} = \frac{S_{033}+zS_{133}+z^2S_{233}+z^3S_{333}}{S_{33}-zS_{34}+z^2S_{44}}\ .$$

Y reconnaître directement $1+\cdots+z^5S^5(\mathbb{A})+\cdots$ nécessite d'utiliser des relations quadratiques entre fonctions de Schur.

```
ACE> FracHeilerman(6);
                                z s[1]
1 + -----------------------------------------------------------------
                                        z s[2]
```

```
  1 - --------------------------------------------------------------
           /                          z s[2, 2]                    \
     s[1] |1 + ----------------------------------------------------|
          |              /               z s[1] s[3, 3]           \|
          |    s[2] s[1] |1 - ------------------------------------||
          |              |                 /    z s[3, 3, 3] s[2]\||
          |              |    s[2] s[2, 2] |1 + -----------------|||
          \              \                 \     s[3, 3] s[2, 2] ///
```

```
ACE> Rat2h(simplify(%)):
ACE> map(simplify,taylor(%,z,7));
                                                 2      3
                 2      3       4   5 h5 h2 +h4 - 2h4 h5 h3    6     7
1+h1 z +h2 z  +h3 z  +h4 z  + h5z  + ------------------------- z  +O(z )
                                                    2
                                             -h3  + h4 h2
```

4.3 Fractions continues de Stieltjes

Stieltjes a employé différentes formes de fractions continues, en particulier les deux que nous avons déjà données, dans son article fondamental [4].

Par exemple, il écrit

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{-1/\alpha_1+\cfrac{1}{x/\alpha_2+\cfrac{1}{-1/\alpha_3+\cfrac{1}{x/\alpha_4+\ddots}}}}} = x^{-1}+\alpha_1 x^{-2}+$$
$$+(\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1^2)x^{-3}+(2{\alpha_1}^3\alpha_2+{\alpha_1}^2{\alpha_2}^2\alpha_3+{\alpha_1}^3{\alpha_2}^2+{\alpha_1}^3)x^{-4}+\cdots\ , \quad (28)$$

où l'indéterminée $x = 1/z$ apparaît seulement à la moitié des niveaux, le développement de Taylor s'effectuant au voisinage de $x = \infty$.

Par contraction, on retrouve

$$\cfrac{1}{x-\alpha_1-\cfrac{\alpha_1^2\alpha_2}{x-\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_3-\cfrac{\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4}{x-\alpha_3\alpha_4-\alpha_4\alpha_5-\cfrac{\alpha_4\alpha_5^2\alpha_6}{x-\alpha_5\alpha_6-\alpha_6\alpha_7}}}} \tag{29}$$

ce qui donne le lien avec les paramètres de Wroński.

Plus précisément, on a

$$\alpha_1 = S_1,\ \alpha_2 = -S_{11}/S_1^2,\ \alpha_3 = -S_1S_{22}/S_{11}^2,\ \alpha_4 = S_{11}S_{222}/S_{22}^2\,,$$
$$\alpha_{2n+1} = (-1)^n \frac{S_{n^n}S_{(n+1)^{n+1}}}{(S_{n^{n+1}})^2} \quad \& \quad \alpha_{2n} = (-1)^n \frac{S_{(n-1)^n}S_{n^{n+1}}}{(S_{n^n})^2}$$
$$\alpha_{2n}(\alpha_{2n-1}+\alpha_{2n+1}) = \zeta_n \quad \& \quad \alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}^2\alpha_{2n} = -\beta_n \tag{30}$$

Les paramètres α_i s'écrivent comme produits de fonctions de Schur d'indice rectangle, alors que l'expression réduite des paramètres ζ_i, β_j fait intervenir d'autres partitions. Pour des séries particulières, il est fréquent que les α_i soient simples, alors que les autres paramètres ne le sont pas.

Stieltjes utilise aussi :

```
ACE> FracStieltjes(4,gamma);
                            1
                     ----------------
                             z g1
                     1 - ------------
                               z g2
                          1 - --------
                              1 - z g3
```

ce qui est l'inverse de la fraction continue d'Heilerman (rappelons que l'inverse de $\sigma_z(\mathbb{A})$ est $\sigma_z(-\mathbb{A})$, et $\mathbb{A} \to -\mathbb{A}$ se réduit, au signe près, à transposer les partitions indiçant les fonctions de Schur).

5 Matrice tridiagonale de Jacobi

5.1 Jacobi

Prenons la fraction continue

$$\cfrac{1}{x-\zeta_0+\cfrac{\beta_1}{x-\zeta_1+\cfrac{\beta_2}{\ddots}}} = \sum_{i\geq 0} x^{-i-1} S^i(\mathbb{A}) \ .$$

Les dénominateurs des convergentes successives

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{x-\zeta_0} \ , \ \frac{P_1}{Q_1} = \cfrac{1}{x-\zeta_0+\cfrac{\beta_1}{x-\zeta_1}} , \ldots$$

avec $Q_0 = 1, Q_{-1} = 0$, vérifient les récurrences

$$Q_{n+1} = (x-\zeta_n)Q_n + \beta_n Q_{n-1} \ , \ n \geq 0 \ ,$$

que l'on réécrit

$$x\,Q_n = -\beta_n Q_{n-1} + \zeta_n Q_n + Q_{n+1} \ , \tag{31}$$

interprétant ces relations comme exprimant le morphisme "multiplication par x" dans la base $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$.

La matrice repésentant ce morphisme est due à Jacobi :

$$\mathfrak{Jac} := \begin{bmatrix} \zeta_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ -\beta_1 & \zeta_1 & 1 & \ddots & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ & & \ddots & \zeta_{n-2} & 1 & \ddots \\ & & & -\beta_{n-1} & \zeta_{n-1} & \cdots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} . \tag{32}$$

Il est remarquable que l'on puisse retrouver facilement les $S^n(\mathbb{A})$ à partir de $\mathfrak{Jac}$, ainsi que l'a montré Whittaker [6].

Théorème 7 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le premier élément de $\mathfrak{Jac}^n$ est égal à $S^n(\mathbb{A})$.*

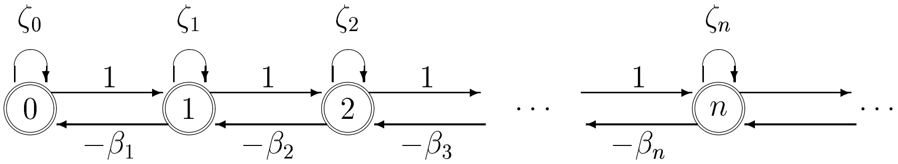
Preuve. Motivé par la théorie des polynômes orthogonaux, considérons la fonctionelle en x, $\int \ : \ \int x^n \ = \ S^n(\mathbb{A})$. Il est clair qu'elle envoie tout $Q_n =$

$S_{n^n}(\mathbb{A} - x) = S_{n^n;0}(\mathbb{A}; x)$ sur $S_{n^n,0}(\mathbb{A}) = 0$ pour $n > 0$, et qu'elle envoie $Q_0 = 1$ sur 1. L'image par $\int$ d'un polynôme $f(x)$, que l'on écrit dans la base $\{Q_n\}$, $f(x) = c_0 + c_1Q_1 + c_2Q_2 + \cdots$ est donc $\int f(x) = c_0$. Or le premier élément de la matrice $\mathfrak{Jac}^n$ est précisément le coefficient de Q_0 dans le développement de x^nQ_0 ; il est donc égal à $\int x^n = S^n(\mathbb{A})$. QED

5.2 Chemins de Motzkin

Les puissances d'une matrice M peuvent être interprétées à l'aide d'un automate : par exemple, écrire tous les produits $M_{ij}M_{jk}M_{kl}$ ou tous les chemins de i à l passant par j et k, avec les poids respectifs M_{ij}, M_{jk}, M_{kl}, sont deux manières de décrire la puissance troisième de M.

Dans le cas de la matrice tri-diagonale de Jacobi, l'automate est spécialement simple :



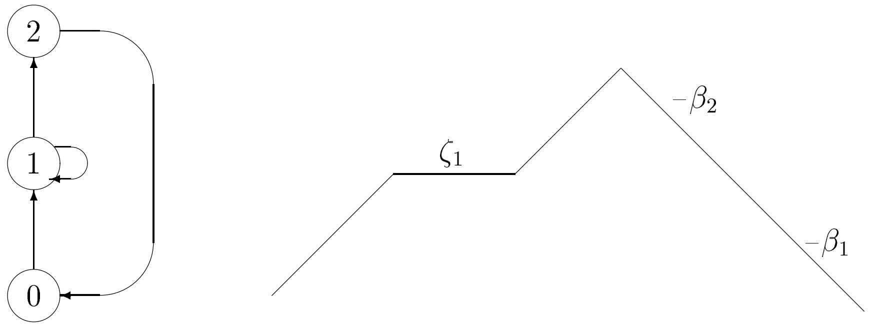
Le premier élément de $\mathfrak{Jac}^n$ est maintenant vu comme la somme de tous les chemins[5] de longueur n de 0 à 0.

Mais il y a une autre manière de représenter ces chemins, en les déployant.

Définition 1 *Un* chemin de Motzkin *est un chemin pondéré dans le plan cartésien* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*, avec des pas horizontaux, des pas Nord-Est et des pas Sud-Est, commençant et finissant au niveau* 0*. Un pas horizontal à hauteur i a poids ζ_i, un pas Sud-Est de i à i–1 a poids –β_i, les pas Nord-Est ayant poids* 1*. Un* chemin de Dyck *est un chemin de Motzkin sans pas horizontaux.*

En ajoutant une coordonnée de temps à la représentation d'un chemin dans l'automate de Jacobi, on transforme celui-ci en un chemin de Motzkin ayant le même poids :

[5] On interprète un chemin comme le produit de tous les poids figurant sur les arêtes le composant.

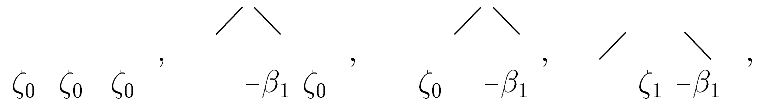


Réciproquement, le chemin dans l'automate est obtenu en projetant sur l'axe vertical le chemin de Motzkin.

Le théorème 7 peut maintenant être reformulé, à la suite de Flajolet [2], en terme de chemins de Motzkin :

Théorème 8 *Les coefficients de la série formelle $\sigma_n(\mathbb{A})$ peuvent être obtenus par énumération des chemins de Motzkin :*
$S^n(\mathbb{A})$ est la somme des poids de tous les chemins de longueur n.

Par exemple, il y a 4 chemins de Motzkin de longueur 3,



et l'on a bien :

$$S^3 = S^{111} - S_{11}S^1 - S^1S_{11} - (S_{12}/S_{11} - S^1)S_{11} \ .$$

On peut interpréter un chemin de Dyck comme une expression bien parenthésée : un pas montant est une parenthèse ouvrante '(', un pas descendant est une parenthèse fermante ')'. Ecrivant 1 et 2 au lieu de '(', ')', on peut aussi interpréter les *mots de Dyck* comme des *mots de Yamanouchi* particuliers[6].

Il est facile d'énumérer les chemins de Dyck, on obtient les chemins de Motzkin en shufflant des pas horizontaux, codés par des 0.

```
ListMotzkin:=proc(n)  local i,j,k,res;
  k:=floor(n/2); j:=n-2*k; res:=w[0$n];
  for i from 0 to k-1 do
  res:=res+ FreeShuffle(convert(ListYama([k-i,k-i]),'+'), w[0$(j+2*i)])
  od;   # mots de Yamanouchi avec $k-i$ occurences de $1$ et de $2$
 res
```

[6]Un *mot de Yamanouchi* est un mot en $1, 2, 3, \ldots$, tel que tout facteur droit est de degré décroissant (au sens large) en $1, 2, 3, \ldots$

```
end:
#  nargs=2 ->formal parameters b.k, z.k ; otherwise Wronski's parameters
Motzkin2Stat:=proc(mot) local i,k,res;
 res:=1; k:=0;
 if nargs=1 then
   for i from 1 to nops(mot) do
     if op(i,mot)=1 then k:=k+1
     elif op(i,mot)=2 then res:=-res*BetaW(k);  k:=k-1;
     else res:=res*ZetaW(k)
     fi;
   od;
  else
   for i from 1 to nops(mot) do
     if op(i,mot)=1 then k:=k+1
     elif op(i,mot)=2 then res:=-res*b.k;  k:=k-1;
     else res:=res*z.k
     fi;
   od;
  fi;
  simplify(res)
end:
MomentsByMotzkin:=proc(n) local mot;
 convert([seq(Motzkin2Stat(mot,args[2..nargs]),mot=ListMotzkin(n))],`+`)
end:
ACE> ListMotzkin(3);
            w[0, 0, 0] + w[1, 2, 0] + w[1, 0, 2] + w[0, 1, 2]
ACE> MomentsByMotzkin(3,formal);
                              3
                            z0  - 2 b1 z0 - z1 b1
ACE> MomentsByMotzkin(3);
                         3
                     s[1]  - s[1, 1] s[1] - s[2, 1]
ACE> Toh(%);
                                          h3
```

5.3 Chemins de Dyck

Montrons maintenant que l' on peut aussi obtenir le développement en fraction continue de la série formelle $\sigma_z(\mathbb{A})$ par une énumération de chemins de Dyck.

C'est maintenant la fraction (28) :

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{-1/\alpha_1+\cfrac{1}{x/\alpha_2+\cfrac{1}{-1/\alpha_3+\cfrac{1}{x/\alpha_4+\ddots}}}}}$$

que l'on a en vue, en prenant comme poids d'un chemin de Dyck w

$$\theta^{\mathcal{D}}(w) := \prod_i \alpha_i^{m_i}\ ,\ m_i = \text{ nombre de points à niveau } i\ . \qquad (33)$$

Théorème 9 *Pour tout* $\mathbb{A}$*, la fonction complète* $S_n(\mathbb{A})$ *est la somme des poids des chemins de Dyck de longueur* $2n$ *:*

$$S_n(\mathbb{A}) = \sum_{w\ Dyck, \ell(w)=2n} \theta^{\mathcal{D}}(w)\ . \tag{34}$$

Preuve. De fait, la fraction continue correspond à une matrice bidiagonale, de diagonale principale nulle :

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_2\alpha_1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \alpha_3\alpha_2 & 0 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4\alpha_3 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Si l'on prend son carré, on y retrouve la matrice de Jacobi, grâce aux relations (30), et l'on voit ainsi que le premier élément de M^{2n} est égal au premier élément de $\mathfrak{Jac}^n$, c'est-à-dire à $S^n(\mathbb{A})$, comme annoncé. QED

$$M^2 = \begin{bmatrix} \boxed{\alpha_1} & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{0} & \cdots \\ 0 & \alpha_1+\alpha_2\alpha_1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \boxed{\alpha_2\alpha_1^2} & 0 & \boxed{\alpha_2\alpha_1+\alpha_3\alpha_2} & 0 & \boxed{1} & \\ 0 & \alpha_3{\alpha_2}^2\alpha_1 & 0 & \alpha_3\alpha_2+\alpha_4\alpha_3 & 0 & \ddots \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{\alpha_4\alpha_3^2\alpha_2} & 0 & \boxed{\alpha_4\alpha_3+\alpha_5\alpha_4} & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

(la sous-matrice de Jacobi est localisée par des boîtes).

```
ACE> ListDyck(3);
    [w[1,2,1,2,1,2],w[1,2,1,1,2,2],w[1,1,2,1,2,2],
                              w[1,1,1,2,2,2],w[1,1,2,2,1,2]]
ACE> MomentsByDyck(3,formal);
                3   3       3   2         3   2         2   2
              a1  a0  + 2 a1  a0  a2 + a1  a2  a0 + a1  a2  a3 a0
ACE> MomentsByDyck(3);
                                                 2
                    3                    s[1, 1]    s[2, 2]
                s[1]  - 2 s[1, 1] s[1] + -------- - -------
```

```
                                           s[1]      s[1]
ACE> Rat2h(%);
                                         2       2      2
                   3        2           (h1  - h2)    h2  - h3 h1
                 h1  - 2 (h1  - h2) h1 + ----------- - -----------
                                             h1             h1
ACE> simplify(%);
                                            h3
```

Les fonctions complètes $S^n(\mathbb{A})$ sont données par deux énumérations de chemins de cardinaux différents :

```
ACE> [seq(nops(ListMotzkin(n)),n=1..8)];
                         [1, 2, 4,  9, 21,  51, 127,  323]

ACE> [seq(nops(ListDyck(n)),n=1..8)];      # lg=2*n
                         [1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430]
```

6 Polynômes orthogonaux

6.1 Polynômes orthogonaux comme fonctions symétriques

Soit $\int$ une fonctionnelle "générique" sur $\mathfrak{Pol}(x)$, i.e. telle que les $\int x^i$, $i = 1, 2, \ldots$ soient algébriquement indépendantes, avec la normalisation $\int x^0 = 1$.

Il est clair qu'il existe une unique famille de polynômes $\{\widetilde{P}_n\}$ telle que $\widetilde{P}_n = x^n + \cdots$, $\int \widetilde{P}_n \widetilde{P}_m = 0$ si $n \neq m$, car le système correspondant d'équations est triangulaire dans la base $\{x^n\}$. Il sera approprié de varier les normalisations, et de considérer des familles coincidant avec $\{\widetilde{P}_n\}$ à des scalaires λ_n près.

On identifie les *moments* $\int x^n$ aux fonctions complètes d'un alphabet $\mathbb{A}$, ce qui va nous permettre d'utiliser la combinatoire des fonctions symétriques dans la théorie des polynômes orthogonaux.

La fonctionnelle, que nous noterons maintenant $\int_{\mathbb{A}}$, prend ses valeurs dans $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$. Elle induit un produit scalaire sur $\mathfrak{Pol}(x)$:

$$\big(f(x)\,,\,g(x)\big) := \int_{\mathbb{A}} f(x)g(x) = (f(x)g(x)\,,\,1)\ . \tag{35}$$

Montrons tout d'abord que les polynômes orthogonaux peuvent s'écrire comme des fonctions de Schur.

Théorème 10 *Etant donné un alphabet générique $\mathbb{A}$, les polynômes orthogonaux $\widetilde{P}_n(x)$ associés à $\int_{\mathbb{A}}$ sont*

$$\widetilde{P}_n(x) = (\text{-}1)^n S_{n^n}(\mathbb{A} - x) \; / S_{(n-1)^n}(\mathbb{A}), \;\; n = 0, 1, \ldots \tag{36}$$

et leur norme est

$$\Big(S_{n^n}(\mathbb{A}\text{-}x) \, , \, S_{n^n}(\mathbb{A}\text{-}x) \Big) (-1)^n S_{(n-1)^n}(\mathbb{A}) \, S_{n^{n+1}}(\mathbb{A}) \tag{37}$$

Preuve. Pour prouver les relations d'orthogonalité, il nous suffit de montrer que $\int_{\mathbb{A}} x^m \widetilde{P}_n(x) = 0$ pour $m < n$. Mais $S_{n^n}(\mathbb{A} - x)\, x^m = S_{n^n,\, m}(\mathbb{A}, x)$ et son image par la fonctionnelle s'obtient en remplaçant la dernière colonne de x^i par les $S^i(\mathbb{A})$. En résumé, on a

$$\int_{\mathbb{A}} S_{n^n,m}(\mathbb{A}, x) = S_{n^n,m}(\mathbb{A}) \; .$$

Ce déterminant s'annule pour $m < n$, puisqu'alors il a deux colonnes identiques. De plus,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}} S_{n^n}(\mathbb{A}\text{-}x)\, S_{n^n}(\mathbb{A}\text{-}x) &= \int_{\mathbb{A}} S_{n^n}(\mathbb{A}\text{-}x)\, (-x)^n \, S_{(n-1)^n}(\mathbb{A}) \\ &= S_{n^n,n}(\mathbb{A})\, S_{(n-1)^n}(\mathbb{A}) \; .\end{aligned} \tag{38}$$

QED

On a par exemple,

$$S_{333}(\mathbb{A}\text{-}x) = \begin{vmatrix} S^3(\mathbb{A}\text{-}x) & S^4(\mathbb{A}\text{-}x) & S^5(\mathbb{A}\text{-}x) \\ S^2(\mathbb{A}\text{-}x) & S^3(\mathbb{A}\text{-}x) & S^4(\mathbb{A}\text{-}x) \\ S^1(\mathbb{A}\text{-}x) & S^2(\mathbb{A}\text{-}x) & S^3(\mathbb{A}\text{-}x) \end{vmatrix} \; ,$$

$$x^m S_{333}(\mathbb{A}\text{-}x) = \begin{vmatrix} S^3(\mathbb{A}) & S^4(\mathbb{A}) & S^5(\mathbb{A}) & x^{m+3} \\ S^2(\mathbb{A}) & S^3(\mathbb{A}) & S^4(\mathbb{A}) & x^{m+2} \\ S^1(\mathbb{A}) & S^2(\mathbb{A}) & S^3(\mathbb{A}) & x^{m+1} \\ S^0(\mathbb{A}) & S^1(\mathbb{A}) & S^2(\mathbb{A}) & x^m \end{vmatrix} \; .$$

et on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}& - S_{333}(\mathbb{A}\text{-}x) = S_{333}(x\text{-}\mathbb{A}) = S_{3;33}(x\text{-}\mathbb{A}; \mathbb{A}) = \\ & \begin{vmatrix} S^3(x\text{-}\mathbb{A}) & S^4(x\text{-}\mathbb{A}) & S^5(x\text{-}\mathbb{A}) \\ S^2(x\text{-}\mathbb{A}) & S^3(x\text{-}\mathbb{A}) & S^4(x\text{-}\mathbb{A}) \\ S^1(x\text{-}\mathbb{A}) & S^2(x\text{-}\mathbb{A}) & S^3(x\text{-}\mathbb{A}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S^3(x\text{-}\mathbb{A}) & S^4(\text{-}\mathbb{A}) & S^5(\text{-}\mathbb{A}) \\ S^2(x\text{-}\mathbb{A}) & S^3(\text{-}\mathbb{A}) & S^4(\text{-}\mathbb{A}) \\ S^1(x\text{-}\mathbb{A}) & S^2(\text{-}\mathbb{A}) & S^3(\text{-}\mathbb{A}) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

6.2 Noyau reproducteur

Nous avons vu que la théorie des fonctions symétriques peut essentiellement se réduire à l'existence d'un *noyau de Cauchy* qui permet tout à la fois de définir un produit scalaire, et une base orthonormée (les fonctions de Schur). On peut employer la même idée pour les polynômes orthogonaux, ou pour les polynômes non-symétriques.

La propriété à garder est d'être un *noyau reproducteur* : on veut $K(x, y)$ tel que

$$(K(x, y), f(x)) = f(y) \ .$$

Dans la cas présent, on va plutôt trouver des noyaux $K_n(x, y)$, $n \in \mathbb{N}$, tels que

$$(K_n(x, y), f(x)) = f(y) \quad \text{si } d^0(f) < n \ . \tag{39}$$

Théorème 11 *Soit $\mathbb{A}$ un alphabet générique, et*

$$K_n(x, y) := (-1)^{n-1} \frac{S_{n^{n-1}}(\mathbb{A} - x - y)}{S_{(n-1)^n}(\mathbb{A})} \ . \tag{40}$$

Alors $K_n(x, y)$ est un noyau reproducteur relatif à $\int_{\mathbb{A}}$, pour les polynômes de degré $< n$. De plus

$$K_n(x, y) = \frac{(-1)^n}{(S_{(n-1)^n}(\mathbb{A}))^2} \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)}{x - y} \ . \tag{41}$$

Preuve. Par rapport au théorème précédent, on a essentiellement changé $\mathbb{A}$ en $\mathbb{A}-y$, mais les calculs n'en sont guère affectés. Ainsi pour $i \geq 0$, écrit-on $x^i \, K_n(x, y) = S_{n^{n-1};i}(\mathbb{A} - y; x)$. Mais si $i \leq n - 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}} x^i \, K_n(x, y) = S_{n^{n-1};i}(\mathbb{A} - y; \, \mathbb{A}) &= (-y)^i S_{(n-1)^i, n^{n-1-i}, i}(\mathbb{A}) \\ &= (-1)^{n-1} y^i S_{(n-1)^n}(\mathbb{A}) \end{aligned}$$

et cela prouve la propriété reproductrice.

Le deuxième énoncé résulte instantanément de relations quadratiques entre mineurs (*relations de Plücker*). Nous n'avons pas encore présenté ces relations et esquivons ce point. QED

Notons que l'on peut écrire le noyau comme un déterminant où x et y ont été séparés. Par exemple,

$$S_{444}(\mathbb{A}-x-y) = \begin{vmatrix} x^3 & S^3(\mathbb{A}) & S^4(\mathbb{A}) & S^5(\mathbb{A}) & S^6(\mathbb{A}) \\ x^2 & S^2(\mathbb{A}) & S^3(\mathbb{A}) & S^4(\mathbb{A}) & S^5(\mathbb{A}) \\ x^1 & S^1(\mathbb{A}) & S^2(\mathbb{A}) & S^3(\mathbb{A}) & S^4(\mathbb{A}) \\ x^0 & S^0(\mathbb{A}) & S^1(\mathbb{A}) & S^2(\mathbb{A}) & S^3(\mathbb{A}) \\ 0 & y^0 & y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} \ ,$$

ainsi qu'on le vérifie en soustrayant x aux trois premières lignes, et y aux trois dernières colonnes.

6.3 Fractions continues

Nous avons déjà obtenue les fonctions $S_{n^n}(\mathbb{A})$ à partir d'une approche toute différente, l'étude de l'algorithme d'Euclide.

Réécrivons la description des développements en fraction continue de la série $x^{-1}\sigma_{1/x}(\mathbb{A})$ en terme de polynômes orthogonaux.

Théorème 12 *Soit $\mathbb{A}$ un alphabet générique, x une indéterminée. Soit*

$$x^{-1}\sigma_{1/x}(\mathbb{A}) = \cfrac{1}{(x-\zeta_0) + \cfrac{\beta_1}{(x-\zeta_1) + \cfrac{\beta_2}{(x-\zeta_2) + \cfrac{\beta_3}{\ddots}}}} \tag{42}$$

le développement en fraction continue de la série $x^{-1}\sigma_{1/x}(\mathbb{A})$ au voisinage de $x = \infty$. Alors les paramètres ζ_i, β_j sont les paramètres de Wroński : $\zeta_0 = S_1(\mathbb{A})$,

$$\zeta_n = \frac{S_{n^n,n+1}}{S_{n^{n+1}}} - \frac{S_{(n-1)^{n-1},n}}{S_{(n-1)^n}} \quad \& \quad \beta_n = \frac{S_{n^{n+1}}(\mathbb{A})\, S_{(n-2)^{n-1}}(\mathbb{A})}{(S_{(n-1)^n}(\mathbb{A}))^2} \tag{43}$$

et les dénominateurs des convergentes sont les polynômes orthogonaux $P_n = (-1)^n S_{n^n}(\mathbb{A}-x)$.

Les numérateurs des convergentes sont les polynômes adjoints $Q_n := S_{(n-1)^{n+1}}(\mathbb{A}+x)$.

De plus, la convergente $\frac{S_{(n-1)^{n+1}}(\mathbb{A}+x)}{(-1)^n S_{n^n}(\mathbb{A}-x)}$ est l'approximante de Padé, de degré $[n\text{-}1, n]$, de la série $x^{-1}\sigma_{1/x}(\mathbb{A})$, i.e.

$$\frac{S_{(n-1)^{n+1}}(\mathbb{A}+x)}{(-1)^n S_{n^n}(\mathbb{A}-x)} = x^{-1} + x^{-2}S_1(\mathbb{A}) + \cdots + x^{-2n}S_{2n-1}(\mathbb{A}) + \mathcal{O}(x^{-2n-1}) \tag{44}$$

Ansi, écrivant S_I for $S_I(\mathbb{A})$, on a pour premières convergentes :

$$\frac{1}{x-S_1} = \frac{Q_1}{P_1}\ ; \qquad \cfrac{1}{x - S_1 + \cfrac{S_{11}}{x - (\frac{S_{12}}{S_{11}} - S_1)}} = \frac{Q_2}{P_2} = \frac{S_{111}(x+\mathbb{A})}{S_{22}(\mathbb{A}-x)}$$

$$\frac{1}{x - S_1 + \dfrac{S_{11}}{x - (\dfrac{S_{12}}{S_{11}} - S_1) + \dfrac{S_{222}/S_{11}^2}{x - (\dfrac{S_{223}}{S_{222}} - \dfrac{S_{12}}{S_{11}})}}} = \frac{Q_3}{P_3} = -\frac{S_{2222}(\mathbb{A}+x)}{S_{333}(\mathbb{A}-x)}$$

6.4 Récurrence à trois termes

Les polynômes moniques $\widetilde{P}_n(x)$ satisfont des relations de récurrence équivalentes à la fraction continue ci-dessus :

$$P_1 = S_1(x\text{-}\mathbb{A}) = (x - S_1(\mathbb{A}))\,1 \ ,$$

$$P_2 = \frac{S_{22}(x\text{-}\mathbb{A})}{S_{11}(\mathbb{A})} = \left(x - \frac{S_{12}(\mathbb{A})}{S_{11}(\mathbb{A})} + S_1(\mathbb{A})\right)(x - S_1(\mathbb{A})) + S_{11}(\mathbb{A}), \ \ldots$$

$$\widetilde{P}_{n+1} = (x - \zeta_n)\widetilde{P}_n + \beta_n \widetilde{P}_{n-1} \ , \tag{45}$$

ajoutant $\beta_0 = 1$, $\widetilde{P}_0 = 1$, $\widetilde{P}_{-1} = 0$.

Les polynômes adjoints $\widetilde{Q}_n$ satisfont les mêmes récurrences, mais avec des conditions initiales différentes, $\widetilde{Q}_0 = 0, \widetilde{Q}_1 = 1$:

$$\widetilde{Q}_{n+1} = (x - \zeta_n)\widetilde{Q}_n + \beta_n \widetilde{Q}_{n-1} \ . \tag{46}$$

```
 Orthobz:=proc(n)
  if n=0 then RETURN(1)
  elif n=1 then RETURN(x-z0)
  fi;
  (x-cat(z,n-1))*Orthobz(n-1) + cat(b,n-1)*Orthobz(n-2)
end:
ACE> Adjointbz(3)/Orthobz(3);
                         (x - z2) (x - z1) + b2
               ----------------------------------------------
               (x - z2) ((x - z1) (x - z0) + b1) + b2 (x - z0)
ACE> taylor(%, x=infinity,7):
ACE> map(i->simplify(Rat2h(Eval_abgz(i))), %);
                     h1     h2     h3     h4     h5        1
               1/x + ---- + ---- + ---- + ---- + ---- + O(----)
                      2      3      4      5      6         7
                     x      x      x      x      x         x
```

Références

[1] L. Euler. *De Fractionibus continuis*, Comm. Acad. Sc. Imp. Petropol. **9** (1737).

[2] P. Flajolet. *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math. **32** (1980) 125-161.

[3] Heilerman. *Über die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche*, Crelle J. **23**(1845) 174–188, **48**(1852)190-206.

[4] T.J. Stieltjes. *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sc. Toulouse **8** (1894) 1–122.

[5] X. Viennot. *A combinatorial theory for general orthogonal polynomials with extensions and applications*, Bar Le Duc 1984, Springer LN 1171 (1985).

[6] E.T. Whittaker. *On the theory of continued fractions*, Proc. R. Soc. Edingburgh **36** (1915) 243–255.