Sommation symbolique

École Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul formel 2003

Frédéric Chyzak

frederic.chyzak@inria.fr
http://algo.inria.fr/chyzak/

Suites et sommes

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe une valeur à chaque entier n.

La série de terme général u_n, notée $\sum_{k\geq 0} u_k$, est la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles

$$U_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La série converge lorsque U_n a une limite S, notée alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

U_n est une somme indéfinie de u_n ; elle vérifie $U_n - U_{n-1} = u_n$.

La somme S de la série est la somme définie des u_n sur $\mathbb{N}$.

Séries génératrices

La série génératrice de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est la série formelle

$$U = \sum_{n\geq 0} u_n X^n \in \mathbb{C}[[X]].$$

U est toujours convergente dans $\mathbb{C}[[X]]$.

Si U converge au sens des fonctions (sur un voisinage complexe de 0), on identifie la série entière et la fonction analytique

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n.$$

Sommation symbolique : sommes indéfinies

Si u_n est donné sous forme close :

- polynomiale, $u_n = P(n)$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$,
- rationnelle, $u_n = R(n)$ pour $R \in \mathbb{C}(X)$,
- hypergéométrique, $u_{n+1}/u_n = R(n)$ pour $R \in \mathbb{C}(X)$,
- q-hypergéométrique, $u_{n+1}/u_n = R(q^n)$ pour $R \in \mathbb{C}(q, X)$,
- polynomialement récursive,

  $$P_d(n)u_{n+d} + \cdots + P_0(n)u_n = 0 \qquad \text{pour des } P_i \in \mathbb{C}[X],$$

- par des sommes emboîtées selon certaines contraintes (alembertienne, liouvillienne, etc),

déterminer s'il existe une forme close U_n telle que $U_n - U_{n-1} = u_n$.

Exemple : sommation indéfinie hypergéométrique

$$\sum_{k=0}^{n} \boxed{\frac{4^k}{\binom{2k}{k}}} = \frac{2(n+1)}{3} \boxed{\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}} + \frac{1}{3}.$$

$$b_{n,m} = \binom{n}{m} = \text{coefficient binomial} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b_{n+1,m}}{b_{n,m}} = \frac{n+1}{n+1-m}, \qquad \frac{b_{n,m+1}}{b_{n,m}} = \frac{n-m}{m+1}.$$

$$u_n = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{2n+1}.$$

Exemple : sommation indéfinie polynomialement récursive

$$\sum_{k=p+1}^{n-1} \boxed{\binom{k}{p} H_k} =$$

$$\left(\frac{(n+1)^2}{(p+1)^2} - 1\right) \boxed{\binom{n}{p} H_n} - \frac{(n-p)(n-p+1)}{(p+1)^2} \boxed{\binom{n+1}{p} H_{n+1}}$$

$$= \binom{n}{p} \frac{n-p}{(p+1)^2} \big((p+1)H_n - 1\big).$$

$$H_n = \text{nombre harmonique} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \qquad u_n = \binom{n}{p} H_n$$

$$\Rightarrow \quad (n+1-p)(n+2-p)u_{n+2} - (2n+3)(n+1-p)u_{n+1} + (n+1)^2 u_n = 0.$$

Sommation symbolique : sommes définies

Constantes : difficile, peu de choses à dire (sur la sommation).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s), \qquad \zeta(2p) \in \mathbb{Q}\pi^{2p}.$$

Sommes paramétrées : si u est donné sous forme close (hypergéométrique, q-hypergéométrique, ∂-finie), déterminer respectivement

$$U_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} \qquad \text{ou} \qquad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$$

sous forme close.

Exemples : sommation définie (q-)hypergéométrique

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}\binom{2k}{k}\binom{4n-2k}{2n-k} = \binom{2n}{n}^2,$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a;q)_n x^n}{(b;q)_n} = \frac{(ax;q)_\infty \left(\frac{q}{ax};q\right)_\infty (q;q)_\infty \left(\frac{b}{a};q\right)_\infty}{(x;q)_\infty \left(\frac{b}{ax};q\right)_\infty (b;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty} \qquad \text{(Ramanujan).}$$

$$(x;q)_n = q\text{-analogue du symbole de Pochhammer}$$
$$= (1-x)(1-qx)\dots(1-q^{n-1}x) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{(x;q)_{n+1}}{(x;q)_n} = 1 - q^n x \in \mathbb{F}, \qquad \frac{(qx;q)_n}{(x;q)_n} = \frac{1-q^n x}{1-x} \in \mathbb{F}.$$
$$\text{pour} \quad \mathbb{F} = \mathbb{C}(q,x,q^n).$$

Exemple : sommation définie ∂-finie (1)

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\right)^3 = n2^{3n-1}+2^{3n}-3n2^{n-2}\binom{2n}{n} \qquad \text{(Calkin).}$$

$v_{n,k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j} \quad \Rightarrow \quad$ les $v_{n+i,k+j}$ se récrivent sur $(v_{n,k}, v_{n,k+1})$:

$$(k+2)v_{n,k+2}-(n+1)v_{n,k+1}+(n-k-1)v_{n,k}=0,$$

$$(k+1)v_{n,k+1}+(n-k)v_{n+1,k}-(2n+1-k)v_{n,k}=0.$$

$u_{n,k} = v_{n,k}^3 \quad \Rightarrow$

les $u_{n+i,k+j}$ se récrivent sur $(u_{n,k}, u_{n+1,k}, u_{n,k+1}, u_{n,k+2})$.

Exemple : sommation définie ∂-finie (2)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(z)^2 = 1 \qquad \text{(Neumann).}$$

$J_k(z) =$ fonctions de Bessel $= (z/2)^k \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^n}{n!\,(n+k)!} \quad \Rightarrow$

les $J_{k+i}^{(j)}(z)$ se récrivent sur $\big(J_k(z), J_k'(z)\big)$ ou sur $\big(J_k(z), J_{k+1}(z)\big)$:

$$z^2J_k''(z)+zJ_k'(z)+(z^2-k^2)J_k(z)=0, \quad zJ_k'(z)+zJ_{k+1}(z)-kJ_k(z)=0,$$

$$zJ_{k+2}(z)-2(k+1)J_{k+1}(z)+zJ_k(z)=0.$$

$u_k(z) = J_k(z)^2 \quad \Rightarrow$

les $u_{k+1}^{(j)}(z)$ se récrivent sur $\big(u_k(z), u_{k+1}(z), u_k'(z)\big)$.

Algorithmes et méthodes principaux

1. Séries génératrices
   - Conversion entre suites de coefficients et séries génératrices
2. Suites hypergéométriques :
   - Méthode de Fasenmyer pour les sommes définies
   - Algorithme de Gosper pour les sommes indéfinies
   - Algorithme de Zeilberger pour les sommes définies
3. Suites ∂-finies :
   - Bases de Gröbner pour les sommes indéfinies et définies
   - Algorithmes de Chyzak pour les sommes indéfinies et définies
4. Sommes dans des tours de corps à différences
   - Algorithme de Karr pour les sommes indéfinies

Séries génératrices : le cas différentiellement finies

MÉTHODE : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients polynomiaux en n. Déduire une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux en u dont la série génératrice

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

est solution. Résoudre.

Exemple : pour les polynômes orthogonaux de Hermite $H_n(z)$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{H_n(u)H_n(v)z^n}{n!} = \frac{e^{4z\frac{uv-(u^2+v^2)z}{1-4z^2}}}{\sqrt{1-4z^2}}.$$

```
with(Mgfun):
expr:=HermiteH(n,u)*HermiteH(n,v)/n!:
rec:=dfinite_expr_to_rec(expr,f(n));
```

$$rec := \Big\{(16n+16)f(n)-16uvf(n+1)+(8u^2+8v^2-8n-20)f(n+2) - 4uvf(n+3)+(n+4)f(n+4)\Big\}$$

```
init_cond:={seq(f(i)=
    eval(subs(n=i,HermiteH=orthopoly[H],expr)),i=0..3)};
```

$$init\_cond := \Big\{f(0)=1, f(1)=4uv, f(2)=\frac{1}{2}(4u^2-2)(4v^2-2), f(3)=\frac{1}{6}(8u^3-12u)(8v^3-12v)\Big\}$$

```
with(gfun):
deq:=rectodiffeq(rec union init_cond,f(n),F(z));
```

$$deq := \Big\{F(0)=1, (16z^3-16z^2uv+8zu^2+8zv^2-4z-4uv)F(z)+(16z^4-8z^2+1)F'(z)\Big\}$$

```
dsolve(deq);
```

$$F(z) = \frac{e^{\frac{u^2+v^2-4uvz}{(2z+1)(2z-1)}} e^{u^2} e^{v^2} I}{\sqrt{2z+1}\sqrt{2z-1}}$$

Transformation de Mellin formelle

$$\sum_{n\geq 0} f_n z^n = F(z), \qquad f_n = 0 \quad \text{si } n < 0$$
$$\Rightarrow \qquad \sum_{n\geq 0} n f_n z^n = zF'(z), \qquad \sum_{n\geq 0} f_{n-1} z^n = zF(z)$$

$$n \leftrightarrow z\partial, \qquad \sigma \leftrightarrow z$$
$$\sigma = \text{décalage arrière}, \qquad \partial = \text{dérivation}$$
$$\sigma n = (n-1)\sigma, \qquad \partial z = z\partial + 1$$
$$P(n,\sigma)(f)(n) = 0 \leftrightarrow P(z\partial, z)(F)(z) = 0$$
si récurrence valable sur $\mathbb{Z}$!

Creative Telescoping

Soit à évaluer la somme

$$U_n = \sum_{k=a}^{b} u_{n,k} \qquad a \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \quad b \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}.$$

Supposons que l'on détermine une relation de la forme

$$\eta_d(n) u_{n+d,k} + \cdots + \eta_0(n) u_{n,k} = v_{n,k+1} - v_{n,k}.$$

Alors, après sommation sur k entre a et b, on trouve

$$\eta_d(n) U_{n+d} + \cdots + \eta_0(n) U_n = v_{n,b+1} - v_{n,a}.$$

Sommation à bornes naturelles : quand $v_{n,a} = v_{n,b+1}$.

Suites hypergéométriques

Une suite $f = (f_{n,k})$ est dite hypergéométrique si

$$\frac{f_{n-1,k}}{f_{n,k}} \in \mathbb{C}(n,k) \qquad \text{et} \qquad \frac{f_{n,k-1}}{f_{n,k}} \in \mathbb{C}(n,k).$$

Une suite $f = (f_{n,k})$ est dite q-hypergéométrique si

$$\frac{f_{n-1,k}}{f_{n,k}} \in \mathbb{C}(q, q^n, q^k) \qquad \text{et} \qquad \frac{f_{n,k-1}}{f_{n,k}} \in \mathbb{C}(q, q^n, q^k).$$

Exemples : produits et quotients de factorielle et de coefficients binomiaux et multinomiaux ; factorielles montantes et descendantes ; q-analogues.

La méthode de Fasenmyer

Entrée : terme hypergéométrique $f_{n,k}$.
Sortie : récurrence linéaire sur f à coefficients polynomiaux ne faisant pas intervenir k.

Méthode :

1. Pour un ensemble de décalages S donné, on cherche à résoudre
$$\sum_{(i,j)\in S} c_{i,j}(n) f_{n-i,k-j} = 0 \; ;$$
2. Après division par $f_{n,k}$ et après avoir chassé les dénominateurs, on trouve des polynômes $p_{i,j}$ tels que
$$\sum_{(i,j)\in S} c_{i,j}(n) p_{i,j}(n,k) = 0 \; ;$$

3. Égaler les coefficients des k^l à 0 et résoudre le système linéaire en les $c_{i,j}$ ainsi obtenus ;
4. On obtient
$$\sum_{(i,j)\in S} c_{i,j}(n) f_{n-i,k} = g_{n,k} - g_{n,k-1}$$
pour un g adéquat ;
5. Après sommation en k et introduction de $F_n = \sum_{k=a}^{b} f_{n,k}$,
$$\sum_{(i,j)\in S} c_{i,j}(n) F_{n-i} = g_{n,b} - g_{n,a-1}.$$

Améliorations : optimisation de S par Verbaeten ; multisommes et dépendance polynomiale des $c_{i,j}$ en k par Wegschaider ; q-analogues par Riese.

Identité de Dixon

Sous la forme :
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^3 = \begin{cases} (-1)^p \binom{3p}{p,p,p} & \text{si } n = 2p, \\ 0 & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

Pour $S = \{0,1,2,3\}^2$, la méthode de Fasenmyer renvoie (rapidement) un résultat positif, conduisant à la relation
$$3(3n-2)(3n-4)F_{n-2} + n^2 F_n = 0.$$

```
sommant:=(-1)^k*binomial(n,k)^3: N:=3:
P:=collect(numer(normal(add(add(c[i,j]*normal(
    subs([n=n-i,k=k-j],sommant)/sommant,expanded),
j=0..N),i=0..N))),k): sys:={coeffs(P,k)}:
sol:=solve(sys,{seq(seq(c[i,j],j=0..N),i=0..N)}):
map(factor,subs(sol,c[0,0]=n^2*(3*n-5),
    add(add(c[i,j]*f(n-i,k-j),j=0..N),i=0..N)))=0;
```

$$n^2(3n-5)f_{n,k}+(9n^3-24n^2+17n-4)f_{n-1,k-1} \\ +(3n-4)(21n^2-49n+24)f_{n-2,k-1}+(3n-4)(3n^2-7n+3)f_{n-2,k-2} \\ +3(3n-2)(n-2)^2f_{n-3,k-1}-3(3n-2)(n-2)^2f_{n-3,k-2} \\ +(3n-2)(n-2)^2f_{n-3,k-3}+(-9n^3+24n^2-17n+4)f_{n-1,k} \\ +(3n-4)(3n^2-7n+3)f_{n-2,k}-(3n-2)(n-2)^2f_{n-3,k}=0$$

```
rec:=collect(map(factor,subs(sol,c[0,0]=n^2,
    add(add(c[i,j]*F(n-i),j=0..N),i=0..N))),F,factor)=0;
```

$$rec := 3(3n-2)(3n-4)F_{n-2}+n^2F_n=0$$

```
LREtools[hypergeomsols](eval(subs(n=2*p,
    F=unapply(G(n/2),n),rec)),G(p),{},output=basis);
```

$$\frac{\_C_1(-3)^p(3^p)^2\Gamma(p+2/3)\Gamma(p+1/3)\sqrt{3}}{2\Gamma(p+1)^2\pi}$$

```
remove(has,%,GAMMA)*convert(GAMMA(3*p)/GAMMA(p)*
    simplify(select(has,%,GAMMA)*GAMMA(p)/GAMMA(3*p)),
    factorial):
normal(simplify(remove(has,%,factorial))*normal(
    select(has,%,factorial),expanded));
```

$$\frac{(3p)!\,(-1)^p\_C_1}{p!^3}$$

```
seq(f[i]=add(eval(subs([n=i,k=j],sommant)),j=0..i),
    i=0..6);
```

$$f_0 = 1, f_1 = 0, f_2 = -6, f_3 = 0, f_4 = 90, f_5 = 0, f_6 = -1680$$

Autres exemples typiques par cette méthode

$$\sum_{i,j} \binom{i+j}{i}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2 \qquad \text{(Andrews–Paule)}$$

$$\sum_{j,k} (-1)^{j+k} \binom{j+k}{k+l} \binom{r}{j} \binom{n}{k} \binom{s+n-j-k}{m-j}$$

$$= (-1)^l \binom{n+r}{n+l} \binom{s-r}{m-n-l}$$

(Graham–Knuth–Patashnik)

$$\sum_{r,s} (-a)^{n+r+s} \binom{n}{r} \binom{n}{s} \binom{n+s}{s} \binom{n+r}{r} \binom{2n-r-s}{n} = \sum_k \binom{n}{k}^4$$

(Petkovšek–Wilf–Zeilberger)

Algorithme de Gosper

ENTRÉE : terme hypergéométrique f_k.
SORTIE : fraction rationnelle $R(k)$ telle que Rf soit une somme indéfinie en k de f, ou une preuve qu'aucune telle R n'existe.

VUE SIMPLIFIÉE DE L'ALGORITHME : L'équation

$$f_k = R(k+1)f_{k+1} - R(k)f_k$$

en une fraction rationnelle R s'écrit encore

$$1 = R(k+1)\rho(k) - R(k),$$

équation qui se résout par l'algorithme de décision d'Abramov : si aucune R n'est trouvée, on a une preuve qu'aucune n'existe.

ALGORITHME ORIGINAL :

1. Calculer le rapport $\rho(k) = f_{k+1}/f_k$ et le représenter sous la forme (unique)
$$\rho(k) = \frac{p(k+1)}{p(k)} \frac{q(k)}{r(k+1)}$$
de façon que $\mathrm{pgcd}(p,q) = \mathrm{pgcd}(p,r) = \mathrm{pgcd}\big(q(k), r(k+h)\big) = 1$ pour tout entier $h > 0$.
2. Le changement de variable $R = rS/p$ ramène l'équation en la fraction rationnelle R en une équation en un polynôme S :
$$p(k) = q(k)S(k+1) - r(k)S(k).$$
3. Résoudre (des bornes sur le degré existent). Si un S est trouvé, renvoyer $R = rS/p$; sinon, on a une preuve qu'aucune R n'existe.

Exemple d'exécution de l'algorithme de Gosper

$$\sum_{k=0}^{n-1} \boxed{\frac{(-1)^k(4k+1)\binom{2k+1}{k}}{4^k(4k^2-1)}} = -\frac{2(n+1)}{4n+1} \boxed{\frac{(-1)^n(4n+1)\binom{2n+1}{n}}{4^n(4n^2-1)}} - 2.$$

En Maple8 :

```
f:=(-1)^k*(4*k+1)/4^k/(4*k^2-1)*binomial(2*k+1,k):
SumTools:-Hypergeometric:-IndefiniteSum(f,k); %/f;
```

$$-\frac{2(k+1)(-1)^k \operatorname{binomial}(2k+1,k)}{4^k(4k^2-1)}$$

$$-\frac{2(k+1)}{4k+1}$$

Par résolution de l'équation rationnelle par l'algorithme d'Abramov :

```
rho:=factor(normal(subs(k=k+1,f)/f,expanded));
```

$$\rho := -\frac{1}{2}\frac{(4k+5)(2k-1)}{(4k+1)(k+2)}$$

```
LREtools[ratpolysols](1=R(k+1)*rho-R(k),R(k),
    {},output=basis);
```

$$-\frac{2(k+1)}{4k+1}$$

Par construction et résolution de l'équation polynomiale :

```
p:=gcd(subs(k=k-1,numer(rho)),denom(rho));
rho/(subs(k=k+1,p)/p);
```

$$p := 4k + 1$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2k-1}{k+2}$$

```
q:=numer(%); r:=subs(k=k-1,denom(%%));
solve(resultant(q,subs(k=k+h,r),k),h);
```

$$q := -2k + 1$$

$$r := 2k + 2$$

$$\frac{-3}{2}$$

```
LREtools[polysols](p=q*S(k+1)-r*S(k),S(k),
    {},output=basis);
```

$$-1$$

```
r*%/p;
```

$$-\frac{2(k+1)}{4k+1}$$

Algorithme de Gosper paramétré

ENTRÉE : un terme hypergéométrique f_k et des fractions rationnelles $s_0(k), \ldots, s_m(k)$.
SORTIE : une fraction rationnelle $R(k)$ et des constantes $\eta_0, \ldots, \eta_m$ telles que Rf soit une somme indéfinie en k de

$$\big(\eta_0 s_0(k) + \cdots + \eta_m s_m(k)\big) f_k,$$

ou une preuve qu'aucune telle R n'existe pour aucune famille $\{\eta_i\}$.

IDÉE DE L'ALGORITHME : Les paramètres η_i n'interviennent que de façon linéaire et au second membre de l'équation polynomiale en $S(k)$. Le calcul de S se résume à la résolution d'un système linéaire lors de laquelle on peut prendre en compte les inconnues additionnelles $\eta_0, \ldots, \eta_m$.

Algorithme de Zeilberger

ENTRÉE : terme hypergéométrique $f_{n,k}$.
SORTIE : fractions rationnelles $\eta_0(n), \ldots, \eta_d(n)$, $\phi(n,k)$ pour d minimal telles que

$$\eta_d(n) f_{n+d,k} + \ldots \eta_0(n) f_{n,k} = \phi(n,k+1) f_{n,k+1} - \phi(n,k) f_{n,k}.$$

Terminaison non garantie en général ; l'est dans le cas holonome.
Critère récent d'Abramov.

ALGORITHME : Calculer les fractions rationnelles $s_i(n,k)$ telles que $f_{n+i,k} = s_i(n,k) f_{n,k}$ et utiliser l'algorithme de Gosper paramétré.

Exemple d'exécution de l'algorithme de Zeilberger

Les polynômes orthogonaux de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ s'expriment en termes de la fonction hypergéométrique de Gauss ${}_2F_1\left({a,b \atop c}\middle|z\right)$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{matrix}\middle|\frac{1-x}{2}\right),$$

pour ${}_2F_1\left({a,b \atop c}\middle|z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}z^k$ où $(x)_k = x(x+1)\dots(x+k-1)$.

L'algorithme fournit la récurrence en n sur $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$,

$$\begin{aligned}0 &= 2(n+2)(n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &\quad - \big((2n+\alpha+\beta+2)_3 x + (2n+\alpha+\beta+3)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\big)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &\qquad + 2(n+\alpha+1)(n+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+4)P_n^{(\alpha,\beta)}(x),\end{aligned}$$

et fournirait toutes les relations de contiguïté.

```
f:=pochhammer(alpha+1,n)/n!
    *pochhammer(-n,k)*pochhammer(n+alpha+beta+1,k)
    /pochhammer(alpha+1,k)/k!*(1-x)^k/2^k:
rho:=factor(normal(subs(k=k+1,f)/f,expanded));
```

$$\rho := \frac{1}{2}\frac{(n-k)(n+\alpha+\beta+1+k)(-1+x)}{(k+1)(\alpha+1+k)}$$

```
rho*R(k+1)-R(k)-add(eta[i]*factor(
    normal(subs(n=n+i,f)/f,expanded)),i=0..2):
rec:=collect(numer(normal(%)),
    [R,seq(eta[i],i=0..2)],factor);
```

$$
\begin{aligned}
rec := {} & (n+2-k)(n+1-k)(n-k)(n+2+\alpha+\beta) \\
& (n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1+k)(-1+x)R(k+1) \\
& - 2(k+1)(\alpha+1+k)(n+\alpha+\beta+1) \\
& (n+1-k)(n+2-k)(n+2+\alpha+\beta)R(k) \\
& - 2\eta_0(k+1)(\alpha+1+k)(n+\alpha+\beta+1) \\
& (n+1-k)(n+2-k)(n+2+\alpha+\beta) \\
& - 2\eta_1(n+\alpha+\beta+1+k)(\alpha+1+n)(k+1) \\
& (\alpha+1+k)(n+2-k)(n+2+\alpha+\beta) \\
& - 2\eta_2(\alpha+2+n)(\alpha+1+n)(n+\alpha+\beta+2+k) \\
& (n+\alpha+\beta+1+k)(k+1)(\alpha+1+k)
\end{aligned}
$$

```
den:=primpart(gcd(subs(k=k-1,coeff(rec,R(k+1))),
    coeff(rec,R(k))),k);
```

$$den := (n+2-k)(n+1-k)$$

```
REC:=collect(primpart(eval(subs(R=unapply(S(k)/den,k),
    rec)),S(k+1)),[S,seq(eta[i],i=0..2)],factor):
collect(REC,[S,seq(eta[i],i=0..2)],p->degree(p,k));
```

$$2S(k+1) + 2S(k) + 4\eta_0 + 4\eta_1 + 4\eta_2$$

```
lcoeff(coeff(REC,S(k)),k),lcoeff(coeff(REC,S(k+1)),k);
```

$$-2(n+2+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1), -(n+2+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1)(-1+x)$$

```
num:=add(c[i]*k^i,i=0..2): sys:={coeffs(collect(
    eval(subs(S=unapply(num,k),REC)),k,normal),k)}:
sol:=solve(sys,{seq(c[i],i=0..2),seq(eta[i],i=0..2)}):
P:=collect(subs(sol,add(eta[i]*u(n+i,k),i=0..2)),
    u,factor): Q:=factor(subs(sol,num/den))*u(n,k):
denom(P): P:=subs(eta[0]=%,P); Q:=subs(eta[0]=%%,Q);
```

$$P := 2(\beta+n+1)(\alpha+1+n)(\alpha+2n+4+\beta)u(n,k)$$
$$-(3+\alpha+\beta+2n)(\alpha^2+\alpha^2x+4\alpha xn+2\alpha\beta x+6\alpha x+12xn$$
$$+\beta^2x+4xn\beta+4xn^2+6\beta x+8x-\beta^2)u(n+1,k)$$
$$+2(n+2)(n+2+\alpha+\beta)(\alpha+2+2n+\beta)u(n+2,k)$$
$$Q := -2k(3+\alpha+\beta+2n)(\alpha+2+2n+\beta)(\alpha+1+n)(\alpha+k)$$
$$(\alpha+2n+4+\beta)/(n+1-k)/(n+2-k)/(n+\alpha+\beta+1)u(n,k)$$

Suites ∂-finies

Généralisation des suites polynomialement récursives à un indice.

Un terme $u_{n,k}$ est dit ∂-fini lorsque l'ensemble de ses décalés $u_{n+i,k+j}$ engendre un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}(n,k)$.

Un terme $u_k(z)$ est dit ∂-fini lorsque l'ensemble de ses dérivées et décalés $u_{k+j}^{(i)}(z)$ engendre un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}(k,z)$.

Exemple : familles de polynômes orthogonaux classiques, fonctions de Bessel, fonctions hypergéométriques et généralisations, sommes indéfinies de suites hypergéométriques, etc, l'algèbre de ces familles.

Algorithme de Gosper étendu

ENTRÉE : un espace vectoriel V de base $\big(b_1(k), \dots, b_r(k)\big)$ stable par décalage en k ; un terme ∂-fini f_k de V.
SORTIE : des fractions rationnelles $\phi_1(k)$, …, $\phi_r(k)$ telles que $\phi_1 b_1 + \dots + \phi_r b_r$ soit une somme indéfinie en k de f, ou une preuve que de telles ϕ_i n'existent pas.

ALGORITHME :

1. Poser $F_k = \phi_1(k)b_1(k) + \dots + \phi_r(k)b_r(k)$ pour $\phi_i \in \mathbb{C}(k)$.
2. Extraire les coefficients de $F_{k+1} - F_k - f_k$ sur les b_i et obtenir un système de relations de récurrences du premier ordre en les ϕ_i.
3. Résoudre en les solutions rationnelles.
4. Si des ϕ_i sont trouvées, les renvoyer ; sinon, on a une preuve que de telles ϕ_i n'existent pas.

Exemples typiques par cette méthode

$$\sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k (k+\alpha) C_k^{(\alpha)}(x)$$
$$= \frac{(\pm 1)^n}{2(1 \mp x)} \Big((n+2\alpha) C_n^{(\alpha)}(x) \mp (n+1) C_{n+1}^{(\alpha)}(x) \Big)$$
$$(C_k^{(\alpha)}(x) = \text{polynômes ultrasphériques}),$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\binom{m}{k}} H_k = \frac{(-1)^n}{\binom{m}{n}} \left(\frac{n+1}{m+2} H_n + \frac{m+1-n}{(m+2)^2} \right) - \frac{m+1}{(m+2)^2},$$
$$\sum_{k=1}^{n} H_k^3 = (n+1)H_n^3 - \frac{3}{2}(2n+1)H_n^2 + 3(2n+1)H_n + \frac{1}{2}H_n^{(2)} - 6n$$
$$\big(H_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}\big).$$

Algorithme de Zeilberger étendu

ENTRÉE : un espace vectoriel V de base $\big(b_1(n,k),\dots,b_r(n,k)\big)$ stable par les décalages en n et k ; un terme ∂-fini $f_{n,k}$ de V.
SORTIE : des fractions rationnelles $\eta_0(n)$, …, $\eta_d(n)$, $\phi_1(n,k)$, …, $\phi_r(n,k)$ pour d minimal telles que

$$\eta_d(n)f_{n+d,k}+\dots\eta_0(n)f_{n,k}=g_{n,k+1}-g_{n,k},$$

pour

$$g_{n,k}=\phi_1(n,k)b_1(n,k)+\dots+\phi_r(n,k)b_r(n,k).$$

Terminaison non garantie en général ; l'est dans le cas holonome.

ALGORITHME : Se ramener à une variante paramétrée de l'algorithme de Gosper étendu.

Exemples typiques par cette méthode

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_n(a,b;q)z^n}{(q;q)_n}=\frac{1}{(az;q)_\infty(bz;q)_\infty}\qquad(r_n=\text{Rogers–Szegő})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1/2}(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}\,dt$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^3\ \text{(van der Poorten)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\right)^3=\frac{n}{2}8^n+8^n-\frac{3n}{4}2^n\binom{2n}{n}\qquad\text{(Calkin)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n+1-k}\frac{l}{n+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+l}=\binom{2n}{n}\quad\text{(Essam et Guttmann)}$$

Non minimalité des opérateurs calculés

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{pk}{n} = (-p)^n \qquad \text{(ordre } p-1 \text{ au lieu de 1),}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{pk+1}\binom{pk+1}{k}\binom{p(n-k)}{n-k} = \binom{pn+1}{n}$$

(ordre 2 au lieu de 1 pour $p=3$),

$$\sum_{k=-n}^{n}\frac{(-1)^k q^{(5k^2-k)/2}}{(q;q)_{n-k}(q;q)_{n+k}} \quad \text{(\textit{creative symmetrizing} ; ordre 5 au lieu de 2).}$$

$$\eta_d(n)u_{n+d,k} + \cdots + \eta_0(n)u_{n,k} = v_{n,k+1} - v_{n,k}$$

L'existence de v est une contrainte sur d !

Cette relation ne tient pas compte du lieu de sommation !

Programmes disponibles

- Package `SumTools:-Hypergeometric` de Maple8
- Bibliothèque Maple `algolib` du Projet Algo (Inria) disponible à l'URL `http://algo.inria.fr/libraries/software.html`
- Programmes Mathematica (et un peu de Maxima) du Risc à l'URL `http://www.risc.uni-linz.ac.at/research/combinat/`
- Autre collection de programmes Maple et Mathematica disponible sur la page web du livre $A=B$ à l'URL `http://www.cis.upenn.edu/~wilf/progs.html`
- Programmes Maple de Zeilberger `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/programs.html`

Disponibilité des algorithmes

Sommation de séries génératrices :

- `gfun` (Murray, Salvy et Zimmermann), diffusé dans `algolib` (Maple).
- `GeneratingFunctions` (Mallinger), diffusé par le RISC (Mathematica).

Méthode de Fasenmyer :

- `MultiSum` (Wegschaider) et `qMultiSum` (Riese), diffusé par le RISC (Mathematica).

Algorithmes de Gosper et de Zeilberger :

- `SumTools:-Hypergeometric` (Koepf ; Le) dans Maple8.
- `fastZeil` (Paule et Schorn), diffusé par le RISC (Mathematica).

- `Zeilberger` (Caruso), diffusé par le RISC (Maxima).
- `EKHAD` (Zeilberger), (Maple).

q-Analogues des algorithmes de Gosper et de Zeilberger :

- `qZeil` (Riese), `Bibasic Telescope` (Riese), diffusé par le RISC (Mathematica).
- `qEKHAD` (Zeilberger), (Maple).

Extensions ∂-finies des algorithmes de Gosper et de Zeilberger :

- `Mgfun` (Chyzak), diffusé dans `algolib` (Maple).

Références

Ouvrages panoramiques :

- $A = B$, Marko Petkovšek, Herbert S. Wilf et Doron Zeilberger (1996). Peters, Wellesley, MA.
- Chapitre *Computer algebra*, Frédéric Chyzak et Peter Paule. Dans : *Digital Library of Mathematical Functions*, NIST. En préparation.

Sur la sommation rationnelle :

- The summation of rational functions, S. A. Abramov (1971). *Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fisiki*, (11), 1071–1075. Traduction dans Comput. Math. Math. Phys.
- Rational summation and Gosper-Petkovšek representation, Roberto Pirastu et Volker Strehl (1995). *Journal of Symbolic Computation* (20)5-6, 617–635.

Sur l'algorithme de Gosper et ses q-analogues :

- Decision procedure for indefinite hypergeometric summation, R. William Gosper, Jr. (1978). *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* (75)1, 40–42.
- *Concrete mathematics*, Ronald L. Graham, Donald E. Knuth et Oren Patashnik (1994). Deuxième édition. Addison-Wesley, Reading, MA.
- A generalization of Gosper's algorithm to bibasic hypergeometric summation, Axel Riese (1996). *Electronic Journal of Combinatorics* (3)1, R19. 16 pages.

Sur la méthode de Fasenmyer :

- *Some generalized hypergeometric polynomials*, Mary Celine Fasenmyer (1945). Thèse. University of Michigan.
- Some generalized hypergeometric polynomials, Mary Celine Fasenmyer (1947). *Bulletin of the American Mathematical Society* (53), 806–812.
- A note on pure recurrence relations, Mary Celine Fasenmyer (1949). *American Mathematical Monthly* 56, 14–17.

- *Computer generated proofs of binomial multi-sum identities*, Kurt Wegschaider (1997). Diplomarbeit. RISC, Université J. Kepler, Linz.
- qMultiSum — A package for proving q-hypergeometric multiple summation identities, Axel Riese. À paraître.

Sur l'algorithme de Zeilberger et ses q-analogues :

- A fast algorithm for proving terminating hypergeometric identities, Doron Zeilberger (1990). *Discrete Mathematics* (80)2, 207–211.
- The method of creative telescoping, Doron Zeilberger (1991). *Journal of Symbolic Computation* (11)3, 195–204.
- A Mathematica version of Zeilberger's algorithm for proving binomial coefficient identities, Peter Paule et Markus Schorn (1995). *Journal of Symbolic Computation*, (20)5-6, 673–698.
- Greatest factorial factorization and symbolic summation, Peter Paule (1996). *Journal of Symbolic Computation*, (20)3, 235–268.
- A Mathematica q-analogue of Zeilberger's algorithm based on an

  algebraically motivated approach to q-hypergeometric telescoping, Peter Paule et Axel Riese (1997). Dans : *Special Functions, q-Series and Related Topics (Toronto, ON, 1995)*, Fields Institute Communications (14). AMS, Providence, RI. p. 179–210.
- Applicability of Zeilberger's algorithm to hypergeometric terms, S. A. Abramov (2002). Dans : *ISSAC'02 (July 7–10, 2002. Lille, France).*

Sur la sommation ∂-finie/holonome :

- A holonomic systems approach to special functions identities, Doron Zeilberger (1990). *Journal of Computational and Applied Mathematics* (32)3, 321–368.
- Démonstration "automatique" d'identités et fonctions hypergéométriques (d'après D. Zeilberger), Pierre Cartier (1992). *Astérisque* (1991/92)206. Exp. No. 746, 3, 41–91.
- Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate identities, Frédéric Chyzak et Bruno Salvy (1998). *Journal of Symbolic*

Computation (26)2, 187–227.

- *Fonctions holonomes en calcul formel*, Frédéric Chyzak (1998). Thèse. INRIA, TU 0531.
- An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions, F. Chyzak (2000). *Discrete Mathematics* (217)1-3, 115–134.

Sur la sommation dans des tours de corps à différences :

- Summation in finite terms, Michael Karr (1981). *Journal of the ACM* (28)2, 305–350.
- Theory of summation in finite terms, Michael Karr (1985). *Journal of Symbolic Computation* (1)3, 303–315.
- *Symbolic summation in difference fields*, Carsten Schneider (2001). Thèse. RISC, Université J. Kepler, Linz.

Autres références :

- Differentiably finite power series, R. P. Stanley (1980). *European Journal of Combinatorics* (1)2, 175–188.
- D-finite power series, L. Lipshitz (1989). *Journal of Algebra* (122)2, 353–373.
- Rational functions certify combinatorial identities, Herbert S. Wilf et Doron Zeilberger (1990). *Journal of the American Mathematical Society* (3)1, 147–158.
- Rational function certification of multisum/integral/"q" identities, Herbert S. Wilf et Doron Zeilberger (1992). *Bulletin of the American Mathematical Society* (27)1, 148–153.
- Gfun: a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable, Bruno Salvy et Paul Zimmermann (1994). *ACM Transactions on Mathematical Software* (20)2, 163–177.
- An algorithm for finding recurrence relations of binomial sums and its complexity, Nobuki Takayama (1995). *Journal of Symbolic Computation* (20)5-6, 637–651.