Université Marne La Vallée
Janvier 1998

Calcul formel, fonctions spéciales et identités combinatoires

Bruno Gauthier
gauthier@univ-mlv.fr

d'après un cours donné par Bruno Salvy

Université Marne La Vallée

Institut Gaspard Monge

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce cours est la démonstration d'identités combinatoires non triviales telles que :

$$\begin{aligned}
F_{n+2}\,F_n - F_{n+1}^2 &= (-1)^n\ ,\\
\sum_k \binom{n}{k} &= 2^n\ ,\\
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2\,k}{k}}\,4^k &= \frac{1}{1-2\,n}\ ,\\
\sum_{r,s} (-1)^{n+r+s}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n+r}{r}\binom{n+s}{s}\binom{2\,n-r-s}{n} &= \sum_k \binom{n}{k}^4\ ,\\
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,5^{(k-1)/2} &= \left(\sqrt{5}+1\right)^n\ ,\\
J_0(z) + 2\,\sum_{k\geq 1}(-1)^k\,J_{2\,k}(n) &= \cos z\ .
\end{aligned}$$

Ceci fait intervenir des équations de récurrences et des équations différentielles **linéaires** et des termes hypergéométriques. Grâce au développement des algorithmes dans ce domaine, et à la puissance des machines actuelles, les systèmes de calcul formel permettent de résoudre de mieux en mieux ces équations.

Les techniques de calcul présentées dans ce document sont regroupées selon les thèmes suivants :

- la présentation des objets et des manipulations de base sur les séries formelles ;
- la recherche de solutions polynomiales, rationnelles, hypergéométriques d'équations de récurrence ;
- une initiation à la démontration automatique d'identités faisant intervenir des termes hypergéométriques.

Précisons que les algorithmes présentés sont implantés notamment dans le package *Maple* `HYPERG`[1] qui permet de manipuler des séries hypergéométriques.

[1] `http: //www-igm.univ-mlv.fr/~gauthier`

Partie I

Outils de Base

Chapitre 1

Notations et Définitions

1.1 Notations usuelles

Introduisons quelques fonctions usuelles :

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t} dt, \qquad \Gamma(n+1) = n! \qquad \text{fonction Gamma}$$

$$(a)_k := a\,(a+1)\dots(a+k-1), \qquad k=1,2,\dots \qquad (a)_0 := 1; \qquad \text{factorielle montante}$$

$$(a)_{\underline{k}} := a\,(a-1)\dots(a-k+1), \qquad k=1,2,\dots \qquad (a)_{\underline{0}} := 1; \qquad \text{factorielle descendante}$$

1.2 Définitions élémentaires

Définition 1 *Une fonction $F(k)$ est* ***rationnelle*** *en k s'il existe deux polynômes s et t premiers entre eux tels que $F(k) = s(k)/t(k)$.*

Définition 2 *Une fonction $F(k)$ est* ***géométrique*** *en k si le rapport $F(k+1)/F(k)$ est constant.*

Définition 3 *Une série $\sum_{k\geq 0} F(k)$ est* ***géométrique*** *si le rapport entre deux termes consécutifs est constant ($F(k+1)/F(k) = \mathtt{const}$).*

Définition 4 *Une fonction $G(k)$ est* ***hypergéométrique*** *en k si le rapport $G(k+1)/G(k)$ est une fonction rationnelle de k à coefficients dans $\mathbb{C}$.*

Exemple :
2^n et $\binom{m}{n}$ sont des fonctions hypergéométriques en n, mais pas $\cos n$.

Définition 5 *Une série $\sum_{k\geq 0} G(k)$ est* ***hypergéométrique*** *si le rapport entre deux termes consécutifs est une fonction rationnelle de l'indice de sommation k :*
$G(k+1)/G(k) = P(k)/Q(k)$ où P et Q sont des polynômes en k à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Notation 1 *La forme standard d'une série hypergéométrique est la forme compacte suivante :*

$$ {}_rF_s \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} ; z \right] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_r)_k}{(b_1)_k \dots (b_s)_k} \frac{z^k}{k!} \ , \tag{1.1}$$

où z est appelé "point d'évaluation", et r et s sont respectivement les nombres de paramètres "haut" et "bas" de la série. Cette série est définie uniquement si $\forall i = 1, \dots, s, b_i \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

Définition 6 *Soient* $a_0(n), a_1(n), \cdots, a_k(n)$, *des fractions rationnelles. Une récurrence linéaire* $a_k(n)\, U_{n+k} + \cdots + a_0(n)\, U_n = b(n)$ *— dont le coefficient de tête* a_k *n'est pas identiquement nul — est*

- ***singulière en x*** *si* $a_k(x) = 0$ *;*
- ***régulière*** *si elle ne possède pas de singularité.*

1.3 L'holonomie

Tout d'abord, introduisons les opérateurs de dérivation et de décalage que nous utiliserons plus loin :

$$D_x\, f(n,x) = \frac{d}{dx} f(n,x) \ , \qquad E_n\, f(n,x) = f(n+1,x) \ .$$

1.3.1 Fonctions et suites C-finies

Cas univarié

On sait (d'après [10]) que les solutions des équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$p_r\, D_z^{(r)}\, f(z) + \cdots + p_1\, D_z^{(1)}\, f(z) + p_0\, f(z) = 0 \ ,$$

s'expriment sous la forme $f(z) = \sum_{i=1}^{l} q_i(z)\, e^{\lambda_i\, z}$. Ces solutions sont appelées des fonctions "C-finies".
Ainsi, on donne deux définitions équivalentes :

Définition 7 *Une fonction f est "C-finie" si et seulement si elle satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients constants :*

$$p_r\, D_z^{(r)}\, f(z) + \cdots + p_1\, D_z^{(1)}\, f(z) + p_0\, f(z) = 0 \ ,$$

que l'on note sous forme compacte :

$$P(D_z)\, f(z) = 0 \ .$$

Définition 8 *Une fonction f est "C-finie" si ses dérivées successives engendrent un espace vectoriel de dimension finie.*

De façon analogue, on définit les suites "C-finies" :

Définition 9 *Une suite U est "C-finie" si et seulement si elle satisfait une équation de récurrence linéaire à coefficients constants :*

$$p_r\, E_n^r\, U_n + \cdots + p_1\, E_n\, U_n + p_0\, U_n = 0 \ ,$$

que l'on note sous forme compacte :

$$P(E_n)\, U_n = 0 \ .$$

Définition 10 *Une suite U est "C-finie" si ses décalées successives engendrent un espace vectoriel de dimension finie.*

Cas multivarié

On considère maintenant des fonctions à plusieurs variables :

$$f\ : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{C}\ .$$

Définition 11 *Une fonction $f(z_1, \cdots, z_n)$ à plusieurs variables est "C-finie" si et seulement si elle satisfait un système d'équations différentielles partielles à coefficients constants :*

$$P_i(D_1, \cdots, D_n)\, f = 0\ , \quad i = 1, \cdots, L\ .$$

Les suites à plusieurs variables peuvent être considérées comme des fonctions d'un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. D'autre part, on appelle un polynôme $P(E_1, \cdots, E_n)$, un opérateur de récurrence linéaire partielle à coefficients constants. Par exemple, $3\, E_1\, E_2^2 + I$ correspond à l'opérateur suivant :

$$a(m_1, m_2) \longrightarrow 3\, a(m_1+1, m_2+2) + a(m_1, m_2)\ .$$

Définition 12 *Une suite $U(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ est "C-finie" si et seulement si elle satisfait un système d'équations de récurrences linéaires partielles à coefficients constants :*

$$P_i(E_1, \cdots, E_n)\, U(m_1, m_2, \cdots, m_n) = 0\ , \quad i = 1, \cdots, L\ .$$

1.3.2 Fonctions D-finies

Définition 13 *Une fonction f est "D-finie" si et seulement si elle satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels :*

$$p_r(z)\, D_z^{(r)}\, f(z) + \cdots + p_1(z)\, D_z^{(1)}\, f(z) + p_0(z)\, f(z) = 0\ .$$

On peut en fait supposer que tous les p_i sont des polynômes, et que $p_0(z) = 1$.

1.3.3 Suites P-récursives

Définition 14 *Une suite U est "P-récursive" si et seulement si elle satisfait une équation de récurrence linéaire à coefficients rationnels :*

$$p_r(n)\, E_n^r\, U_n + \cdots + p_1(n)\, E_n\, U_n + p_0(n)\, U_n = 0\ .$$

On peut également supposer que tous les p_i sont des polynômes, et que $p_0(z) = 1$.

Remarque 1 *Par définition, une suite hypergéométrique (H_n) vérifie $H_{n+1}/H_n = P(n)/Q(n)$ où P et Q sont des polynômes (c.f. définition 4). Une telle suite satisfait donc une récurrence linéaire d'ordre 1 :*

$$P(n)\, H_n - Q(n)\, H_{n+1} = 0\ .$$

La suite (H_n) est donc "P-récursive".

Exemple 1 *La suite hypergéométrique $U_n = n!$ vérifie la récurrence*

$$((n+1)\, E_n - 1)\ U_n = 0\ .$$

Cette suite est donc "P-récursive", mais n'est pas "C-finie" car les coefficients de la récurrence ne sont pas constants.

Exemple 2 *Les nombres d'Apéry* $A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$ *satisfont la récurrence suivante :*

$$(n+2)^2\, A_{n+2} - (2\,n+3)\,(17\,n^2 + 51\,n + 39)\, A_{n+1} + (n+1)^2\, A_n = 0\ .$$

Cette suite est encore "P-récursive".

1.3.4 Fonctions et systèmes holonomes

La définition d'une fonction holonome est obtenue en modifiant la définition des fonctions "C-finies" à plusieurs variables : en substituant les opérateurs différentiels linéaires partiels à coefficients constants par des opérateurs différentiels linéaires partiels *à coefficients polynomiaux.* On ne considère plus l'algèbre commutative générée par $D_1, \cdots, D_n$, mais l'algèbre non commutative (appelée Algèbre de *Weyl*) générée par les $x_1, \cdots, x_n, D_1, \cdots, D_n$ où x_i est l'opérateur de multiplication par x_i et D_i est l'opérateur de dérivation par la variable x_i :

$$x_i\ : f \longrightarrow x_i\, f\ , \qquad D_i\ : f \longrightarrow \frac{d}{dx_i} f\ .$$

Ces générateurs satisfont les règles suivantes de commutation :

$$[x_i, x_j] = 0\ , \qquad [D_i, D_j] = 0\ , \qquad [D_i, x_j] = \delta_{i\,j}\ .$$

On obtient de façon analogue, la définition d'une suite holonome à partir de la définition des suite "C-finies".

De façon général, une fonction est holonome si elle satisfait un système fini d'équations mixtes (équations différentielles ou récurrences linéaires). Elle est complètement déterminée par ces équations et par un nombre fini de conditions initiales.

Exemple 3 *Les* ***polynômes de Legendre*** *définis par*

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2\,(n-k)}{k}\, x^{n-2\,k}\ ,$$

satisfont les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (1-x^2)\, P_n''(x) - 2\,x\, P_n'(x) + n\,(n+1)\, P_n(x) &= 0\ , \\ (n+2)\, P_{n+2}(x) - (2\,n+3)\, x\, P_{n+1}(x) + (n+1)\, P_n(x) &= 0\ , \\ (1-x^2)\, P_{n+1}'(x) + (n+1)\, x\, P_{n+1}(x) - (n+1)\, P_n(x) &= 0\ . \end{aligned}$$

Ces polynômes sont holonomes.

Théorème 1.1 *Une suite* (u_n) *est "P-récursive" si et seulement si la fonction génératrice* $f(z) = \sum_n u_n\, z^n$ *est "D-finie".*

Démonstration — Lipshitz, L. D-finite power series. Journal of Algebra 122 (1989), 353-373. Théorème 3.7

Chapitre 2

Calcul rapide

2.1 Récurrences linéaires

2.1.1 Coefficients polynomiaux

On s'intéresse aux récurrences linéaires non nécessairement homogènes, du type suivant :

$$a_k(n)\, U_{n+k} + a_{k-1}(n)\, U_{n+k-1} + \cdots + a_1(n)\, U_{n+1} + a_0(n)\, U_n = b(n) \tag{2.1}$$

où $b(n)$ et les $a_i(n) \in \mathbb{K}[n]$;
L'entier k est appelé *ordre de la récurrence.*

Proposition 2.1 *Une solution d'une équation de récurrence non homogène est aussi solution d'une équation de récurrence homogène.*

Démonstration — Soit la récurrence non homogène suivante :

$$(R_n) \quad : \qquad a_k(n)\, U_{n+k} + a_{k-1}(n)\, U_{n+k-1} + \cdots + a_1(n)\, U_{n+1} + a_0(n)\, U_n = b(n)\ .$$

L'élimination du polynôme $b(n)$ s'effectue par le calcul de $R_{n+1} \times b(n) - R_n \times b(n+1)$. On obtient ainsi une récurrence linéaire homogène. (Cette homogénéisation augmente l'ordre de la récurrence de 1.)
Réciproquement, toute solution d'une équation de récurrence homogène n'est pas solution d'une équation de récurrence non homogène. (Le contre-exemple le plus simple étant la solution nulle.) □

Exemple 4

$$\boldsymbol{(n+2)\, U_{n+1} - n\, U_n = n}\ ,$$

$$\begin{cases} (n+2)\, U_{n+1} - n\, U_n = n\ , \\ (n+3)\, U_{n+2} - (n+1)\, U_{n+1} = n+1\ , \end{cases}$$

$$n\,(n+3)\, U_{n+2} - n\,(n+1)\, U_{n+1} - (n+1)\,(n+2)\, U_{n+1} + (n+1)\, n\, U_n = 0\ ,$$

et après regroupement des termes :

$$\boldsymbol{n\,(n+3)\, U_{n+2} - (2\,n+2)\,(n+1)\, U_{n+1} + (n+1)\, n\, U_n = 0}\ .$$

Proposition 2.2 *Si (U_n) est une solution de (2.1), alors U_N se calcule en $O(N)$ opérations dans $\mathbb{K}$ étant donnés $U_{p+1}, \cdots, U_{p+k-1}, U_{p+k}$, où*

$$p = \begin{cases} -1 & \text{si (2.1) est régulière ,} \\ \max\{i \in \mathbb{N}, a_k(i) = 0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Algorithme 1 *Initialement, on connait $U_{p+1}, \cdots, U_{p+k-1}, U_{p+k}$;*
Pour $n = p+1$, l'équation (2.1) devient :

$$a_k(p+1)\, U_{p+1+k} + a_{k-1}(p+1)\, U_{p+k} + \cdots + a_0(p+1)\, U_{p+1} = b(p+1) \ ,$$

cette nouvelle équation permet de calculer la valeur U_{p+1+k}. Il suffit alors d'itérer ce calcul pour n variant de $p+1$ à $N-k$. Ainsi, on obtient une nouvelle valeur à chaque étape et finalement on obtient U_N. □

Exemple 5

$$(n+1)\, U_{n+2} + n\, U_{n+1} - U_n = 0 \ ,$$

Données : $U_0 = 4 \qquad U_1 = 2.$
Calcul : $\boldsymbol{U_4 = ?}$

$n=0$	$U_2 - U_0 = 0$	$U_2 = 4$
$n=1$	$2\,U_3 + U_2 - U_1 = 0$	$U_3 = -1$
$n=2$	$3\,U_4 + 2\,U_3 - U_2 = 0$	$U_4 = 2$

Exemple 6

$$(n-2)\, U_{n+2} + U_{n+1} - n\, U_n = 0 \ ,$$

cette équation possède une singularité pour $n = 2$.
Données : $U_3 = 1 \qquad U_4 = 3.$
Calcul : $\boldsymbol{U_6 = ?}$

$n=3$	$U_5 + U_4 - 3\,U_3 = 0$	$U_5 = 0$
$n=4$	$2\,U_6 + U_5 - 4\,U_3 = 0$	$U_6 = 12$

2.1.2 Coefficients constants

Notons que dans ce cas, l'équation n'est jamais singulière car le coefficient de tête de la récurrence est une constante non nulle. La récurrence s'écrit :

$$a_k\, U_{n+k} + a_{k-1}\, U_{n+k-1} + \cdots + a_1\, U_{n+1} + a_0\, U_n = b \ .$$

En normalisant par rapport au coefficient de tête, on obtient :

$$U_{n+k} + e_{k-1}\, U_{n+k-1} + \cdots + e_1\, U_{n+1} + e_0\, U_n = b \ , \qquad \text{où} \qquad e_i = \frac{a_i}{a_k} \ .$$

On peut donc écrire la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} U_{n+k} \\ U_{n+k-1} \\ \cdots \\ \cdots \\ U_{n+k-i-1} \\ U_{n+k-i} \\ \cdots \\ U_{n+2} \\ U_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_{k-1} & -e_{k-2} & \cdots & -e_{k-i-1} & -e_{k-i} & \cdots & \cdots & -e_1 & -e_0 & b \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_{n+k-1} \\ U_{n+k-2} \\ \cdots \\ \cdots \\ U_{n+k-i-1} \\ U_{n+k-i} \\ \cdots \\ U_{n+1} \\ U_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de U_N s'obtient par la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} U_N \\ U_{N-1} \\ \cdots \\ \cdots \\ U_{N-i-1} \\ U_{N-i} \\ \cdots \\ U_{N-k+2} \\ U_{N-k+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{N-k+1} \times \begin{pmatrix} U_{k-1} \\ U_{k-2} \\ \cdots \\ \cdots \\ U_{k-i-1} \\ U_{k-i} \\ \cdots \\ U_1 \\ U_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ où $\mathcal{A}$ est une matrice carré de dimension $k+1$.

Le coût du calcul est principalement celui de l'exponentiation de la matrice A, ce qui donne une complexité en $O(log(N))$.

Exemple 7 (Nombres de Fibonacci)

$$\boldsymbol{F_{n+2} = F_{n+1} + F_n} \ , \qquad \boldsymbol{F_0 = 0} \ , \quad \boldsymbol{F_1 = 1} \ .$$

On cherche à déterminer $\boldsymbol{F_9}$ *:*

on sait que $\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$,

donc $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$.

D'une part : $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{A}^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{A}^8 = \begin{pmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{pmatrix}$,

et d'autre part : $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Finalement : $F_9 = 34 + 21 = 55$.

2.2 Equations différentielles linéaires

On s'intéresse aux séries formelles $y(z) = \sum_{n \geq 0} U_n \, z^n$ qui satisfont une équation différentielle linéaire :

$$a_k(z)\, y^{(k)}(z) + \cdots + a_0(z)\, y(k) = b(z) \ , \tag{2.2}$$

où $b(z)$ et les $a_i(z) \in \mathbb{K}[z]$.

Proposition 2.3

- *Si $y(z)$ est une série, solution de l'équation différentielle (2.2), alors la suite (U_n) est solution d'une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux. Si de plus, le coefficient de tête a_k de l'équation différentielle, vérifie $a_k(0) \neq 0$, alors la récurrence associée est régulière.*
- *Réciproquement, si la suite (U_n) est solution d'une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux, alors la série $y(z)$ est solution d'une équation différentielle.*

Les développements en série permettent la transition entre une équation de récurrence et son équation différentielle "associée" et vice-versa.

$$\begin{cases} y(z) = \sum_{n\geq 0} U_n\, z^n \ , \\ y^{'}(z) = \sum_{n\geq 0} (n+1)\, U_{n+1}\, z^n \ , \\ y^{''}(z) = \sum_{n\geq 0} (n+1)\,(n+2)\, U_{n+2}\, z^n \ , \\ \dots \end{cases}$$

Exemple 8 *Soit une série formelle $y(z) = \sum_{n\geq 0} U_n\, z^n$ vérifiant l'équation différentielle suivante :*

$$(z+1)\, y'(z) + (2\,z-1)\, y(z) = 0 \ ,$$

La récurrence satisfaite par U_n s'obtient en substituant les développements en série de $y(z)$ et $y'(z)$ dans (2.2) :

$$\begin{aligned} (z+1) \sum_{n\geq 0} (n+1)\, U_{n+1}\, z^n + (2\,z-1) \sum_{n\geq 0} U_n\, z^n &= 0 \ , \\ \sum_{n\geq 0} (n+1)\, U_{n+1}\, z^{n+1} + \sum_{n\geq 0} (n+1)\, U_{n+1}\, z^n + 2 \sum_{n\geq 0} U_n\, z^{n+1} - \sum_{n\geq 0} U_n\, z^n &= 0 \ . \end{aligned}$$

L'extraction du coefficient de z^{n+1} donne la récurrence "associée" :

$$(n+1)\, U_{n+1} + (n+2)\, U_{n+2} + 2\, U_n - U_{n+1} = 0 \ ,$$

qui s'écrit après simplification :

$$(n+2)\, U_{n+2} + n\, U_{n+1} + 2\, U_n = 0 \ .$$

Ici, le terme de tête de l'équation différentielle vérifie l'hypothèse $a_k(0) = 1 \neq 0$, donc la récurrence associée est régulière.

Remarque 2 *L'ordre r_1 de l'équation différentielle n'est pas — en général — égal à l'ordre r_2 de la récurrence associées. Les méthodes actuelles ne permettent pas de déterminer — a priori — la relation d'ordre entre r_1 et r_2. (L'exemple précédent et les deux exemples suivants illustrent les trois cas de figure qui peuvent se présenter.)*

Exemple 9

$$a\, y'(z) - y(z) = 0 \ .$$

Les développements en série permettent d'écrire cette équation différentielle sous la forme :

$$a \sum_{n\geq 0} (n+1)\, U_{n+1}\, z^n - \sum_{n\geq 0} U_n\, z^n = 0 \ .$$

La récurrence "associée" s'obtient par l'extraction du coefficient de z^n :

$$a\,(n+1)\, U_{n+1} - U_n = 0 \ .$$

Exemple 10

$$(z-27\,z^2)\,y''(z)-54\,z\,y'(z)-6\,y(z)=0$$

Les développements en série donnent :

$$(z-27\,z^2)\sum_{n\geq 0}(n+1)\,(n+2)\,U_{n+2}\,z^n-54\,z\sum_{n\geq 0}(n+1)\,U_{n+1}\,z^n-6\sum_{n\geq 0}U_n\,z^n=0\ ,$$

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)\,(n+2)U_{n+2}z^{n+1}-27\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)U_{n+2}z^{n+2}-54\sum_{n\geq 0}(n+1)U_{n+1}z^{n+1}-6\sum_{n\geq 0}U_n z^n=0\ .$$

Le coefficient de z^{n+2} vérifie :

$$(n+2)\,(n+3)\,U_{n+3}-27\,(n+1)\,(n+2)\,U_{n+2}-54\,(n+2)\,U_{n+2}-6\,U_{n+2}=0\ ,$$

$$(n+2)\,(n+3)\,U_{n+3}+((-27\,(n+1)-54)\,(n+2)-6)\,U_{n+2}=0\ .$$

Finalement la récurrence "associée" est :

$$n\,(n+1)\,U_{n+1}+(-27\,(n+1)\,n-6)\,U_n=0\ .$$

Exemple 11 *Cet exemple illustre la transition entre une récurrence et son équation différentielle linéaire associée.*

$$U_{n+2}-q\,U_{n+1}-(5\,n+10)\,U_n=0\ .$$

En multipliant par z^{n+2} et en sommant sur n :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}U_{n+2}\,z^{n+2}-q\sum_{n\geq 0}U_{n+1}z^{n+2}-5\sum_{n\geq 0}n\,U_n\,z^{n+2}-10\sum_{n\geq 0}U_n\,z^{n+2} &= 0\ ,\\
\sum_{n\geq 0}U_{n+2}\,z^{n+2}-q\,z\sum_{n\geq 0}U_{n+1}z^{n+1}-5\,z^3\sum_{n\geq 0}n\,U_n\,z^{n-1}-10\,z^2\sum_{n\geq 0}U_n\,z^n &= 0\ ,\\
y(z)-q\,z\,y(z)-5\,z^3\,y'(z)-10\,z^2\,y(z) &= 0\ ,\\
5\,z^3\,y'(z)+(10\,z^2+q\,z-1)\,y(z) &= 0\ .
\end{aligned}$$

Citons le package *Maple* `gfun` (pour `generating functions`) développé par B. Salvy et P. Zimmermann, qui permet la manipulation des fonctions génératrices. La fonction `diffeqtorec` permet de déterminer la récurrence associée à une équation différentielle linéaire (et réciproquement pour la fonction `rectodiffeq`).

```
> with(gfun):
> diffeqtorec( a*diff(y(z),z)-y(z)=0, y(z), v(n) );

                    v(n) + (- a n - a) v(n + 1)
```

Corollaire 2.1 *Si $y(z)$ est une solution analytique en 0 de (2.2), et si $a_k(0)\neq 0$, alors son développement de Taylor à l'ordre N se calcule en $O(N)$ opérations de $\mathbb{K}$ étant donnés $y(0), y^{'}(0), \cdots, y^{(k-1)}(0)$.*

Exemple 12 *Soit* $f(z) = \sum_{k \geq 0} \binom{2\,k}{k} z^k$. *On se propose de déterminer le coefficient de* z^k *dans la série* $f^2(z)$ *:*
On pose $U_k = \binom{2\,k}{k} = \frac{(2\,k)!}{(k!)^2}$, *puis on cherche une équation de récurrence satisfaite par cette suite hypergéométrique :*

$$\begin{aligned} \frac{U_{k+1}}{U_k} &= \frac{(2\,k+2)\,(2\,k+1)}{(k+1)^2} , \\ U_{k+1} &= U_k\,\frac{2\,(k+1)\,(2\,k+1)}{(k+1)^2} , \\ (k+1)\,U_{k+1} &= 2\,(2\,k+1)\,U_k . \end{aligned}$$

On multiple par z^k *et on somme :*

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (k+1)\,U_{k+1}\,z^k &= 2 \sum_{k \geq 0} (2\,k+1)\,U_k\,z^k , \\ &= 4\,z \sum_{k \geq 0} k\,U_k\,z^{k-1} + 2 \sum_{k \geq 0} U_k\,z^k , \end{aligned}$$

on identifie les deux termes de l'égalité :

$$\begin{aligned} f'(z) &= 4\,z\,f'(z) + 2\,f(z) , \\ f'(z)\,(1-4\,z) - 2\,f(z) &= 0 . \end{aligned}$$

$$g(z) = f(z)^2 , \qquad g'(z) = 2\,f(z)\,f'(z) = \frac{4\,f^2}{1-4\,z} ,$$

$$(1-4\,z)\,g'(z) - 4\,g(z) = 0 ,$$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{4}{1-4\,z} ,$$

En intégrant, on trouve :

$$g = \frac{1}{1-4\,z} ,$$

Finalement : $f^2(z) = \frac{1}{1-4\,z}$,
et le coefficient de z^n *dans la série* $f^2(z)$ *est* 4^n.

2.3 Exercices

▷ Vérifier que la récurrence associée à l'équation différentielle linéaire

$$\left(\frac{81}{4}\,x^3 - 3\,x^2\right)\,y'''(x) + \left(\frac{567}{4}\,x^2 - \frac{39}{2}\right)\,y''(x) + \left(207\,x - \frac{45}{2}\right)\,y'(x) + 45\,y(x) = 0 ,$$

est

$$(27\,k^2 + 81\,k + 60)\,U_k + (-4\,k^2 + 4\,k - 30)\,U_{k+1} - (26\,k + 52)\,U_{k+2} = 0 .$$

▷ De même avec

$$(z^3 - 2\,z^2 + z)\,y'''(z) + (7\,z^2 - 15\,z + 8)\,y''(z) + (10\,z - 13)\,y'(z) - 2\,y(z) = 0 ,$$

et

$$(n^3 + 4\,n^2 + 5\,n - 2)\,U_n - (2\,n^3 + 15\,n^2 + 26\,n + 13)\,U_{n+1} + (n^3 + 11\,n^2 + 26\,n + 16)\,U_{n+2} = 0 .$$

Chapitre 3

Simplification

3.1 Somme et produit de séries formelles

Soient $A(z)$ et $B(z)$ deux séries formelles :

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{n\geq 0} a_n\, z^n, \\ B(z) &= \sum_{n\geq 0} b_n\, z^n. \end{aligned}$$

On définit la somme et le produit de deux séries par :

$$\begin{aligned} A(z)+B(z) &:= \sum_{n\geq 0} (a_n+b_n)\, z^n \ , \\ A(z)\cdot B(z) &:= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} (a_k\, b_{n-k}) \right) z^n \ . \end{aligned}$$

Théorème 3.1 *Si $f(z)$ et $g(z)$ sont des séries, solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux, alors $f(z)+g(z)$ et $f(z)\cdot g(z)$ sont également solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux.*

Démonstration — Considérons les équations différentielles linéaires — d'ordre minimal — satisfaites par les séries f et g :

$$\begin{aligned} a_k(z)\, f^{(k)}(z) + \cdots + a_0(z)\, f(k) &= 0\ , \\ b_p(z)\, g^{(p)}(z) + \cdots + b_0(z)\, g(k) &= 0\ . \end{aligned}$$

On appelle F (respectivement G), l'espace vectoriel (de dimension k (respectivement p)) engendré par les dérivées successives de f (respectivement g) :

$$F := \bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbb{K}(z)\cdot f^{(i)}(z)\ , \qquad G := \bigoplus_{j=0}^{p-1} \mathbb{K}(z)\cdot g^{(j)}(z)\ .$$

- Soit $h = f+g$. Les dérivées de h appartiennent à $F+G$. Cet espace vectoriel est de dimension au plus $k+p$, donc $\boldsymbol{f+g}$ est solution d'une équation différentielle linéaire de degré au plus $k+p$;

- De même : $\forall n$, $(f \cdot g)^{(n)}$ appartient au produit tensoriel de f et g. C'est une combinaison linéaire de $f^{(i)}(z)\, g^{(j)}(z)$ pour $0 \leq i < k$ et $0 \leq j < p$, donc $\boldsymbol{(f \cdot g)}$ est solution d'une équation différentielle linéaire de degré au plus $k \cdot p$.

Exemple 13 *Soit $\boldsymbol{y(z)}$ une série vérifiant*

$$y''(z) + y(z) = 0 \ . \tag{3.1}$$

On cherche à déterminer une équation différentielle vérifiée par $f(z) = \boldsymbol{y(z)^2}$. Ici, $F = < y, y' >$, donc $F \otimes F = < y^2, y\, y', y'\, y, y'^2 > = < y^2, y\, y', y'^2 >$. L'ordre de la récurrence que l'on cherche, est donc au plus 3.

Les deux premières dérivations de f donnent :

$$\begin{aligned} f'(z) &= (y^2(z))' = 2\, y(z)\, y'(z) \ , \\ f''(z) &= 2\, {y'}^2(z) + 2\, y(z)\, y''(z) \ . \end{aligned}$$

La dernière égalité peut se simplifier à l'aide de (3.1) :

$$f''(z) = 2\, {y'}^2(z) - 2\, y^2(z) \ .$$

De même, la troisième dérivation donne :

$$\begin{aligned} f'''(z) &= 4\, y'(z)\, y''(z) - 4\, y(z)\, y'(z) \ , \\ &= -8\, y(z)\, y'(z) \ . \end{aligned}$$

Finalement, on trouve une relation de dépendance linéaire entre les dérivées successives de f : $f'''(z) + 4\, f'(z) = 0$. C'est une équation différentielle linéaire de degré 2 :

$$f''(z) + 4\, f(z) = 0 \ .$$

3.2 Somme et produit de suites

Théorème 3.2 *Si (U_n) et (V_n) sont solutions de récurrences linéaires à coefficients polynomiaux, alors les suites $(U_n + V_n)$ et $(U_n \cdot V_n)$ sont également solutions de récurrences linéaires à coefficients polynomiaux.*

Démonstration — Considérons les équations de récurrence — d'ordre minimal — satisfaitent par les suites U et V :

$$\begin{aligned} a_k(n)\, U_{n+k} + \cdots + a_1(n)\, U_{n+1} + a_0(n)\, U_n &= 0 \ , \\ b_p(n)\, V_{n+p} + \cdots + b_1(n)\, V_{n+1} + b_0(n)\, V_n &= 0 \ . \end{aligned}$$

De façon analogue à la démonstration du théorème 3.1, on appelle F (respectivement G), l'espace vectoriel (de dimension k (respectivement p) engendré par les décalées successives de U_n (respectivement V_n) :

$$F := \bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbb{K}(n) \cdot (U_{n+i}) \ , \qquad G := \bigoplus_{j=0}^{p-1} \mathbb{K}(n) \cdot (V_{n+i}) \ .$$

Ainsi, les suite $\boldsymbol{U_n + V_n}$ et $\boldsymbol{U_n \cdot V_n}$ sont solutions d'équations de récurrences linéaires de degré au plus $k + p$ et $k \cdot p$.

Exemple 14 (Identité de Cassini) *On considère la suite de* ***Fibonacci****, (cf exemple 7). On cherche une récurrence satisfaite par*

$$\boldsymbol{U_n = F_{n+2}\, F_n - F_{n+1}^2} \ .$$

En réduisant F_{n+i} *par* $F_{n+i-1} + F_{n+i-2}$*, on a :*

$$\begin{aligned}
U_n &= (F_{n+1} + F_n)\, F_n - F_{n+1}^2 \\
&= F_{n+1}\, F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 \ , \\
U_{n+1} &= F_{n+2}\, F_{n+1} + F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 \\
&= (F_{n+1} + F_n)\, F_{n+1} + F_{n+1}^2 - (F_{n+1} + F_n)^2 \\
&= F_{n+1}^2 + F_n\, F_{n+1} + F_{n+1}^2 - F_{n+1}^2 - 2\, F_{n+1}\, F_n - F_n^2 \\
&= F_{n+1}^2 - F_n\, F_{n+1} - F_n^2
\end{aligned}$$

On obtient une relation de dépendance linéaire sur la suite U_n *:*

$$U_{n+1} + U_n = 0 \ .$$

D'après la valeur initiale $U_0 = 1$*, on a* $U_n = (-1)^n$*.*

3.3 Autres propriétés de clôture

Les propriétés de clôture enoncées ci-dessous sont des conséquences des théorèmes 3.1 et 3.2, et de l'équivalence entre les équations différentielles linéraires et les récurrences linéaires (*c.f.* proposition 2.3).

3.3.1 Convolution de suites

Le produit de convolution de deux suites (U_n) et (V_n) est donné par $\left(\sum_{0\le k\le n} U_k\, V_{n-k}\right) = (U * V)_n$.

Par définition, $\left(\sum_{n\ge 0} U_n\, z^n\right) \cdot \left(\sum_{n\ge 0} V_n\, z^n\right) = \sum_{n\ge 0} (U * V)_n\, z^n$.

Théorème 3.3 *Le produit de convolution de deux suites, est une suite satisfaisant une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux.*

Exemple 15 *Soient les deux suites* $U_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2\, n!}$ *et* $V_n = \dfrac{1}{n!}$*. Elles vérifient les équations de récurrence suivantes :*

$$\begin{cases} (n+1)\,(n+2)\, U_{n+2} - U_n = 0 \ , \\ (n+1)\, V_{n+1} - V_n = 0 \ . \end{cases}$$

Soient $A(z) = \sum_k U_k\, z^k = \sum_k \dfrac{1 + (-1)^k}{2\, k!}\, z^k = cosh(z)$ *et* $B(z) = \sum_k V_k\, z^k = \dfrac{1}{k!}\, z^k = exp(z)$*, ces séries vérifient les équations différentielles suivantes (obtenues à partir des équations précédentes) :*

$$\begin{cases} A''(z) - A(z) = 0 \ , \\ B'(z) - B(z) = 0 \ . \end{cases}$$

Le théorème 3.1 implique que la série $C(z) = A(z) \cdot B(z)$ *est également solution d'une équation différentielle :*

$$C''(z) - 2\, C'(z) = 0 \ ,$$

alors, le produit $\boldsymbol{W_k}$ *de convolution des deux suites* (U_n) *et* (V_n) *vérifie la récurrence associée à l'équation différentielle satisfaite par* $C(z)$ *:*

$$(n+1)\, W_{n+1} - 2\, W_n = 0 \ . \tag{3.2}$$

On trouve de façon évidente la solution hypergéométrique $W_n = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$*. On a donc démontrer automatiquement l'identité suivante :*

$$\sum_{0 \le k \le n} \frac{1+(-1)^k}{2\,k!} \, \frac{1}{(n-k)!} = \frac{2^n}{2\,n!} \ .$$

Cette identité se vérifie aisément :

$$\begin{aligned}
W_n &= \sum_{k=0}^{n} U_k\, V_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1+(-1)^k}{2\,k!} \, \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{2\,n!} \sum_{k=0}^{n} (1+(-1)^k) \binom{n}{k} \\
&= \frac{1}{2\,n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \right) = \frac{1}{2\,n!}\,(2^n + 0) \\
&= \frac{2^n}{2\,n!}
\end{aligned}$$

3.3.2 Produit de Hadamard

Soient deux séries $F(z) = \sum_{n \ge 0} f_n\, z^n$ et $G(z) = \sum_{n \ge 0} g_n\, z^n$ solutions d'équations différentielles linéaires, alors le produit de Hadamard

$$F(z) \odot G(z) = \sum_{n \ge 0} f_n\, g_n\, z^n$$

est également solution d'une équation différentielle linéaire.

Exemple 16 *Soient* $F(z)$ *et* $G(z)$ *deux séries vérifiant les deux équations différentielles suivantes :*

$$\begin{aligned}
z^2\, F'(z) + 4\, F(z) &= 0 \ , \\
(z+2)\, G'(z) + G(z) &= 0 \ .
\end{aligned}$$

Les récurrences associées sont :

$$\begin{aligned}
4\, f_{n+1} + n\, f_n &= 0 \ , \\
2\, g_{n+1} + g_n &= 0 \ .
\end{aligned}$$

On trouve aisément la récurrence satisfaite par la suite $h_n = f_n\, g_n$ *:*

$$8\, h_{n+1} - n\, h_n = 0 \ .$$

Cette dernière équation donne l'équation différentielle linéaire satisfaite par $H(z) = \sum_{n \ge 0} f_n\, g_n\, z^n$ *:*

$$z^2\, H'(z) + (z-8)\, H(z) = 0 \ .$$

3.3.3 Transformée de Laplace formelle

La transformée de Laplace est définie par :

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty e^{-t/z} \, f(t) dt \ .$$

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \, z^n$, on a $\mathcal{L}(f)(z) = z \sum_{n\geq 0} f_n \, n! \, z^n$.
Si $f(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire, alors la transformée est aussi solution d'une équation différentielle.

Exemple 17 *Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \, z^n$ une série vérifiant l'équations différentielle suivante :*

$$(z-1) \, f'(z) + (k-1) \, f(z) = 0 \ .$$

La récurrence associée est :

$$(n+1) \, f_{n+1} - (n+1-k) \, f_n = 0 \ .$$

On détermine l'expression de f_n :

$$f_n = \frac{k! \, (n-k)!}{n!} \ ,$$

on pose :

$$g_n = f_n \, n! = k! \, (n-k)! \ ,$$

on trouve aisément la récurrence satisfaite par cette suite hypergéométrique :

$$g_{n+1} - (n+1-k) \, g_n = 0 \ ,$$

dont l'équation différentielle associée est :

$$z^2 \, g'(z) + (z - z \, k - 1) \, g(z) = 0 \ .$$

Il reste maintenant à déterminer l'équation différentielle vérifié par la série $h(z) = zg(z)$. La dérivation donne :

$$\begin{aligned}
h'(z) &= g(z) + z \, g'(z) \ , \\
z \, h'(z) &= z \, g(z) + z^2 \, g'(z) = 0 \ , \\
z \, h'(z) &= z \, g(z) - (z - z \, k - 1) \, g(z) \ , \\
z \, h'(z) &= z \, k \, g(z) + g(z) \ , \\
z \, h'(z) &= k \, h(z) + g(z) \ , \\
z^2 \, h'(z) &= z \, k \, h(z) + z \, g(z) \ , \\
z^2 \, h'(z) &= z \, k \, h(z) + h(z) \ ,
\end{aligned}$$

$$z^2 \, h'(z) - (z \, k + 1) \, h(z) = 0 \ .$$

Cette équation différentielle linéaire est satisfaite par la transformée de Laplace de f, c'est-à-dire par $h(z) = z \sum_{n\geq 0} f_n \, n! \, z^n$.

3.3.4 Transformée inverse de Laplace (transformée de Borel)

$$\sum_{n\geq 0} A_n \, z^n \longrightarrow \sum_{n\geq 0} A_n \, \frac{z^n}{n!}$$

Exemple 18 *Soit* $f(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2\,n}{n}\, z^n$ *une série vérifiant l'équations différentielle suivante :*

$$(z-1)\, f'(z) + (k-1)\, f(z) = 0\ .$$

On trouve aisément la récurrence satisfaite par la suite hypergéométrique $g_n = \frac{f_n}{n!} = \frac{(2\,n)!}{(n!)^3}$ *:*

$$(n+1)^2\, g_{n+1} - (4\,n+2)\, g_n = 0\ ,$$

dont l'équation différentielle associée est :

$$z\, g''(z) - (4\,z+1)\, g'(z) - 2\, g(z) = 0\ .$$

Cette équation différentielle linéaire est satisfaite par la transformée de Borel de g*, c'est-à-dire par* $g(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f_n}{n!}\, z^n$.

3.4 Fonctions algébriques

Définition 15 *Soit une fonction* $y(z)$ *et un polynôme* $P \in \mathbb{K}[u,z]$*. On dira que* $P(y(z),z)$ *est une fonction algébrique.*

Exemple 19 *Série génératrice des nombres de Motzkin*

$$P(y(z),z) = z^2\, y^2(z) + z\, y(z) - y(z) + 1 = 0\ .$$

Théorème 3.4 *Une fonction algébrique est D-finie.*

Démonstration — On considère l'équation algébrique suivante :

$$P(u,z) = 0 \qquad d_u\, P = D\ . \tag{3.3}$$

où la notation $d_u\, P$ correspond au degré de P en u.

La dérivation de cette équation donne :

$$P'_z(u,z) + P'_u(u,z)\, y' = 0\ . \tag{3.4}$$

Soit y une solution de l'équation algébrique (3.3), on a donc :

$$P(y,z) = 0\ , \tag{3.5}$$
$$P'_z(y,z) + P'_u(y,z)\, y' = 0\ . \tag{3.6}$$

Si P est un polynôme premier, alors il existe $U(u,z), V(u,z) \in \mathbb{K}(z)[u]$ tels que :

$$U(u,z)\, P'_u(u,z) + V(u,z)\, P(u,z) = 1\ , \tag{3.7}$$

avec P et P'_u premiers entre eux.

Cette dernière égalité s'écrit pour la solution particulière y :

$$U(y,z)\, P'_u(y,z) + V(y,z)\, P(y,z) = 1\ ,$$

et se simplifie à l'aide de (3.5) et (3.6) :

$$U(y,z)\, P'_u(y,z) = 1\ ,$$

$$-U(y,z)\, P'_z(y,z) = y'\ .$$

Or la division euclidienne de $-U(u,z)\,P'_z(u,z)$ par $P(u,z)$ est de la forme :

$$-U(u,z)\,P'_z(u,z) = A_1(u,z)\,P(u,z) + B_1(u,z)$$

ce qui s'écrit pour la solution y :

$$y' = A_1(y,z)\,P(y,z) + B_1(y,z)\ ,$$

et après simplification

$$\boldsymbol{y' = B_1(y,z)} \qquad \text{avec } \boldsymbol{d_u\ B_1 < D}\ .$$

Dérivons une seconde fois :

$$y'' = B'_{1z}(y,z) + B'_{1u}(y,z)\,y'\ ,$$
$$y'' = B'_{1z}(y,z) + B'_{1u}(y,z)\,B_1(y,z)\ ,$$

or

$$B'_{1u}(u,z) + B'_{1u}(u,z)\,B_1(u,z) = A_2(u,z)\,P(u,z) + B_2(u,z)$$
$$y'' = A_2(y,z)\,P(y,z) + B_2(y,z)$$
$$\boldsymbol{y'' = B_2(y,z)} \qquad \text{avec } \boldsymbol{d_u\ B_2 < D}$$

En itérant :

$$\boldsymbol{y^{(i)} = B_i(y,z)} \qquad \text{avec } \boldsymbol{d_u\ B_i < D}$$

En posant $B_0(u,z) = u$, on a finalement :

$$\begin{array}{rcl} y & = & B_0(y,z)\ , \\ y' & = & B_1(y,z)\ , \\ y'' & = & B_2(y,z)\ , \\ \cdots & = & \cdots\ , \\ y^{(D)} & = & B_D(y,z)\ , \end{array}$$

où $B_i(u,z) \in \mathbb{K}(z)[u]$, explicitement $B_i(u,z) \in \sum_{0 \le j \le D-1} \mathbb{K}(z)\,u^j$. On a donc $D+1$ polynômes de degré inférieur à D, donc une dépendance linéaire entre ces polynômes :

$$\sum_{0 \le i \le D} C_i(z)\,B_i(y,z) = 0 \qquad \text{où } C_i(z) \text{ sont des coefficients rationnels.}$$

Ce qui implique :

$$\sum_{0 \le i \le D} C_i(z)\,y^{(i)} = 0\ .$$

En normalisant, on en déduit que la fonction y satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux en z.

Exemple 20 *Le nombre d'arbres binaires à n nœuds est appelé le n-ième nombre de Catalan. Considérons l'équation algébrique suivante, sur la série génératrice $B(z)$ de ces nombres de Catalan :*

$$z\,B^2(z) - B(z) - 1 = 0\ . \tag{3.8}$$

On cherche une équation différentielle satisfaite par $B(z)$;

$$\begin{array}{rcll} P(B,z) & = & B(z) - 1 - z\,B^2(z) = 0\ , & (3.9) \\ P'(B,z) & = & B'(z) - B^2(z) - 2\,z\,B(z)\,B'(z) = 0\ , & (3.10) \\ P'(B,z) & = & -B^2(z) + (1 - 2\,z\,B(z))\,B'(z) = 0\ , & (3.11) \\ P'(B,z) & = & P'_z(B,z) + P'_B(B,z)\,B'(z) = 0\ , & (3.12) \\ & & & (3.13) \end{array}$$

où

$$\begin{cases} P'_z(B,z) = -B^2(z) \ , \\ P'_B(B,z) = 1 - 2\,z\,B(z) \ . \end{cases}$$

La division euclidienne de $P(B,z)$ *par* $P'_B(B,z)$ *donne :*

$$B(z) - 1 - z\,B^2(z) = (1 - 2\,z\,B(z))\,Q(B,z) + R(B,z) \ ,$$

où

$$\begin{cases} Q(B,z) = (B(z)/2 - (1/4\,z)) \ , \\ R(B,z) = 1/4\,z - 1 \ . \end{cases}$$

L'équation (3.12) :

$$B'(z)\,P'_B(B,z) + P'_z(B,z) = 0 \ ,$$

s'écrit en multipliant par $Q(B,z)$ *puis en simplifiant :*

$$\begin{aligned} B'(z)\,P'_B(B,z)\,Q(B,z) + P'_z(B,z)\,Q(B,z) &= 0 \ , \\ B'(z)\,(-R(B,z)) + P'_z(B,z)\,Q(B,z) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Les étapes de calcul donnent (en utilisant (3.8)) :

$$\begin{aligned} B'(z)\,(1/4\,z - 1) &= (-B^2(z))\,(B(z)/2 - (1/4\,z)) \ , \\ B'(z)\,(1/4\,z - 1) &= \frac{1 - B(z)}{z}\,(B(z)/2 - (1/4\,z)) \ , \\ B'(z)\,(1/4\,z - 1) &= \frac{-2\,z\,B^2(z) + 2\,z\,B(z) + B(z) - 1}{4\,z^2} \ , \\ B'(z)\,(z - 4\,z^2) &= -2\,z\,B^2(z) + 2\,z\,B(z) + B(z) - 1 \ , \\ B'(z)\,z\,(1 - 4\,z) &= -2\,z\,\frac{B(z) - 1}{z} + 2\,z\,B(z) + B(z) - 1 \ , \\ B'(z)\,z\,(1 - 4\,z) &= -2\,B(z) + 2 + 2\,z\,B(z) + B(z) - 1 \ , \end{aligned}$$

$$B'(z)\,z\,(1 - 4\,z) = B(z)\,(2\,z - 1) + 1 \ ,$$

$$B'(z)\,z\,(1 - 4\,z) - B(z)\,(2\,z - 1) - 1 = 0 \ . \tag{3.14}$$

De plus, on peut déterminer une forme close des nombres de Catalan. En effet, le développement en série sécrit :

$$\begin{aligned} B(z) &= \sum_{k \geq 0} C_k\,z^k \ , \\ B'(z) &= \sum_{k \geq 0} (k+1)\,C_{k+1}\,z^k \ . \end{aligned}$$

L'identification du coefficient de z^{k+1} *dans l'équation (3.14) nous donne :*

$$\begin{aligned} (k+1)\,C_{k+1} - 4\,k\,C_k &= 2\,C_k - C_{k+1} \ , \\ (k+2)\,C_{k+1} &= (4\,k - 2)\,C_k \ . \end{aligned}$$

Finalement :

$$C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2\,k}{k} \ .$$

Partie II

Solutions de récurrences linéaires

Chapitre 4

Solutions polynomiales de récurrences linéaires

$$a_k(n)\, U_{n+k} + \cdots + a_1(n)\, U_{n+1} + a_0(n)\, U_n = f(n) \qquad \text{où } a_i(n), f(n) \in \mathbb{K}[n] \tag{4.1}$$

Pour déterminer les solutions polynomiales de (4.1), on décompose le problème en deux étapes :

- on cherche une borne d sur le degré des solutions polynomiales de (4.1) ;
- étant donné d, on détermine les polynômes solutions de (4.1) de degré au plus d, par la méthode des coefficients indéterminés.

4.1 Description de l'algorithme

Pour trouver une borne d, écrivons la récurrence (4.1) sous la forme :

$$L\, U_n = f(n) \ ,$$

avec $L = \sum_{i=0}^{k} a_i\, N^i$ où N est l'opérateur de décalage décrit en (8.9) page 46.
Nous pouvons maintenant écrire cette récurrence en termes de l'opérateur différence $\Delta = N - 1$:

$$L = \sum_{i=0}^{k} a_i\, (\Delta + 1)^i = \sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \Delta^j = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} a_i \binom{i}{j} \Delta^j = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j}^{k} a_i \binom{i}{j} \Delta^j = \sum_{j=0}^{k} b_j\, \Delta^j$$

en posant $b_j = \sum_{i=j}^{k} a_i \binom{i}{j}$.

Toute solution polynomiale de (4.1) est de la forme $U_n = \sum_{i=0}^{d} u_i\, n^i$.
Déterminons le terme de tête de $L\, U_n$:

- Tout d'abord, notons la relation suivante :

$$\Delta^j n^p = p^{\underline{j}}\, n^{p-j} + O(n^{p-j-1}) \tag{4.2}$$

- $L\,U_n = \sum_{j=0}^{k} b_j\,\Delta^j \sum_{i=0}^{d} u_i\,n^i$
- Le terme de tête de $L\,U_n$ est donc celui de l'expression suivante :

$$\sum_{j=0}^{k} b_j\,\Delta^j\,u_d\,n^d\ ,$$

qui se simplifie à l'aide de (4.2) :

$$\sum_{j=0}^{k} b_j\,u_d\,d^{\underline{j}}\,n^{d-j}\ .$$

- Dans cette somme, uniquement b_j et n^{d-j} dépendent de n, ainsi :

$$\deg\,(L\,U_n) \le \max\{(\deg b_j) + d - j \text{ où } 0 \le j \le k\}\ ,$$

et en posant :

$$B = \max\{(\deg b_j) - j \text{ où } 0 \le j \le k\} \tag{4.3}$$

on obtient :

$$\deg\,(L\,U_n) \le d + B\ .$$

- Si $d + B < 0$, alors $\boldsymbol{d \le -B - 1}$. Sinon, on distingue deux cas :
  - soit $\deg\,(L\,U_n) = d + B$, et alors $\boldsymbol{d = (\deg f) - B}$.
  - soit $\deg\,(L\,U_n) < d + B$, ce qui implique que le coefficient de $L\,U_n$ en n^{d+B} s'annule :

$$u_d \sum_{\substack{0 \le j \le k \\ (\deg b_j) - j = B}} \mathsf{lc}(b_j)\,d^{\underline{j}} = 0\ ,$$

donc d est une racine du polynôme :

$$\alpha(x) = \sum_{\substack{0 \le j \le k \\ (\deg b_j) - j = B}} \mathsf{lc}(b_j)\,x^{\underline{j}} \tag{4.4}$$

En résumé :

Proposition 4.1 *Supposons que $L\,U_n = f(n)$ où U_n et $f(n)$ sont des polynômes en n, et notons $L = \sum_{i=0}^{k} a_i\,N^i$, $b_j = \sum_{i=0}^{j} a_i \binom{i}{j}$. De plus, soit $D = \max\{x \in \mathbb{N}$ t.q. $\alpha(x) = 0\}$ où $\alpha(x)$ est défini par (4.4). Alors, $\deg U_n \le d$, où*

$$d = \max\{(\deg f) - B, -B - 1, D\}$$

avec B défini par (4.3).

4.2 Quelques exemples

Exemple 21

$$\boldsymbol{3\,U_{n+2} - 2\,U_{n+1} + U_n = 0}\ . \tag{4.5}$$

Ici, $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = 3$ donc $b_0 = 2, b_1 = 4, b_2 = 3$ donc $B = 0$. De plus, $\alpha(x) = 2$ donc $D = 0$. On obtient $d = 0$, mais aucun polynome non nul de degré 0 n'est solution de l'équation (4.5). Il n'y a donc aucune solution polynomiale — autre que la solution nulle — pour cette équation.

Exemple 22

$$\mathbf{3\,U_{n+2} - 2\,U_{n+1} - \ U_n = 0}\ . \tag{4.6}$$

De façon analogue, on trouve $b = 0$, et $\alpha(x) = 0$, donc les racines de ce polynôme sont quelconques et D a pour valeur l'infini ($D = \max\{x \in \mathbb{N}, \alpha(x) = 0\} = \infty$). On choisit donc expérimentalement $d = 5$ et finalement les solutions polynomiales de (4.6) sont de la forme $\boldsymbol{U_n = x_0}$ pour toute constante $x_0 \in \mathbb{K}$.

Exemple 23

$$\mathbf{3\,U_{n+2} - n\,U_{n+1} + (n-1)\,U_n = 0}\ . \tag{4.7}$$

Ici, $a_0 = n-1, a_1 = -n, a_2 = 3$ donc $b_0 = 2, b_1 = -n+6, b_2 = 3$ donc $B = 0$. De plus, $\alpha(x) = 2 - x$ donc $D = 2$.

Finalement $d = 2$, les solutions polynômiales de (4.7) sont donc de la forme an^2+bn+c. L'équation de récurrence permet de déterminer complètement la forme générale de la solution :

$$\begin{aligned} 3\,(a\,(n+2)^2 + b\,(n+2) + c) - n\,(a\,(n+1)^2 + b\,(n+1) + c) & \\ +(n-1)\,(a\,n^2 + b\,n + c) &= 0 \end{aligned}$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\quad & (11\,a + b)\,n + 12\,a + 6\,b + 2\,c = 0\ , \\ & b = -11\,a\ , \qquad c = 27\,a\ . \end{aligned}$$

Et finalement : $U_n = a\,n^2 - 11\,a\,n + 27\,a = a\,(n^2 - 11\,n + 27)$
Les solutions polynomiales de (4.7) sont de la forme $\mathbf{C^{te}}\ \boldsymbol{(n^2 - 11\,n + 27)}$.

4.3 Exercices

Déterminer les solutions polynomiales des équations de récurrences linéaires suivantes :

- $3\,U_{n+2} - 2\,U_{n+1} - U_n = -1$,
- $(n+2)\,V_{n+2} - (3\,n+8)\,V_{n+1} + 2\,(n+3)\,V_n = 0$,
- $(2\,n+1)\,P_{n+3} - (2\,n+3)\,P_{n+2} + (2\,n-3)\,P_{n+1} - (2\,n-1)\,P_n = 3$.

Chapitre 5

Solutions rationnelles de récurrences linéaires

$$a_k(n)\, U_{n+k} + \cdots + a_1(n)\, U_{n+1} + a_0(n)\, U_n = f(n) \qquad \text{où } a_i(n), f(n) \in \mathbb{K}[n] \tag{5.1}$$

L'algorithme proposé dans [1] permet de déterminer les solutions rationnelles $U_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ de (5.1).

5.1 Description de l'algorithme

La méthode consiste à se ramener à une résolution en solutions polynomiales après avoir déterminé le dénominateur commun des solutions rationnelles de (5.1).

Pour cela, on pose $A(n) = a_k(n-k)$ et $B(n) = a_0(n)$, puis on détermine explicitement le polynôme $Q(n)$ par l'algorithme suivant :

Algorithme 2 (Abramov)

- *initialisation du polynôme* $Q(n) := 1$ *;*
- *calcul du résultant des deux polynômes* $A(n)$ *et* $B(n+p)$ *par rapport à la variable* n *:* $R(p) := \mathrm{Res}_n(A(n), B(n+p))$ *;*

  Définition 16 *Soient* U *et* V *deux polynômes (donnés sous forme factorisée) :*

  $$U(x) = u_n \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)\ , \qquad V(x) = v_m \prod_{i=1}^{m}(x-\beta_i)\ ,$$

  le résultant (par rapport à la variable x*) de ces polynômes est défini par :*

  $$\mathrm{Res}_x(U(x), V(x)) = u_n^m\, v_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j)\ .$$

  Par conséquent, le résultant est un polynôme qui s'annule si les deux polynômes U *et* V *ont des racines communes.*

- *si* $R(p)$ *a des racines entières positives, alors*
  - *Soit* M *la plus grande racine entière positive de* $R(p)$*.*
  - *Pour* $i = 0, 1, \ldots, M$*, faire*
    - $d(n) := \mathrm{pgcd}(A(n), B(n+i))$,

- $A(n) := A(n)/d(n)$,
- $B(n) := B(n)/d(n-i)$,
- $Q(n) := Q(n)\, d(n)\, d(n-1) \cdots d(n-i)$,

- *retour* $Q(n)$.

□

Une fois le dénominateur $Q(n)$ déterminé, il reste à expliciter le numérateur $P(n)$ de U_n. Pour cela, il suffit de substituer U_n par $\frac{P(n)}{Q(n)}$ dans (5.1), mettre au même dénominateur et de s'intéresser au numérateur.

$$a_k(n)\, \frac{P(n+k)}{Q(n+k)} + \cdots + a_1(n)\, \frac{P(n+1)}{Q(n+1)} + a_0(n)\, \frac{P(n)}{Q(n)} = f(n)$$

$$\frac{a_k(n)\, P(n+k) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{k} Q(n+i) + \cdots + a_1(n)\, P(n+1) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{k} Q(n+i) + a_0(n)\, P(n) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq 0}}^{k} Q(n+i)}{\prod_{i=0}^{k} Q(n+i)} = f(n)$$

et finalement :

$$a_k(n) P(n+k) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{k} Q(n+i) + \cdots + a_1(n) P(n+1) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{k} Q(n+i) + a_0(n) P(n) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq 0}}^{k} Q(n+i) = f(n) \prod_{i=0}^{k} Q(n+i)$$

L'unique inconnue est alors le polynôme P. Il reste donc à déterminer les solutions polynomiales d'un équation de récurrence à coefficients polynomiaux (ce point est discuté au chapitre **4**).

5.2 Quelques exemples

Exemple 24

$$\boldsymbol{(n+2)^2\, U_{n+2} - (n+1)\, (3\, n+8)\, U_{n+1} + 2\, n\, (n+3)\, U_n = 0} \; . \tag{5.2}$$

$A(n) = 2\, n\, (n+3)$ et $B(n) = n^2$ On obtient $M = 0$ et $Q(n) = n$. En substituant U_n par $P(n)/n$, on obtient :

$$(n+2)\, P(n+2) - (3\, n+8)\, P(n+1) + 2\, (n+3)\, P(n) = 0 \; .$$

Or les solutions polynomiales de cette dernière équation sont du type $P(n) = \mathrm{C^{te}}$, les solutions rationnelles de l'équation initiale (5.2) sont donc de la forme $\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{C^{te}}}{n}}$.

Exemple 25

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{(n+4)\, (2\, n+1)\, (n+2)\, U_{n+3} - (2\, n+3)\, (n+3)\, (n+1)\, U_{n+2}} \\ &\boldsymbol{+n\, (n+2)\, (2\, n-3)\, U_{n+1} - (n-1)\, (2\, n-1)\, (n+1)\, U_n = 0} \; . \end{aligned}$$

$A(n) = (n+1)\, (n-1)\, (2\, n-5)$ et $B(n) = -(n-1)\, (2\, n-1)\, (n+1)$. On obtient $M = 2$.

Pour $i = 0$, on a : $d(n) = n^2 - 1$, et pour $i = 1, 2$, on a $d(n) = 1$. Donc : $Q(n) = n^2 - 1$. En posant $U_n = P(n)/(n^2 - 1)$, on obtient :

$$(2\, n+1)\, P(n+3) - (2\, n+3)\, P(n+2) + (2\, n-3)\, P(n+1) - (2\, n-1)\, P(n) = 0 \; .$$

Or les solutions polynomiales de cette dernière équation sont du type $P(n) = \mathrm{C^{te}}\, (2n-3)$, les solutions rationnelles de l'équation initiale (5.3) sont donc de la forme $\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{C^{te}}\, (2\, n-3)}{n^2-1}}$.

Exemple 26

$$\boldsymbol{(n+3)\,(n+2)\,(n^2+6\,n+4)\,U_{n+2} - (n+1)\,(3\,n^3+27\,n^2+64\,n+48)\,U_{n+1} + 2\,n^2\,(n^2+8\,n+11)\,U_n = 0}\ .$$

$A(n) = (n+1)\,n\,((n-2)^2+6\,(n-2)+4)$ et $B(n) = 2\,n^2\,(n^2+8\,n+11)$. On obtient $M=1$.
Pour $i=0$, on a : $d(n) = n$, et pour $i=1$, on a $d(n) = n+1$. Donc : $Q(n) = n^2\,(n+1)$. En posant $U_n = P(n)/(n^2\,(n+1))$, on obtient :

$$\frac{(n+3)\,(n+2)\,(n^2+6\,n+4)}{(n+2)^2\,(n+3)}P(n+2) - \frac{(n+1)\,(3\,n^3+27\,n^2+64\,n+48)}{(n+1)^2\,(n+2)}P(n+1) + 2\frac{n^2\,(n^2+8\,n+11)}{n^2\,(n+1)}P(n) = 0\ ,$$

$$\frac{(n^2+6\,n+4)}{(n+2)}\,P(n+2) - \frac{(3\,n^3+27\,n^2+64\,n+48)}{(n+1)\,(n+2)}\,P(n+1) + 2\,\frac{(n^2+8\,n+11)}{(n+1)}\,P(n) = 0\ ,$$

$$\frac{(n+1)\,(n^2+6\,n+4)\,P(n+2) - (3\,n^3+27\,n^2+64\,n+48)\,P(n+1) + 2\,(n+2)\,(n^2+8\,n+11)\,P(n)}{(n+1)\,(n+2)} = 0\ ,$$

On s'intéresse plus particulièrement au numérateur :

$$(n^3+7\,n^2+10\,n+4)\,P(n+2) - (3\,n^3+27\,n^2+64\,n+48)\,P(n+1) + (2\,n^3+20\,n^2+54\,n+44)\,P(n) = 0\ ,$$

Les solution polynomiales de cette dernière équation sont du type $P(n) = \mathrm{C^{te}}$. Alors, les solutions rationnelles de l'équation (5.3) sont $\dfrac{\mathbf{C^{te}}}{\boldsymbol{n^2\,(n+1)}}$.

5.3 Exercices

Déterminer les solutions rationnelles des équations de récurrences linéaires suivantes :

- $(n+4)\,(2\,n+1)\,(n+2)\,U_{n+3} - (2\,n+3)\,(n+3)\,(n+1)\,U_{n+2}$
  $+\,n\,(n+2)\,(2\,n-3)\,U_{n+1} - (n-1)\,(2\,n-1)\,(n+1)\,U_n = 3\ ,$
- $(n+4)\,V_{n+2} + V_{n+1} - (n+1)\,V_n = 0\ ,$
- $-(n+2)^2\,B_{n+2} + (2n+3)\,(n-m+3)\,B_{n+1} - (n-m+2)\,(n-m+3)\,B_n = (n-m+3)\,(n-m+2)\ .$

Chapitre 6

Solutions hypergéométriques de récurrences linéaires

Etant donné une équation de récurrence à coefficients polynomiaux,

$$a_k(n)\,U_{n+k} + \cdots + a_1(n)\,U_{n+1} + a_0(n)\,U_n = f(n) \qquad \text{où } a_i(n), f(n) \in \mathbb{K}[n] \ , \tag{6.1}$$

on s'intéresse maintenant aux solutions hypergéométriques de cette équation.

6.1 Cas homogène : $f(n) = 0$

Soit (U_n) une solution hypergéométrique de (6.1), alors il existe une suite rationnelle $S(n)$ telle que $U_{n+1} = S(n)\,U_n$. On a donc $U_{n+i} = S(n+i-1)\ \cdots\ S(n)\,U_n$. En substituant chacun des U_j par ce développement et en simplifiant par U_n :

$$a_k(n)\,S(n+k-1)\ \cdots\ S(n) + \cdots + a_1(n)\,S(n+1)\,S(n) + a_0(n) = 0 \ . \tag{6.2}$$

On peut montrer [6] qu'il existe une décomposition suivante pour $S(n)$:

$$S(n) = \frac{U_{n+1}}{U_n} = z\,\frac{A(n)}{B(n)}\,\frac{C(n+1)}{C(n)} \ , \tag{6.3}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{pgcd}(A(n), B(n+k)) &= 1 \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,\\
\mathrm{pgcd}(A(n), C(n)) &= 1 \ ,\\
\mathrm{pgcd}(B(n), C(n+1)) &= 1 \ ,
\end{aligned}$$

A, B, C, polynômes unitaires.

Cette décomposition (qui est étudiée plus en détail dans le chapitre **8** pour l'algorithme de Gosper) permet d'écrire (après simplification) la récurrence (6.2) sous la forme :

$$\begin{aligned}
&z^k\,a_k(n)\,A(n+k-1)\,A(n+k-2)\cdots A(n)\,C(n+k)\\
&+ z^{(k-1)}\,B(n+k-1)\,A(n+k-2)\cdots A(n)\,C(n+k-1)\\
&+ \cdots + \ a_0(n)\,B(n+k-1)\cdots B(n)\,C(n) = 0
\end{aligned}$$

L'algorithme suivant permet de déterminer — à partir de cette récurrence —, les solutions $S(n)$ de (6.2), et ainsi toutes les solutions hypergéométriques U_n de (6.1).

Remarque : U_n sera décrite comme un produit : $U_n = \lambda \prod_{i=0}^{n-1} S(i)$.

Algorithme 3 (HYPER Petkovšek) *Pour tous les facteurs unitaires $A(n)$ de $a_0(n)$ et $B(n)$ de $a_k(n-k+1)$ faire*

- *poser* $M_i(n) = a_i(n) \prod_{j=0}^{i-1} A(n+j) \prod_{j=i}^{k-1} B(n+j)$ *pour* $i = 0, 1, \cdots, k$ *;*
- *soit* $p = \max\{\deg M_i(n)$ *pour* $i = 0, 1, \cdots, k\}$ *;*
- *soit* α_i *le coefficient de* n^p *de* $M_i(n)$ *pour* $i = 0, 1, \cdots, k$ *;*
- *pour tout* $z \in \mathbb{K}$ *et non nul, tel que* $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, z^i = 0$,

  si la récurrence

$$\sum_{i=0}^{k} z^i \, M_i(n) \, C(n+i) = 0$$

  a une solution polynomiale non nulle $C(n)$ *alors,*

$$S(n) = z \, \frac{A(n)}{B(n)} \, \frac{C(n+1)}{C(n)} \ .$$

  Retour une solution U_n *non nulle de* $U_{n+1} = S(n) \, U_n$. □

La solution générale de l'équation (6.1) est donc une combinaison linéaire des solutions hypergéométriques ainsi déterminées.

Exemple 27

$$(n+4) \, U_{n+2} + U_{n+1} - (n+1) \, U_n = 0 \ . \tag{6.4}$$

$a_0(n) = -(n+1)$ *et* $a_2(n-2+1) = n+3$

- *Posons* $A(n) = n+1$ *et* $B(n) = n+3$

$$z^2 \, (n+4) \, (n+2) \, (n+1) \, C(n+2) + z \, (n+4) \, (n+1) \, C(n+1) - (n+1) \, (n+4) \, (n+3) \, C(n) = 0 \ ,$$

après simplification, $\quad z^2 \, (n+2) \, C(n+2) + z \, C(n+1) - (n+3) \, C(n) = 0$.

ici $p = 1$ *d'où* $z^2 - 1 = 0$ *donc* $z = 1$ *ou* $z = -1$.
On cherche maintenant les solutions polynomiales de

$$z^2 \, (n+2) \, C(n+2) + z \, C(n+1) - (n+3) \, C(n) = 0 \ ,$$

respectivement pour $z = 1$ *et* $z = -1$ *:*

$$\begin{cases} C(n) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \ , \\ C(n) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \, (2\,n+3) \ . \end{cases}$$

Ainsi :

– *pour* $z = 1$, *l'équation (6.3) s'écrit :*

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{n+3} \, \frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}} \ ,$$

et finalement

$$U_n = \frac{\lambda}{(n+2) \, (n+1)} \ .$$

– *de même, pour $z = -1$:*

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = (-1)\,\frac{n+1}{n+3}\,\frac{\mathrm{C^{te}}\,(2\,n+5)}{\mathrm{C^{te}}\,(2\,n+3)}\ ,$$

$$U_n = \mu\,\frac{(-1)^n\,(2\,n+3)}{(n+2)\,(n+1)}\ .$$

- *Pour les autres couples $\{A(n), B(n)\}$ de facteurs moniques de $\{a_0(n), a_2(n-2+1)\}$, on ne trouve aucune solution non nulle.*

Donc la solution générale de l'équation (6.4) est :

$$\frac{\lambda}{(n+2)\,(n+1)} + \frac{\mu\,(-1)^n\,(2\,n+3)}{(n+2)\,(n+1)}\ ,$$

où λ et μ sont des constantes quelconques.

6.2 Cas inhomogène : $f(n) \neq 0$

On cherche une suite hypergéométrique U_n solution de (6.1) donc $f(n)$ doit être une combinaison linéaire de termes hypergéométriques. Par conséquent, f est également une expression hypergéométrique et en posant $U_n = R(n)\,f(n)$, la récurrence initiale s'écrit :

$$a_k(n)\,R(n+k)\,f(n+k) + \cdots + a_0(n)\,R(n)\,f(n) = f(n)\ ,$$

le problème revient à trouver une solution rationnelle $R(n)$ de cette dernière égalité (pour cela, *cf* algorithme d'Abramov chapitre **5**).

6.3 Extension : solutions alembertiennes

Définition 17 *Une suite u est **alembertienne** si elle se décompose de la façon suivante :*

$$u = h_1 \sum h_2 \sum \cdots \sum h_k\ ,$$

où $h_1, h_2, \ldots, h_k$ sont des termes hypergéométriques.

Exemple 28 (Dérangements) *Le nombre D_n de dérangements (permutations sans point fixe) d'un ensemble de n éléments satisfait la récurrence suivante :*

$$D_{n+2} - (n+1)\,D_{n+1} - (n+1)\,D_n = 0\ . \tag{6.5}$$

*L'algorithme **HYPER** trouve une solution hypergéométrique ($n!$) pour cette équation. (On peut aisément le vérifier.) On pose alors $D_n = n!\,U_n$ et l'on obtient l'équation :*

$$(n+2)!\,U_{n+2} - (n+1)\,(n+1)!\,U_{n+1} - (n+1)!\,U_n = 0\ ,$$

que l'on simplifie par $(n+1)!$:

$$(n+2)\,U_{n+2} - (n+1)\,U_{n+1} - U_n = 0\ .$$

On se ramène enfin à une équation aux différences en posant $V_n = U_{n+1} - U_n$:

$$\begin{aligned} ((n+2)\,U_{n+2} - (n+2)\,U_{n+1}) - ((n+1)\,U_{n+1} - (n+2)\,U_{n+1}) + U_n &= 0\ ,\\ (n+2)\,V_{n+1} + U_{n+1} - U_n &= 0\ , \end{aligned}$$

$$(n+2)\,V_{n+1} + V_n = 0 \ .$$

Ainsi, on trouve :

$$V_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \ , \qquad et \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \ .$$

Finalement, le nombre de dérangements d'un ensemble de n éléments est :

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \ .$$

Pour compléter, on énonce le théorème, puis la méthode générale permettant de déterminer les solutions alembertiennes d'une récurrence linéaire.

Théorème 6.1 *L'algorithme **HYPER**, couplé à la réduction d'ordre de la récurrence, permet de trouver toutes les solutions combinations linéaires de suites alembertiennes, c'est-à-dire de la forme :*

$$h_0(n) \sum_{k_0=a_0}^{n-1} h_1(k_0) \sum_{k_1=a_1}^{k_0-1} h_2(k_1) \cdots \sum_{k_p=a_p}^{k_{p-1}-1} h_{p+1}(k_p)$$

où les h_i sont hypergéométriques, et les a_i constantes.

Algorithme 4 (Petkovšek)

- *Soit $L\,U_n = a_k(n)\,U_{n+k} + \cdots + a_0(n)\,U_n$; appliquer **HYPER**. Si cet algorithme ne donne pas de solution, alors RETOUR "pas de solution d'Alembertienne", sinon : soit y une solution hypergéométrique ;*
- $\dfrac{y(n+1)}{y(n)} = r(n)$*, que l'on peut noter $(N - r(n))\,y(n) = 0$ où N est l'opérateur de décalage défini par l'action suivante : $N\,f(n,k) = f(n+1,k)$.*
  Décomposer l'opérateur L sous la forme $L = L_1\,(N - r(n))$;
- *Rappeler récursivement **HYPER** sur L_1. Soient $\{y_1, \cdots, y_k\}$ les solutions d'Alembertiennes de $L_1\,y_i(n) = 0$;*
- *Retour $(\{y, z_1, \cdots, z_k\})$, où $z_i(n) = y_i(n) \displaystyle\sum_{k=a}^{n-1} \frac{y_i(k)}{y(k+1)}$.*

□

Remarque 3 *On vérifie aisément la relation suivante :*

$$\begin{aligned}
z_i(n+1) &= y(n+1) \sum_{k=a}^{n-1} \frac{y_i(k)}{y(k+1)} + y(n+1)\,\frac{y_i(n)}{y(n+1)} \ , \\
&= y(n+1) \sum_{k=a}^{n-1} \frac{y_i(k)}{y(k+1)} + y_i(n) \ , \\
&= \frac{y(n+1)}{y(n)}\,y(n) \sum_{k=a}^{n-1} \frac{y_i(k)}{y(k+1)} + y_i(n) \ , \\
z_i(n+1) &= r(n)\,z_i(n) + y_i(n) \ .
\end{aligned}$$

Une autre extension de **HYPER** donnée par Petkovšek et Salvy [8] permet de trouver les solutions en séries hypergéométriques d'équations différentielles linéaires.

6.4 Exercices

Déterminer les solutions hypergéométriques des équations de récurrences linéaires suivantes :

- $(n+1)\,U_{n+1} - (4\,n+2)\,U_n = 0$,
- $(m+3)\,(m+2)\,V_{m+1} - 4\,(2\,m+3)\,(2\,m+1)\,V_m = 0$,
- $(n-1)\,W_{n+2} - (n^2+3\,n-2)\,W_{n+1} + 2\,n\,(n+1)\,W_n = 3$.

Partie III

Preuve d'identités hypergéométriques

Chapitre 7

Méthode de Sœur Céline

La notion de preuve automatique est apparue pour la première fois avec la thèse de Sœur Mary Celine Fasenmyer à l'université de Michigan en 1945. Elle a développé une méthode [7] pour déterminer des relations de récurrence satisfaites par des termes hypergéométriques. La technique est généralement assez lente en comparaison avec les nouvelles méthodes décrites dans le chapitre suivant. C'est pourquoi nous nous contenterons uniquement de présenter la méthode et de l'illustrer par un exemple sur une somme classique.

7.1 Présentation

Soit la série $a(n) = \sum_k F(n,k)$, où F est hypergéométrique en n et en k ($F(n+1,k)/F(n,k)$ et $F(n,k+1)/F(n,k)$ sont des fonctions rationnelles de n et k). L'algorithme permet de déterminer une formule de récurrence sur le sommant $F(n,k)$, de la forme :

$$\sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} c_{i,j}(n)\, F(n-j, k-i) = 0\ , \tag{7.1}$$

où les $c_{i,j}$ sont indépendants de k.
En sommant cette dernière égalité sur k, on obtient une récurrence sur la série :

$$\sum_{l=0}^{L} s_l(n)\, a(n+l) = 0\ . \tag{7.2}$$

7.2 Exemple

Posons

$$a(n) = \sum_k k \binom{n}{k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

et cherchons la récurrence satisfaite par $a(n)$. Pour cela, cherchons tout d'abord la récurrence satisfaite par le sommant

$$F(n,k) = k \binom{n}{k}\ .$$

La fonction F est une fonction à deux variables n et k, alors on cherche une récurrence de la forme :

$$p(n)\, F(n,k) + q(n)\, F(n+1,k) + r(n)\, F(n,k+1) + s(n)\, F(n+1,k+1) = 0\ , \tag{7.3}$$

où les coefficients p, q, r, s dépendent uniquement de n (et pas de k), ceci pour des raisons qui deviendront évidentes plus tard.

Pour trouver ces coefficients (s'ils existent), on divise (7.3) par $F(n,k)$. Ainsi :

$$p + q\,\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} + r\,\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} + s\,\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} = 0\ . \tag{7.4}$$

La fonction $F(n,k)$ est hypergéométrique, chaque rapport est donc une fonction rationnelle :

$$p + q\,\frac{n+1}{n+1-k} + r\,\frac{n-k}{k} + s\,\frac{n+1}{k} = 0\ .$$

Ainsi, toutes les factorielles ont disparu, il reste uniquement des fonctions rationnelles de n et k.

L'étape suivante est la transformation de cette dernière expression au même dénominateur. Sur notre exemple, le numérateur obtenu (après avoir rassemblé les puissances de k) donne l'égalité suivante :

$$k^2\,(r-p) + k\,(n\,(p+q-2\,r-s) + (p+q-r-s)) + (n^2\,(r+s) + n\,(r+2\,s) + s) = 0\ .$$

La récurrence (7.3) sera vérifiée uniquement si on peut déterminer p, q, r, n (où ces coefficients dépendent seulement de n), c'est-à-dire si le coefficient de chaque puissance de k est nul : cela donne un système de trois équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} r - p = 0\ , \\ n\,(p+q-2\,r-s) + (p+q-r-s) = 0\ , \\ n^2\,(r+s) + n\,(r+2\,s) + s = 0\ . \end{cases}$$

La résolution permet d'obtenir la récurrence désirée pour le sommant $F(n,k)$:

$$-\left(1+\frac{1}{n}\right)\,F(n,k) - \left(1+\frac{1}{n}\right)\,F(n,k+1) + F(n+1,k+1) = 0\ . \tag{7.5}$$

La dernière étape consiste à sommer (7.5) sur k, et **puisque les coefficients sont indépendants de k**, on obtient aisément :

$$-\left(1+\frac{1}{n}\right)\,a(n) - \left(1+\frac{1}{n}\right)\,a(n) + a(n+1) = 0\ ,$$

et finalement, la récurrence satisfaite par $a(n)$ est :

$$-2\,\frac{n+1}{n}\,a(n) + a(n+1) = 0 \qquad (n = 1, 2.....) \qquad \text{et} \qquad a(1) = 1\ ,$$

On obtient une forme close pour $a(n)$:

$$a(n+1) = 2\,\frac{n+1}{n}\,a(n) = 2^2\,\frac{n+1}{n}\,\frac{n}{n-1}\,a(n-1) = \cdots = 2^n\,(n+1)\,a(1)$$

$$a(n) = n\,2^{n-1}\ .$$

Bien que très simple, cet exemple illustre les points importants de la méthode, mais aussi ses limitations : comment choisir I et J ?

Cette technique donne des résultats car le nombre d'inconnues est toujours supérieur au nombre d'équations, alors une solution non triviale existe. Enfin, le fait que les coefficients soient indépendants de k est indispensable pour l'étape de sommation.

Chapitre 8

Algorithme de Zeilberger

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord l'algorithme de Gosper [5], puis l'utilisation de cet algorithme pour démontrer des identités (plus particulièrement en déterminant la récurrence satisfaite par une série). Précisément, il s'agit d'appliquer l'algorithme de Gosper dans un cadre plus général qui a été étudié par Doron Zeilberger [11, 12].

8.1 Algorithme de Gosper

8.1.1 Description de l'algorithme

Soit une suite hypergéométrique $U(k)$. L'algorithme de Gosper est une procédure de décision qui permet de trouver (si elle existe) une suite hypergéométrique $T(k)$ vérifiant :

$$\boldsymbol{T(k+1) - T(k) = U(k)} \ .$$

La méthode se décompose de la façon suivante :

- Cherchons tout d'abord la décomposition suivante de $\frac{U(k+1)}{U(k)}$:

$$\frac{U(k+1)}{U(k)} = \frac{A(k)}{B(k)} \frac{C(k+1)}{C(k)} \ , \tag{8.1}$$

où A, B et C sont des polynômes moniques et où $C(k)$ est maximal, c'est-à-dire que $A(k)$ et $B(k)$ vérifient :

$$\mathrm{pgcd}(A(k), B(k+j)) = 1 \text{ pour tout } j \geq 0 \ . \tag{8.2}$$

Pour cela, on écrit la décomposition initiale avec $C(k) = 1$; ensuite, s'il existe un $j \geq 0$ tel que $\mathrm{pgcd}(A(k), B(k+j)) = g(k) \neq 1$, alors on pose :

$$\begin{aligned} A'(k) &= A(k)/g(k) \ , \\ B'(k) &= B(k)/g(k-j) \ , \\ C'(k) &= C(k)\, g(k)\, g(k-1) \cdots g(k-j+1) \ , \end{aligned}$$

et la décomposition de $U(k)/U(k-1)$ devient :

$$\frac{U(k+1)}{U(k)} = \frac{A'(k)}{B'(k)} \frac{C'(k+1)}{C'(k)} \ .$$

En itérant ce processus, Gosper [5] montre que l'on obtient une décomposition de la forme (8.1) avec la condition (8.2) requise.

Considérons par exemple $U(k) = k! - (k-1)! = (k-1)\,(k-1)!$. On remarque que — sous cette forme — $U(k)$ possède deux composantes : la partie polynomiale $(n-1)$ et la partie factorielle $(n-1)!$. La décomposition (8.1) devient :

$$\frac{U(k+1)}{U(k)} = \frac{k}{1}\,\frac{k}{k-1}\ . \tag{8.3}$$

On appelle le rapport $C(k+1)/C(k)$ *"partie polynomiale"* (ici $k/k-1$) tandis que $A(k)/B(k)$ est appelé *"partie factorielle pure"* (ici $k/1$).

- Déterminons maintenant $T(k)$ de la forme :

$$T(k) = \frac{U(k)\,B(k-1)}{C(k)}\,M(k)\ , \tag{8.4}$$

où $A(k)$ et $B(k)$ sont les polynômes précédemment définis, et $M(k)$ l'unique terme à déterminer. Pour cela, on écrit :

$$T(k+1) - T(k) = U(k)\ ,$$

$$\frac{U(k+1)\,B(k)}{C(k+1)}\,M(k+1) - \frac{U(k)\,B(k-1)}{C(k)}\,M(k) \quad = \quad U(k)\ ,$$

par (8.1) : $$\frac{U(k)\,A(k)}{C(k)}\,M(k+1) - \frac{U(k)\,B(k-1)}{C(k)}\,M(k) \quad = \quad U(k)\ ,$$

$$A(k)\,M(k+1) - B(k-1)\,M(k) = C(k)\ . \tag{8.5}$$

- Précisons la nature de $M(k)$:

$$\frac{T(k)}{U(k)} = \frac{T(k)}{T(k+1)-T(k)} = \frac{t(k)}{1-t(k)}\ ,$$

où $t(k) = T(k)/T(k+1)$ est une fonction rationnelle de k. Donc $T(k)/U(k)$ est une fonction rationnelle de k.
Or :

$$\frac{T(k)}{U(k)} = \frac{B(k-1)\,M(k)}{C(k)}\ ,$$

donc $M(k)$ est également une fonction rationnelle de k.
Plus précisement, Gosper [5] montre que $M(k)$ est un polynôme.

- Pour conclure, si la récurrence (8.5) admet une solution polynomiale pour M, le problème est résolu : T est complètement déterminé par (8.4). Sinon, le polynôme $T(k)$ cherché n'existe pas.
Le problème revient donc à chercher une solution polynomiale de (8.4) :
Dans un premier temps, il faut déterminer une borne L sur le degré du polynôme M :
  - Si $\deg(A) \neq \deg(B)$ ou $\mathrm{lc}(A) \neq \mathrm{lc}(B)$ alors
    $\mathcal{D} := \{\deg(C) - \max\{\deg(A), \deg(B)\}\}$
    sinon soient a et b les coefficients de degré strictement inférieur à A et B
    $\mathcal{D} := \{\deg(C) - \deg(A) + 1, (b-a)/\mathrm{lc}(A)\}$
  - Soit $\mathcal{D} := \mathcal{D} \cap \mathbb{N}$.
    Si $\mathcal{D} = \emptyset$ alors "Pas de solution polynomiale"
    Sinon $L := \max \mathcal{D}$

Ensuite, la méthode des coefficients indéterminés permet d'expliciter une solution polynomiale $M(k)$ de degré au plus L et ainsi d'expliciter

$$T(k) = \frac{U(k)\,B(k-1)}{C(k)}\,M(k)\ .$$

8.1.2 Exemple

On s'intéresse à :

$$U(k) = \binom{n}{k} \frac{2\,k - n - 1}{2\,(n + 1 - k)} \ .$$

- Cherchons tout d'abord la décomposition de $\frac{U(k+1)}{U(k)}$:

$$\frac{U(k+1)}{U(k)} = \frac{n + 1 - k}{k + 1} \frac{2\,k - n + 1}{2\,k - n - 1} \ ,$$

  donc $A(k) = n + 1 - k$, $B(k) = k + 1$ et $C(k) = 2\,k - n - 1$.

- $T(k)$ s'écrit :

$$T(k) = \binom{n}{k} \frac{2\,k - n - 1}{2\,(n + 1 - k)} \frac{k}{2\,k - n - 1} M(k) \ .$$

- L'équation fonctionnelle (8.5) s'écrit :

$$(n + 1 - k)\,M(k + 1) - k\,M(k) = 2\,k - n - 1 \ ,$$

  $\Longrightarrow M(k) = -1$.

- Finalement :

$$T(k) = \binom{n}{k} \frac{-k}{2\,(n + 1 - k)} \ .$$

8.2 Méthode de Wilf-Zeilberger

8.2.1 Description

Cette méthode est une application directe de l'algorithme de Gosper pour démontrer des identités de la forme :

$$a(n) := \sum_k F(n, k) = \mathtt{const} \ .$$

Dans le cas de $\sum_k H(n, k) = r(n)$ où $r(n) \neq 0$, on peut se ramener à ce type d'équation en posant $F(n, k) := H(n, k)/r(n)$.

L'idée est d'appliquer l'algorithme de Gosper à l'expression $U_k = F(n, k) - F(n-1, k)$ par rapport à la variable k. On obtient alors (si elle existe) une forme $G(n, k)$ telle que :

$$U_k = F(n, k) - F(n - 1, k) = G(n, k) - G(n, k - 1) \ . \tag{8.6}$$

Il y a ici, une complète symétrie entre les indices n et k : (F, G) est apellée paire **WZ**.

En sommant (8.6) sur k, on obtient :

$$\sum_k (F(n, k) - F(n - 1, k)) = \sum_k (G(n, k) - G(n, k - 1)) \ .$$

Le terme de droite se "téléscope" (à la condition supplémentaire $G(n, \pm\infty) = 0$) et le terme de gauche s'écrit $a(n) - a(n - 1)$. D'où :

$$a(n) - a(n - 1) = 0 \ ,$$

$$a(n) = a(n - 1) = \mathtt{const} \ . \tag{8.7}$$

8.2.2 Exemple

On veut démontrer l'identité suivante :

$$\sum_k 2^{-n} \binom{n}{k} = 1 \ .$$

Calculons dans un premier la différence $F(n+1,k) - F(n,k)$:

$$\begin{aligned}
F(n+1,k) - F(n,k) &= 2^{-(n+1)} \binom{n+1}{k} - 2^{-n} \binom{n}{k} \\
&= 2^{-n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2} \frac{n+1}{n+1-k} - 1\right) \\
&= 2^{-n} \binom{n}{k} \frac{-n-1+2k}{2(n+1-k)} \\
&= U(k)
\end{aligned}$$

Déterminons maintenant la décomposition (8.1) de $U(k+1)/U(k)$:

$$\begin{aligned}
\frac{U(k+1)}{U(k)} &= 2^{-n} \binom{n}{k+1} \frac{-n-1+2\,k+2}{2\,(n+1-k-1)}\, 2^n \binom{n}{k}^{-1} \frac{2(n+1-k)}{-n-1+2\,k} \\
&= \frac{n+1-k}{k+1} \, \frac{-n-1+2\,k}{-n-1+2\,k} \\
&= \frac{A(k)}{B(k)} \, \frac{C(k+1)}{C(k)}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation fonctionnelle (8.5) s'écrit :

$$(n+1-k)\, M(k+1) - k\, M(k) = 2\,k - n - 1$$

Après calculs, on trouve $M(k) = \mathrm{C^{te}} = -1$, et finalement :

$$G(n,k) = 2^{-n} \binom{n}{k} \frac{-k}{2(n+1-k)}$$

8.3 Algorithme rapide de Zeilberger

Nous nous intéressons maintenant à un algorithme plus performant qui utilise l'algorithme de Gosper pour déterminer une forme close $G(n,k)$ telle que :

$$\boldsymbol{s_0(n)\, F(n,k) + s_1(n)\, F(n+1,k) + \cdots + s_I(n)\, F(n+I,k) = G(n,k+1) - G(n,k) = U(k)} \ , \tag{8.8}$$

où les $s_i(n)$ sont des polynômes en n.

Pour faciliter la compréhension, on adoptera les notations compactes suivantes :

- on définit l'*"opérateur de décalage"* N qui agit sur une suite quelconque tel que
$$N\, F(n,k) := F(n+1,k) \tag{8.9}$$
- on note également :
$$S(N,n) = \sum_{i=0}^{I} s_i(n)\, N^i \ ,$$
où N est l'opérateur précédemment défini et les s_i sont des polynômes en n.

Ainsi, on notera l'égalité (8.8) sous la forme compacte suivante :

$$S(N,n)\, F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) = U(k) \ , \tag{8.10}$$

8.3.1 Description

Une version modifiée de l'algorithme de Gosper permet de déterminer simultanément les inconnues $S(N,n)$ et $G(n,k)$ du problème :

- tout d'abord, on fixe l'ordre I de la récurrence que l'on cherche à établir, et on rappelle que les coefficients $s_i(n)$ de la récurrence sont des polynômes en n ;
- ensuite, on pose :

$$U(k) = S(N,n)\,F(n,k) = \sum_{i=0}^{I} s_i(n)\,F(n+i,k)\ ,$$

$$U(k) = \left[\sum_{i=0}^{I} s_i(n)\,\frac{F(n+i,k)}{F(n,k)}\right] F(n,k)\ .$$

L'expression entre les crochets est une fonction rationnelle en n et k dont le numérateur est une expression linéaire de $s_0(n), s_1(n), \ldots, s_I(n)$.

- On cherche alors la décomposition (8.1) de $U(k)$ par rapport à la variable k en appliquant l'algorithme de Gosper :

$$\begin{aligned}\frac{U(k)}{F(n,k)} &= \frac{s_0(n)\,F(n,k) + \cdots + s_i(n)\,F(n+i,k) + \cdots + s_I(n)\,F(n+I,k)}{F(n,k)}\ ,\\ &= s_0(n) + \cdots + s_i(n)\,\frac{F(n+i,k)}{F(n,k)} + \cdots + s_I(n)\,\frac{F(n+I,k)}{F(n,k)} = \frac{P(k)}{Q(k)}\ ,\end{aligned}$$

où $P(k)$ est une expression linéaire des s_i, explicitée après l'obtention d'une fraction irréductible.
On écrit donc :

$$U(k) = \frac{F(n,k)\,P(k)}{Q(k)}\ ,$$

Ainsi, le parallèle avec l'algorithme de Gosper se poursuit :

$$\begin{aligned}\frac{U(k+1)}{U(k)} &= \frac{F(n,k+1)\,P(k+1)}{Q(k+1)}\,\frac{Q(k)}{F(n,k)\,P(k)}\ ,\\ \frac{U(k+1)}{U(k)} &= \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}\,\frac{Q(k)}{Q(k+1)}\,\frac{P(k+1)}{P(k)}\ .\end{aligned}$$

On cherche maintenant la décomposition suivante :

$$\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}\,\frac{Q(k)}{Q(k+1)} = \frac{A(k)}{B(k)}\,\frac{C(k+1)}{C(k)},$$

ceci implique :

$$\boldsymbol{\frac{U(k+1)}{U(k)} = \frac{A(k)}{B(k)}\,\frac{C(k+1)}{C(k)}\,\frac{P(k+1)}{P(k)}}.$$

En posant :

$$G(n,k) = \frac{U(k)\,B(k-1)}{C(k)\,P(k)}\,M(k)\ ,$$

l'équation fonctionnelle (8.5) devient de la forme :

$$\boldsymbol{A(k)\,M(k+1) - B(k-1)\,M(k) = C(k)\,P(k)}\ ,$$

on cherche le polynôme $M(k)$ exprimé sous la forme générique $M(k) = M_0 + M_1 k + \cdots + M_L k^L$.
Dans un premier temps, il faut déterminer une borne L sur le degré du polynôme, ceci s'effectue de façon analogue à l'algorithme de Gosper.
Cette première étape conditionne la suite :

- Si le système n'admet pas de solution, cela signifie qu'il n'existe pas de récurrence d'ordre I, et on peut recommencer toute la méthode en remplaçant I par $I+1$.
- Sinon, la méthode des coefficients indéterminés permet de trouver une solution polynomiale $M(k)$ de degré au plus L :
  on obtient un système d'équations linéaires en $M_0, M_1, \ldots, M_L, s_0, s_1, \ldots, s_I$ qui permet une fois résolu, d'expliciter nos inconnues :

$$G(n,k) = \frac{U(k)\,B(k-1)}{C(k)\,P(k)}\,M(k) \;,$$

$$\text{et} \qquad S(N,n) = \sum_{i=0}^{I} s_i(n)\,N^i \;.$$

Si $F(n,k)$ est une fonction *holonome*[1], alors la théorie de l'holonomie [4] implique que $\sum_k F(n,k)$ vérifie toujours une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux. Avec cette hypothèse supplémentaire, l'algorithme termine.

Finalement, après avoir déterminé $G(n,k)$, la sommation sur k de l'égalité (8.10) donne l'égalité recherchée :

$$\boldsymbol{S(N,n)\;a(n) = 0} \;.$$

De plus, $G(n,k)$ s'écrit sous la forme $G(n,k) = \dfrac{U(k)\,B(k-1)}{C(k)\,P(k)}\,M(k)$; or $U(k) = \dfrac{F(n,k)\,P(k)}{Q(k)}$ donc :

$$\begin{aligned}
G(n,k) &= \frac{P(k)\,B(k-1)}{C(k)\,P(k)\,Q(k)}\,M(k)\,F(n,k) \\
&= \frac{M(k)\,B(k-1)}{C(k)\,Q(k)}\,F(n,k) \\
&= R(n,k)\,F(n,k)
\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{R(n,k)}$ est appelé *Certificat* de l'identité (8.10) que l'on rappelle ici :

$$S(N,n)\,F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \;.$$

Ce certificat est la "preuve" de cette identité au sens où il permet de la vérifier aisément, simplement en substituant chaque inconnue par sa valeur (le schéma de la preuve est toujours identique).

Maintenant, faisons appel au concept du "creative telescoping" introduit par Wilf et Zeilberger (*cf* section 8.2) : puisque les coefficients s_i sont indépendants de k, on peut sommer (8.10) sur k et obtenir :

$$S(N,n)\,\sum_k F(n,k) = \sum_k G(n,k+1) - \sum_k G(n,k) \;,$$

$$S(N,n)\,\sum_k F(n,k) = G(n,\infty) - G(n,-\infty) \;,$$

si de plus $G(n,\pm\infty) = 0$, on a finalement :

$$S(N,n)\,a(n) = 0 \qquad \text{qui est la récurrence cherchée.}$$

[1] c.f. définition des suites et des fonctions holonomes page 8.

8.3.2 Exemple

$$F(n,k) = \binom{n}{k}^2 . \tag{8.11}$$

- Tentative avec $I = 0$: Échec.
- $I = 1$:

$$U(k) = S(N,n)\,F(n,k) = s_0(n)\,F(n,k) + s_1(n)\,F(n+1,k) ,$$

$$U(k) = s_0(n)\binom{n}{k}^2 + s_1(n)\binom{n+1}{k}^2 ,$$

$$\begin{aligned}
\frac{U(k)}{F(n,k)} &= s_0(n) + s_1(n)\,\frac{\binom{n+1}{k}^2}{\binom{n}{k}^2} , \\
&= s_0(n) + s_1(n)\,\frac{(n+1)!^2}{k!^2\,(n+1-k)!^2}\,\frac{k!^2\,(n-k)!^2}{n!^2} , \\
&= s_0(n) + s_1(n)\,\frac{(n+1)^2}{(n+1-k)^2} , \\
&= \frac{s_0(n)\,(n+1-k)^2 + s_1(n)\,(n+1)^2}{(n+1-k)^2} = \frac{P(k)}{Q(k)} .
\end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} P(k) = s_0(n)\,(n+1-k)^2 + s_1(n)\,(n+1)^2 \\ Q(k) = (n+1-k)^2 . \end{cases}$$

Comme

$$U(k) = \frac{F(n,k)\,P(k)}{Q(k)} ,$$

et

$$\frac{U(k+1)}{U(k)} = \frac{A(k)}{B(k)}\,\frac{C(k+1)}{C(k)}\,\frac{P(k+1)}{P(k)}.$$

alors, les polynômes A, B, C s'écrivent :

$$\begin{aligned}
A(k) &= (n+1-k)^2 , \\
B(k) &= (k+1)^2 , \\
C(k) &= 1 .
\end{aligned}$$

L'équation fonctionnelle (8.5) s'écrit :

$$(n+1-k)^2\,M(k+1) - k^2\,M(k) = (n+1-k)^2\,s_0(n) + (n+1)^2 s_1(n) .$$

Le problème se ramène donc à savoir s'il existe des polynômes s_0 et s_1 tels que l'on ait une solution polynomiale pour M.
Ici, la borne supérieur sur le degré du polynôme M est 1, ainsi on pose $M(k) = \alpha\,k + \beta$.
En comparant les coefficients de k^2, k^1 et k^0, le système à résoudre devient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\alpha(1+2\,n) &=& s_0(n) , \\ \alpha\,(n^2-1) - 2\,\beta\,(n+1) &=& -2\,s_0(n)(n+1) , \\ (\alpha+\beta)\,(n+1)^2 &=& (s_0(n)+s_1(n))\,(n+1)^2 . \end{array} \right.$$

Ce système à trois équations possède quatre inconnues à déterminer : en posant $\alpha = 2$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s_0 & = & -2\,(2\,n+1)\ , \\ s_1 & = & (n+1)\ , \\ \beta & = & -3\,(n+1)\ , \end{array} \right.$$

la récurrence s'écrit finalement :

$$2\,(2\,n+1)\,a(n) - (n+1)\,a(n+1) = 0\ .$$

Ceci, joint à la condition initiale $a(0) = 1$ donne la solution :

$$a(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2\,n)!}{n!^2}\ .$$

Et le certificat $R(n,k)$ est donné par :

$$\begin{aligned} G(n,k) &= \frac{M(k)\,B(k-1)}{C(k)\,Q(k)}\,F(n,k)\ , \\ &= \frac{(2\,k-3\,n-3)\,k^2}{(n+1-k)^2}\binom{n}{k}^2\ , \\ &= R(n,k)\,F(n,k)\ . \end{aligned}$$

8.4 Preuve automatique d'identités

Ces outils permettent la démonstration d'identités non triviales faisant intervenir des termes hypergéométriques (notamment des coefficients binomiaux). La méthode utilisée pour démontrer — de façon "automatique" — une égalité du type $\sum f = \sum g$ est la suivante :

- on construit les équations de récurrence satisfaites par les deux membres de l'équation ;
- on vérifie que ces deux équations de récurrence se résument à une unique récurrence satisfaite par les deux membres ;
- on vérifie également que des conditions initiales en nombre suffisant sont identiques pour les deux membres de l'égalité.

Remarque : les récurrences trouvées donne également des informations sur la série (notamment sur son comportement asymptotique) sans avoir besoin de calculer explicitement cette série.

8.5 Implantations

Mentionnons les diverses réalisations logicielles de l'algorithme de Zeilberger :

- `EKHAD`, **Doron Zeilberger, 1996, *Maple*** ;
- `HYPERG`, **Bruno Gauthier, 1997, *Maple*** ;
- `zeilb`, **Tom H. Koornwinder, 1993, *Maple*** ;
- `Zeil`, **Peter Paule et Markus Schorn, 1993, *Mathematica***.

Ce dernier package est une option du package `HYP` de **Christian Krattenthaler** qui permet la manipulation et l'identification d'identités et de séries hypergéométriques.

Citons également les implantations dans le cas du q-calcul :

- `qEKHAD`, **Doron Zeilberger, 1996,** ***Maple*** ;
- `qzeilb`, **Tom H. Koornwinder, 1993,** ***Maple*** ;
- `qZeil`, **Peter Paule et Axel Riese,** ***Mathematica*** ;

où ce dernier package est une option du package `HYPQ` (q-analogue du package `HYP`).

```
> read EKHAD:

> zeil(binomial(n,k)^2,k,n,N);
                                                         2
                                      (3 n + 3 - 2 k) k
            - 4 n - 2 + (n + 1) N, - -------------------
                                                  2
                                         (n - k + 1)
```

Le résultat rétourné par cette fonction correspond au couple $\{S(N,n), R(n,k)\}$.

8.6 Exercices

▹ Utiliser la technique de Sœur Céline pour évaluer chacune des sommes suivantes, sous forme close :

(a) $\displaystyle\sum_k \frac{(-1)^k\, n!\, x^k}{k!^2\,(n-k)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_k \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$.

▹ Aplliquer l'algorithme suivant à la suite hypergéometrique suivante :

$$U(k) = \frac{(2\,k)!}{4^k\, k!^2\,(2\,k-1)} \ .$$

▹ En utilisant la méthode du "creative telescoping", évaluer les sommes suivantes sous forme close :

(a) $\displaystyle\sum_k (-1)^k \binom{n}{k}\binom{2\,n-2\,k}{n+a}$,

(b) $\displaystyle\sum_k \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$,

(c) $\displaystyle\sum_k k\binom{2\,n+1}{2\,k+1}$,

(d) $\displaystyle\sum_k (-1)^k \binom{n-k}{k}\, 2^{n-2\,k}$.

▷ Les polynômes de Legendre sont définis par :

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_k (-1)^k \binom{2\,n - 2\,k}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2\,k} \ .$$

Déterminer, par l'algorithme de Zeilberger, une formule de récurrence d'ordre 2 satisfaite par ces polynômes.

Partie IV

Solutions de q-récurrences linéaires

Chapitre 9

Solutions polynomiales de q-récurrences linéaires

$$a_0(n)\,U(n) + a_1(n)\,U(q\,n) + \cdots + a_k(n)\,U(q^k\,n) = f(n) \qquad \text{où } a_i(n), f(n) \in \mathbb{K}[n] \tag{9.1}$$

On supposera que $q \in \mathbb{K}$ est différent de zéro et n'est pas une racine de l'unité.

Les solutions polynomiales de la q-récurrence (9.1) se déterminent de façon analogue au cas de base décrit au chapitre **4** :

- on cherche une borne d sur le degré des solutions polynomiales de (9.1) ;
- étant donné cette borne d, on détermine les polynômes solutions de (9.1) de degré au plus d, par la méthode des coefficients indéterminés.

Pour trouver une borne d, le raisonnement est identique au cas de base décrit au chapitre **4**.
Ecrivons la récurrence (9.1) sous la forme :

$$L\,U(n) = f(n)$$

avec $L = \sum_{i=0}^{k} a_i\,Q^i$ où Q est l'opérateur de q-décalage tel que $Q\,p(n) = p(q\,n)$.
Nous pouvons maintenant écrire cette récurrence avec l'opérateur Δ_q de q-dérivation :

$$\Delta_q\,p(n) = \frac{p(q\,n) - p(n)}{n}$$

on a donc $Q = n\,\Delta_q + 1$, et plus globalement : $Q^i = \sum_{j=0}^{i} q^{j\,(j-1)/2} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q n^j\,\Delta_q^j$, ainsi la récurrence s'écrit:

$$L = \sum_{i=0}^{k} a_i Q^i = \sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{i} q^{j\,(j-1)/2} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q n^j \Delta_q^j = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j}^{k} a_i q^{j\,(j-1)/2} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q n^j \Delta_q^j = \sum_{j=0}^{k} b_j q^{j\,(j-1)/2} n^j \Delta_q^j$$

en posant $b_j = \sum_{i=j}^{k} a_i \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q$.

La solution polynomiale de (9.1) est de la forme $U(n) = \sum_{i=0}^{d} u_i\,n^i$.

Déterminons le terme de tête de $L\,U(n)$:

- Tout d'abord, notons la relation suivante :

$$\Delta_q^j n^p = (-1)^j \,(q^{p-j+1};q)_j \, n^{p-j} + O(n^{p-j-1}) \tag{9.2}$$

- $L\,U(n) = \sum_{j=0}^{k} b_j \, q^{j\,(j-1)/2} \, n^j \, \Delta_q^j \sum_{i=0}^{d} u_i \, n^i$
- Le terme de tête de $L\,U(n)$ est donc celui de l'expression suivante :

$$\sum_{j=0}^{k} b_j \, q^{j\,(j-1)/2} \, n^j \, \Delta_q^j \, u_d \, n^d$$

qui se simplifie à l'aide de (9.2) :

$$\sum_{j=0}^{k} b_j \, q^{j\,(j-1)/2} \, n^j \, u_d \, (-1)^j \, (q^{d-j+1};q)_j \, n^{d-j} \ ,$$

$$\sum_{j=0}^{k} b_j \, q^{j\,(j-1)/2} \, u_d \, (-1)^j \, (q^{d-j+1};q)_j \, n^{d} \ ,$$

- Dans cette somme, uniquement b_j et n^d dépendent de n, ainsi :

$$\deg\,(L\,U(n)) \leq \max\{(\deg b_j) + d \text{ où } 0 \leq j \leq k\}$$

et en posant :

$$B = \max\{(\deg b_j) \text{ où } 0 \leq j \leq k\} \tag{9.3}$$

on obtient :

$$\deg\,(L\,U(n)) \leq d + B$$

- Si $d + B < 0$, alors $\boldsymbol{d \leq -B - 1}$. Sinon, on distingue deux cas :
  - soit $\deg\,(L\,U(n)) = d + B$, et alors $\boldsymbol{d = (\deg f) - B}$.
  - soit $\deg\,(L\,U(n)) < d + B$, ce qui implique que le coefficient de $L\,U(n)$ en n^{d+B} s'annule :

  $$u_d \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ \deg\, b_j = B}} \mathsf{lc}(b_j) \, q^{j\,(j-1)/2} \, (-1)^j \, (q^{d-j+1};q)_j = 0 \ ,$$

  donc d est une racine du polynôme suivant :

  $$\alpha(x) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ \deg\, b_j = B}} \mathsf{lc}(b_j) \, q^{j\,(j-1)/2} \, (-1)^j \, (q^{d-j+1};q)_j \tag{9.4}$$

En résumé :

Proposition 9.1 *Supposons que $L\,U(n) = f(n)$ où $U(n)$ et $f(n)$ sont des polynômes en n, et notons $L = \sum_{i=0}^{k} a_i \, Q^i$, $b_j = \sum_{i=0}^{j} a_i \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q$. De plus, soit $D = \max\{x \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \alpha(x) = 0\}$ où $\alpha(x)$ est défini par (9.4). Alors, $\deg U(n) \leq d$ où*

$$d = \max\{(\deg f) - B, -B - 1, D\}$$

avec B défini par (9.3).

Partie V

Exercices

Chapitre 10

Nombres de *Motzkin*

Les nombres de *Motzkin* comptent le nombre d'arbres unaires-binaires à n nœuds (chaque nœud est soit une feuille, soit un nœud à un descendant, soit un nœud à deux descendants). Les premiers nombres sont $1, 1, 2, 4, \ldots$ La fonction génératrice des nombres de *Motzkin* satisfait :

$$y(z) = 1 + z\,y(z) + z^2\,y^2(z)\ . \tag{10.1}$$

➤ **Utiliser cette équation pour calculer les 5 premiers nombres de *Motzkin* ;**

Soit $y(z) = \sum_{n\geq 0} M_n\,z^n$, l'équation (10.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} M_n\,z^n &= 1 + z\sum_{n\geq 0} M_n\,z^n + z^2\sum_{n\geq 0} M_n\,z^n \sum_{n\geq 0} M_n\,z^n\ , \\ \sum_{n\geq 0} M_n\,z^n &= 1 + \sum_{n} M_n\,z^{n+1} + \sum_{n\geq 0}\big(\sum_{0\leq k\leq n} M_k\,M_{n-k}\big)\,z^{n+2}\ . \end{aligned}$$

On identifie les coefficients de $z^0, z^1, z^2, \ldots$:

$$\begin{aligned} z^0 &: \quad M_0 = 1 + 0 + 0\ , \\ z^1 &: \quad M_1 = 0 + M_0 + 0 = 1, \\ z^2 &: \quad M_2 = 0 + M_1 + M_0\,M_0 = 1 + 1 = 2, \\ z^3 &: \quad M_3 = 0 + M_2 + M_0\,M_1 + M_1\,M_0 = 2 + 1 + 1 = 4, \\ z^4 &: \quad M_4 = 0 + M_3 + M_0\,M_2 + M_1\,M_1 + M_2\,M_0 = 4 + 2 + 1 + 2 = 9\ . \end{aligned}$$

➤ **Calculer l'équation différentielle linéaire inhomogène d'ordre 1 satisfaite par $y(z)$;**

On considère la fonction algébrique (extraite de l'équation (10.1)) :

$$P(z) = z^2\,y^2(z) + z\,y(z) - y(z) + 1 = 0\ .$$

En dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned} P'(z) &= 2\,z\,y^2(z) + 2\,z^2\,y(z)\,y'(z) + y + z\,y'(z) - y'(z)\ , \\ P'(z) &= y'(z)\,(2\,z^2\,y(z) + z - 1) + 2\,z\,y^2(z) + y\ , \\ &= y'(z)\,A(y,z) + V(y,z)\ , \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A(y,z) &= 2\,z^2\,y(z) + z - 1\ , \\ V(y,z) &= 2\,z\,y^2(z) + y\ . \end{aligned}$$

La division euclidienne de $P(z)$ par $A(y,z)$ donne :

$$z^2\,y^2(z) + z\,y(z) - y(z) + 1 = (2\,z^2\,y(z) + z - 1)\,Q(y,z) + R(y,z)\ ,$$

où

$$\begin{aligned} Q(y,z) &= \frac{y}{2} + \frac{1}{4\,z} - \frac{1}{4\,z^2}\ , \\ R(y,z) &= \frac{-1}{4\,z^2} + \frac{1}{2\,z} + \frac{3}{4}\ . \end{aligned}$$

En multipliant $P'(z)$ par $Q(y,z)$, on a :

$$\begin{aligned} y'(z)\,Q(y,z)\,A(y,z) + Q(y,z)\,V(y,z) &= 0\ , \\ -y'(z)\,R(y,z) + Q(y,z)\,V(y,z) &= 0\ , \\ -y'(z)\left(\frac{-1}{4\,z^2} + \frac{1}{2\,z} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{4\,z} - \frac{1}{4\,z^2}\right)(2\,z\,y^2(z) + y) &= 0\ . \end{aligned}$$

En continuant les calculs, et en remplaçant $y^2(z)$ par $\dfrac{y(z) - z\,y(z) - 1}{z^2}$, on a finalement :

$$(z^2 - 2\,z^3 - 3\,z^4)\,y'(z) + (-3\,z^3 - 3\,z^2 + 2\,z)\,y(z) = 2\,z\ ,$$

$$(3\,z^3 + 2\,z^2 - z)\,y'(z) + (3\,z^2 + 3\,z - 2)\,y(z) + 2 = 0\ . \tag{10.2}$$

➤ **En déduire la récurrence linéaire d'ordre 2 satisfaite par les nombres de *Motzkin* ;**

$$\begin{aligned} y(z) &= \sum_{n\geq 0} M_n\,z^n\ , \\ y'(z) &= \sum_{n\geq 0} (n+1)\,M_{n+1}\,z^n\ . \end{aligned}$$

En substituant dans (10.2), les séries par leur développement, on a :

$$\begin{aligned} 3\sum_{n\geq 0}(n+1)\,M_{n+1}\,z^{n+3} + 2\sum_{n\geq 0}(n+1)\,M_{n+1}\,z^{n+2} - \sum_{n\geq 0}(n+1)\,M_{n+1}\,z^{n+1} \\ +3\sum_{n\geq 0} M_n\,z^{n+2} + 3\sum_{n\geq 0} M_n\,z^{n+1} - 2\sum_{n\geq 0} M_n\,z^n + 2 = 0\ . \end{aligned}$$

Le coefficient de z^{n+3} dans cette dernière expression vérifie :

$$(n+5)\,M_{n+3} - (2\,n+7)\,M_{n+2} - 3\,(n+2)\,M_{n+1} = 0\ ,$$

que l'on écrit finalement :

$$(n+4)\,M_{n+2} - (2\,n+5)\,M_{n+1} - 3\,(n+1)\,M_n = 0\ .$$

➤ **Utiliser cette récurrence pour calculer les 6 premiers nombres de *Motzkin* ;**

$M_0 = M_1 = 1$ donc, on calcule sans aucune difficulté :

$$\begin{aligned} M_2 &= 2\ , \\ M_3 &= 4\ , \\ M_4 &= 9\ , \\ M_5 &= 21\ , \\ M_6 &= 51\ . \end{aligned}$$

➤ **Prouver que ces nombres ne sont pas hypergéométriques ;**

L'équation de récurrrence est :

$$(n+4)\, M_{n+2} - (2\,n+5)\, M_{n+1} - 3\,(n+1)\, M_n = 0\ ,$$

posons

$$\begin{aligned} a_0(n) &= -3\,(n+1)\ , \\ a_2(n) &= (n+4)\ . \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} a_0(n) &= -3\,(n+1)\ , \\ a_2(n-2+1) &= (n+3)\ . \end{aligned}$$

Les facteurs moniques de $a_0(n)$ sont $1, n+1$, ceux de $a_2(n-1)$ sont $1, n+3$.

L'application de l'algorithme HYPER avec ces expressions, ne donne aucune solution. Donc les nombres de *Motzkin* ne sont pas hypergéométriques.

```
> with(HYPERG):

> HypSolRec( (3+3*n)*M(n)+(2*n+5)*M(1+n)+(-4-n)*M(2+n) = 0, M(n));
bytes used=4000900, alloc=1703624, time=7.27
                                        {}
```

➤ **Prouver que les nombres de *Motzkin* sont égaux à :**

$$P_n = \sum_{k=0}^{n+2} (-1)^{k+1} \binom{1/2}{k} \binom{k}{n+2-k}\, 2^{(2\,k-n-3)}\, 3^{(n+2-k)} \qquad (10.3)$$

```
> with(HYPERG):

> SumToRec(Sum((-1)^(k+1) * binomial(1/2,k) * binomial(k,n+2-k)
                                        * 2^(2*k-n-3) * 3^(n+2-k),k),n,M);

    [(3 + 3 n) M(n) + (2 n + 5) M(1 + n) + (- 4 - n) M(2 + n) = 0,

            (- 2 k + 3 + n) (- 2 k + 2 + n) (4 + n)
        9/4 ---------------------------------------]
                    (4 + n - k) (3 + n - k)
```

La récurrence satisfaite par P_n est donc :

$$(n+4)\,P_{n+2} - (2\,n+5)\,P_{n+1} - 3\,(n+1)\,P_n = 0\ .$$

De plus, $P_0 = 1$ et $P_1 = 1$, donc $\boldsymbol{M_n = P_n}$.

➤ **Utiliser la formule (10.3) pour calculer les quatre premiers nombres de *Motzkin* ;**

$$\begin{aligned} M_0 &= 1\ , \\ M_1 &= 1\ , \\ M_2 &= 2\ , \\ M_3 &= 4\ , \\ M_4 &= 9\ . \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] S. A. Abramov, *Rational solutions of linear differential and q-difference equations with polynomial coefficients*, Proceedings ISSAC '95, ACM Press, New York, (1995), 285-289.

[2] S. A. Abramov, M. Petkovšek, *Finding all q-hypergeometric solutions of q-difference equations* Proceedings FPSAC '95, Université de Marne-la-vallée, (1995), 1–10.

[3] S. A. Abramov, M. Bronstein, M. Petkovšek, *On polynomial solutions of linear operator equations.*

[4] P. Cartier, *Démonstration "automatique" d'identités et fonctions hypergéométriques [d'après D. Zeilberger]*, Séminaire Bourbaki, **746** (1991-92).

[5] R. W. Gosper, Jr, *Decision procedure for indefinite hypergeometric summation*, Proceedings of the national academy of sciences of the United States of America, **75** (1978), 40–42.

[6] M. Petkovšek, *Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients*, Journal of symbolic computation, **14** (1992), 243–264.

[7] M. Petkovšek, H. S. Wilf et D. Zeilberger, $A = B$, A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, (1996). (Les programmes sont disponibles sur le site WWW `http://www.cis.upenn.edu/~wilf/AeqB.html`).

[8] M. Petkovšek et B. Salvy, *Finding all hypergeometric solutions of linear differential equations*, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Research Report **1907** (1993).

[9] B. Salvy, P. Zimmermann, *Gfun : a maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable*, ACM Transactions on Mathematical Software, **20**, 2, (1994), 163–177.

[10] D. Zeilberger, *A holonomic systems approach to special function identities*, Journal of computational and applied mathematics, **32** (1990), 321–368.

[11] D. Zeilberger, *Three recitations on holonomic systems and hypergeometric series*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, **B24a** (1990).

[12] D. Zeilberger, *The method of creative telescoping*, Journal of symbolic computation, **11** (1991), 195–204.