1. Calculs dans le centre de l'algèbre du groupe symétrique

1.1. Le centre $\mathcal{Z}(n)$ de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ a pour base les sommes C_μ des classes de conjugaison, pour $\mu \vdash n$. On note Z l'application linéaire (indicateur de cycles) qui envoie une permutation de type cyclique μ sur le produit de sommes de puissances p_μ. Une autre base de $\mathcal{Z}(n)$ est formée par les idempotents centraux

$$e_\lambda = \frac{f_\lambda}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\sigma)\sigma \tag{1}$$

qui ont pour indicateur de cycles [1]

$$Z(e_\lambda) = f_\lambda s_\lambda. \tag{2}$$

On définit sur Sym_n un produit $\times$ par

$$Z(\phi\psi) = Z(\phi) \times Z(\psi), \quad \phi, \psi \in \mathcal{Z}(n) \tag{3}$$

de sorte que

$$s_\lambda \times s_\mu = \delta_{\lambda\mu} \frac{1}{f_\lambda} s_\lambda. \tag{4}$$

On note Γ le coproduit dual de $\times$. On a donc

$$\Gamma s_\lambda = \frac{1}{f_\lambda} s_\lambda \otimes s_\lambda. \tag{5}$$

Si l'on note $a^\lambda_{\mu\nu}$ les constantes de structure des classes de conjugaison, et $c_\alpha = Z(C_\alpha)$,

$$C_\mu C_\nu = \sum_\lambda a^\lambda_{\mu\nu} C_\lambda, \tag{6}$$

et si p^*_λ désigne la base adjointe de p_λ,

$$\Gamma(p_\lambda) = \sum_{\alpha,\beta} \langle \Gamma(p_\lambda), p^*_\alpha \otimes p^*_\beta \rangle p_\alpha \otimes p_\beta \tag{7}$$

$$= \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\alpha,\beta} \langle p_\lambda, c_\alpha \times c_\beta \rangle p_\alpha \otimes p_\beta \tag{8}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\alpha,\beta} a^\lambda_{\alpha\beta} p_\alpha \otimes p_\beta. \tag{9}$$

Notons au passage les relations

$$e_\lambda = \frac{f_\lambda}{n!} \sum_\rho \chi^\lambda_\rho C_\rho, \quad C_\rho = \sum_\lambda \theta^\lambda_\rho e_\lambda, \ \theta^\lambda_\rho = \frac{C_\rho}{f_\lambda} \chi^\lambda_\rho. \tag{10}$$

Les θ_ρ, vus comme fonctions de λ sont appelés caractères centraux.

On déduit de ces relations la formule de Frobenius

$$a^\rho_{\mu\nu} = \frac{|C_\mu||C_\nu|}{n!} \sum_\lambda \frac{\chi^\lambda_\mu \chi^\lambda_\nu \chi^\lambda_\rho}{f_\lambda}. \tag{11}$$

1.2. Exemples et exercices.

---

1. D'une manière générale, l'indicateur de cycles d'un idempotent est égal à sa caractéristique de Frobenius.

1.2.1. *Le cas des grands cycles.* On rappelle que

$$\frac{h_n((1-q)X)}{1-q} = \sum_{k=0}^{n-1}(-q)^k s_{n-k,1^k} \longrightarrow_{q\to 1} p_n(X). \tag{12}$$

On peut donc écrire

$$\Gamma(p_n) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{s_{n-k,1^k}\otimes s_{n-k,1^k}}{f_{n-k,1^k}}. \tag{13}$$

On a

$$f_{n-k,1^k} = \binom{n-1}{k} \text{ et } \langle h_n((1-q)X), h_\mu\rangle = h_\mu(1-q) = (1-q)^{\ell(\mu)}, \tag{14}$$

de sorte que

$$s_{n-k,1^k} = \sum_{\mu\vdash n}\binom{\ell(\mu)-1}{k} m_\mu, \tag{15}$$

et donc

$$\Gamma(p_n) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!}\sum_{\mu,\nu\vdash n}\binom{\ell(\mu)-1}{k}\binom{\ell(\nu)-1}{k} m_\mu\otimes m_\nu. \tag{16}$$

On peut réarranger les factorielles pour faire apparaître une somme binomiale calculable :

$$\Gamma(p_n) = \sum_{\mu,\nu\vdash n}\frac{(n-\ell(\mu))!(\ell(\mu)-1)!}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1-k}{\ell(\mu)-1-k}\binom{\ell(\nu)-1}{k} m_\mu\otimes m_\nu. \tag{17}$$

Cette somme est de la forme

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-k}{p-k}\binom{q}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{q}{k}\mathrm{Res}_{z=0}(1+z)^{n-k}\frac{dz}{z^{p-k+1}} \tag{18}$$

$$= \mathrm{Res}_{z=0}\frac{(1+z)^n}{z^{p+1}}\sum_k(-1)^k\binom{q}{k}\left(\frac{z}{1+z}\right)^k dz \tag{19}$$

$$= \mathrm{Res}_{z=0}(1+z)^{n-q}\frac{dz}{z^{p+1}} = \binom{n-q}{p}. \tag{20}$$

On a donc finalement

$$\Gamma(p_n) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{\mu,\nu\vdash n}\frac{(n-\ell(\mu))!(n-\ell(\nu))!}{(n+1-\ell(\mu)-\ell(\nu))!} m_\mu\otimes m_\nu. \tag{21}$$

Cette identité est due à Morales-Vassilieva [51], la preuve ci-dessus est due à Vassilieva [60].

1.2.2. Par spécialisation, on en déduit la formule de Jackson [32]

$$\sum_{\mu,\nu\vdash n} a_{\mu\nu}^{(n)} x^{\ell(\mu)}y^{\ell(\nu)} = n!\sum_{p,q=1}^{n}\binom{n-1}{p-1,\,q-1}\binom{x}{p}\binom{y}{q}. \tag{22}$$

En effet, si x est de type binomial,

$$h_{n;p}(x) := \sum_{\substack{\ell(\mu)=p\\ \mu\vdash n}} m_\mu(x) = [t^p u^n]\left(1+\frac{tu}{1-u}\right)^x = \binom{x}{p}\binom{n-1}{p-1}. \tag{23}$$

Donc, si x et y sont de type binomial,

$$n!\Gamma(p_n)(x\otimes y) = n\sum_{p,q=1}^{n}\frac{(n-p)!(n-q)!}{(n+1-p-q)!}\binom{n-1}{p-1}\binom{n-1}{q-1}\binom{x}{p}\binom{y}{q} \tag{24}$$

qui se récrit bien comme (22) après réarrangement des factorielles.

1.2.3. Goupil et Schaeffer [25] ont obtenu une formule explicite (mais compliquée) pour les coefficients $a^n_{\mu\nu}$. Leur preuve, qui s'appuie sur une série de bijections, a été simplifée pa Biane [5], au moyen d'une représentation intégrale de leur série génératrice. Pour l'obtenir, on part encore de

$$F(X,Y) := \sum_{n\ge 1}(n-1)!\Gamma(p_n) = \sum_{n\ge 1}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r r!(n-1-r)! s_{n-r,1^r}(X)s_{n-r,1^r}(Y) \tag{25}$$

et de

$$\sigma_1((u-v)X) = 1 + (u-v)\sum_{a,b\ge 0} u^a(-v)^b s_{(a|b)}(X),\ \text{où}\ s_{(a|b)} := s_{a+1,1^b}. \tag{26}$$

On se débarasse des factorielles en écrivant

$$\int_{\mathbb{C}} z^k\bar{z}^l d\mu(z) = k!\delta_{kl}\ \text{avec}\ d\mu(z) := \frac{1}{\pi}e^{-|z|^2}dz_1dz_2,\ z = z_1 + iz_2. \tag{27}$$

Alors,

$$F(X,Y) = \int_{\mathbb{C}^2}\frac{\sigma_1((u-v)X)-1}{u-v}\,\frac{\sigma_1((\bar{u}-(-\bar{v}))Y)-1}{\bar{u}+\bar{v}}d\mu(u)d\mu(v), \tag{28}$$

et en développant sur les sommes de puissances

$$F(X,Y) = \sum_{\mu,\nu}\frac{p_\mu(X)}{z_\mu}\frac{p_\nu(Y)}{z_\nu}\int_{\mathbb{C}^2}\frac{p_\mu(u-v)}{u-v}\,\frac{p_\nu(\bar{u}-(-\bar{v}))}{\bar{u}+\bar{v}}d\mu(u)d\mu(v). \tag{29}$$

En posant $u = a+b$, $v = a-b$, le jacobien du changement de variables vaut 4, et l'intégrale devient

$$C(\mu,\nu) = \frac{4}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}^2}\frac{Q_\mu(a,b)}{2b}\,\frac{Q_\nu(\bar{b},\bar{a})}{2\bar{a}}e^{-2|a|^2-2|b|^2}da_1da_2db_1db_2 \tag{30}$$

avec

$$Q_r(a,b) = (a+b)^r - (a-b)^r,\quad Q_\lambda(a,b) = \prod_i Q_{\lambda_i}(a,b) \tag{31}$$

et
(32)

$$C(\mu,\nu) = \frac{2^{\ell(\mu)+\ell(\nu)}}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}^2}\sum_{I,J}\prod_{k,l}\binom{\mu_k}{2i_k+1}\binom{\nu_l}{2j_l+1}a^{|\mu|-2|I|-\ell(\mu)}b^{2|I|+\ell(\mu)-1}\bar{a}^{2|J|+\ell(\nu)-1}\bar{b}^{|\nu|-2|J|}d\tau(a,b)$$

où $d\tau(a,b) = e^{-2|a|^2-2|b|^2}da_1da_2db_1db_2$. L'intégrale n'est non nulle que si $2(|I|+|J|) = n+1-\ell(\mu)-\ell(\nu) =: 2g$. On a

$$\int_{\mathbb{C}^2}|a|^{2k}|b|^{2l}d\tau(a,b) = \frac{\pi^2}{2^{k+l+2}}k!l! \tag{33}$$

d'où finalement
(34)

$$a^n_{\mu\nu} = \frac{n}{z_\mu z_\nu 2^{2g}}\sum_{g_1+g_2=g}(l(\mu)-2g_1-1)!(\ell(\nu)-2g_2-1)!\sum_{\substack{I\vDash g_1\\ J\vDash g_2}}\prod_k\binom{\mu_k}{2i_k+1}\prod_l\binom{\nu_l}{2j_l+1}.$$

1.2.4. On peut aussi développer $\sigma_1((u-v)X)$ sur les monomiales. On a $h_n(u-v) = u^{n-1}(u-v)$, de sorte que (28) devient

(35)
$$F(X,Y) = \sum_{\lambda,\mu} \int_{\mathbb{C}^2} u^{|\lambda|-\ell(\lambda)}(u-v)^{\ell(\lambda)-1}\bar{u}^{|\mu|-\ell(\mu)}(\bar{u}+\bar{v})^{\ell(\mu)-1} d\mu(u)d\mu(v) m_\lambda(X)m_\mu(Y)$$

et en évaluant l'intégrale, on retombe sur la somme (16).

1.2.5. *Généralisations.* Les coefficients $a^n_{\mu^1\mu^2\cdots\mu^m}$ ont été calculés par Poulhalon et Schaeffer [56]. Là encore, une preuve algébrique a été obtenue par Irving [29] au moyen d'une représentation intégrale similaire à la précédente.

1.2.6. *Formule de Harer-Zagier pondérée.* Le produit $c_{2n} \times c_{2^n}$ joue un rôle important dans plusieurs problèmes. Si on évalue la fonction symétrique

$$(2n-1)!!p_{2n} \times p_{2^n}(N) := \sum_{g=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \varepsilon_g(n) N^{n+1-2g}, \tag{36}$$

sur un entier N, le coefficient $\epsilon_g(n)$ compte le nombre de manières d'apparier les côtés d'un $2n$-gone de manière à obtenir une surface de genre g en les recollant. Ce calcul a été réalisé pour la première fois par Harer et Zagier [28] et refait de nombreuses fois par la suite avec des méthodes variées. Lass [45] a calculé la fonction symétrique générique $p_{2n} \times p_{2^n}$ par une méthode combinatoire. On peut facilement retrouver son résultat à partir des calculs précédents.

Le coefficient de m_μ dans $p_{2n} \times p_{2^n}$ est égal à

$$\langle p_{2n} \times p_{2^n}, h_\mu \rangle = \langle p_{2n}, p_{2^n} \times h_\mu \rangle = \langle \Gamma(p_{2n}), p_{2^n} \times h_\mu \rangle, \tag{37}$$

avec

$$\Gamma(p_{2n}) = \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{\lambda,\mu \vdash 2n} \frac{(2n-\ell(\lambda))!(2n-\ell(\mu))!}{(2n+1-\ell(\lambda)-\ell(\mu))!} m_\lambda \otimes m_\mu, \tag{38}$$

et

$$p_{2^n} = p_2^n = (2h_2 - h_1^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} h_2^{n-k} h_1^{2k}, \tag{39}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma(p_{2n}), p_{2^n} \times h_\mu \rangle &= \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} \frac{(n-k)!(2n-\ell(\mu))!}{(n+1-k-\ell(\mu))!} && (40)\\
&= \frac{n!(2n-\ell(\mu))!}{(2n-1)!(n+1-\ell(\mu))!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{n-k} \binom{n+1-\ell(\mu)}{k} && (41)\\
&= \frac{2^n n!(2n-\ell(\mu))!}{(2n-1)!(n+1-\ell(\mu))!} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n+1-\ell(\mu)} && (42)\\
&= \frac{1}{(2n-1)!!} \frac{(2n-\ell(\mu))!}{2^{n+1-\ell(\mu)}(n+1-\ell(\mu))!}. && (43)
\end{aligned}$$

On peut maintenant retrouver la formule originale de Harer-Zagier en insérant (23). Si x est binomial,

$$(2n-1)!!(p_{2n} \times p_{2^n})(x) = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(2n-p)!}{2^{n+1-p}(n+1-p)!} \binom{2n-1}{p-1} \binom{x}{p} \tag{44}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{x}{k+1} \tag{45}$$

$$= (2n-1)!! \mathrm{Res}_{z=0} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{2}{z}\right)^k (1+z)^x \frac{dz}{z^2} \tag{46}$$

$$= (2n-1)!! \mathrm{Res}_{z=0} \left(\frac{2+z}{z}\right)^n (1+z)^x \frac{dz}{z^2} \tag{47}$$

En posant

$$y = \frac{z}{2+z}, \text{ de sorte que } z = \frac{2y}{1-y}, \; dz = \frac{2dy}{(1-y)^2}, \tag{48}$$

cette dernière expression devient

$$\mathrm{Res}_{y=0} \frac{2dy}{(1-y)^2} \left(\frac{1-y}{2y}\right)^2 \frac{(1+y)^x}{(1-y)^x} \frac{1}{y^x} = \mathrm{Res}_{y=0} \frac{dy}{y^{n+2}} \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^x \tag{49}$$

ce qui donne finalement

$$(2n-1)!!(p_{2n} \times p_{2^n})(x) = (2n-1)!! \frac{1}{2} [y^{n+1}] \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^x. \tag{50}$$

C'est la formule de Harer-Zagier.

1.2.7. *Une généralisation de la formule de Harer-Zagier.* Jackson [33] a donné une formule pour $(p_{rn} \times p_r^n)(x)$ (avec encore x de type binomial). Pour l'obtenir, on repart de

$$(p_{rn} \times p_r^n)(x) = \langle p_{rn} \times p_r^n, h_{rn}(xX) \rangle \tag{51}$$

$$= \langle \Gamma(p_{rn}, p_r^n \otimes h_{rn}(xX) \rangle \tag{52}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{rn} c_{kl} \langle h_{rn;k} \otimes h_{rn;l}, p_r^n \otimes h_{rn}(xX) \rangle \tag{53}$$

où

$$c_{kl} := \frac{1}{(rn-1)!} \frac{(rn-k)!(rn-l)!}{(rn+1-k-l)!} \tag{54}$$

et

$$h_{n;p} = \sum_{\substack{\ell(\mu)=p \\ \mu \vdash n}} m_\mu \tag{55}$$

Donc, d'après (23),

$$(p_{rn} \times p_r^n)(x) = \sum_{k,l=1}^{rn} c_{kl} \langle h_{rn;k}, p_r^n \rangle \binom{x}{l} \binom{rn-1}{l-1}. \tag{56}$$

La série génératrice de $h_{n;k}$ est

$$\sum_{n,k} h_{n;k} t^n z^k = \sigma_t((1-q)X)|_{q=1-z} = \sum_\mu t^\mu \frac{p_\mu}{z_\mu} \prod_i \left(1-(1-z)^i\right)^{m_i(\mu)}, \tag{57}$$

de sorte que

$$\langle h_{rn;k}, p_r^n\rangle = [z^k]\,(1-(1-z)^r)^n \tag{58}$$

$$= (-1)^k \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{jr}{k}. \tag{59}$$

Alors,

$$(p_{rn}\times p_r^n)(x) = \frac{1}{(rn-1)!}\sum_{jkl}(-1)^{j+k}\frac{(rn-k)!(rn-l)!}{(rn+1-k-l)!}\binom{rn-1}{l-1}\binom{n}{j}\binom{jr}{k}\binom{x}{l} \tag{60}$$

$$= \sum_{jkl}(-1)^{j+k}\binom{rn-k}{l-1}\binom{n}{j}\binom{jr}{k}\binom{x}{l} \tag{61}$$

$$= \sum_{j,l}(-1)^{j}\binom{n}{j}\binom{x}{l}\sum_{k}(-1)^{k}\binom{rn-k}{l-1}\binom{jr}{k} \tag{62}$$

En appliquant encore l'identité (20), la somme sur k devient $\binom{rn-rj}{rn-l+1}$, et donc

$$(p_{rn}\times p_r^n)(x) = \sum_{l}\sum_{j}(-1)^{j}\binom{n}{j}\binom{rn-rj}{rn-l+1}\binom{x}{l}. \tag{63}$$

Pour extraire le coefficient de x^k, Jackson utilise l'endomorphisme

$$\psi_x(x^k) = \binom{x}{k} \tag{64}$$

qui permet d'écrire

$$(p_{rn}\times p_r^n)(x) = \psi_x \sum_{j,l}(-1)^{j}\binom{n}{j}\binom{rn-rj}{l-1-rj}x^{l-1-rj}x^{1+rk} \tag{65}$$

$$= \psi_x \sum_{j}(-1)^{j}\binom{n}{j}x^{1+rj}(1+x)^{rn-rj} \tag{66}$$

$$= \psi_x x((1+x)^r - x^r)^n. \tag{67}$$

En appliquant l'identité

$$\psi_x x^k(1+z)^l = \binom{x+l}{k+l} \tag{68}$$

et l'expression

$$S(m,n) = \frac{1}{m!}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}j^m \tag{69}$$

des nombres de Stirling de 2ème espèce, il arrive finalement à l'expression

$$[x^k](p_{rn}\times p_r^n)(x) = \frac{(-1)^n}{(rn+1)!}\sum_{m=n+k}^{rn+1}\binom{m}{k}r^{m-k}s(rn+1,m)S(m-k,n). \tag{70}$$

1.2.8. Si $x_1,\dots,x_k$ sont des éléments binomiaux, d'un côté

$$h_n(x_1X)\times\cdots\times h_n(x_kX) = \sum_{\mu^1,\dots,\mu^k\vdash n} x_1^{\ell(\mu^1)}\frac{p_{\mu_1}}{z_{\mu^1}}\times\cdots\times x_k^{\ell(\mu^k)}\frac{p_{\mu_k}}{z_{\mu^k}} \tag{71}$$

$$= \frac{1}{(n!)^k}\sum_{\mu^1,\dots,\mu^k\vdash n} x_1^{\ell(\mu^1)}c_{\mu^1}\times\cdots\times x_k^{\ell(\mu^k)}c_{\mu^k} \tag{72}$$

et de l'autre,

$$h_n(x_1X)\times\cdots\times h_n(x_kX)=\sum_{\lambda\vdash n}\prod_{i=1}^{k}s_\lambda(x_i)\frac{s_\lambda(X)}{f_\lambda^{k-1}} \tag{73}$$

où

$$s_\lambda(x_i)=\frac{1}{h(\lambda)}\prod_{\square\in\lambda}(x_i+c_\square),\quad f_\lambda=\frac{n!}{h(\lambda)} \tag{74}$$

On a donc [32]

$$\sum_{\mu^1,\dots,\mu^k\vdash n}a^{\nu}_{\mu^1,\dots,\mu^k}\prod_{i=1}^{k}x_i^{\ell(\mu_i)}=\frac{1}{n!}\sum_{\lambda\vdash n}f_\lambda\chi^\lambda_\nu\prod_{i=1}^{k}\prod_{\square\in\lambda}(x_i+c_\square) \tag{75}$$

Le polynôme $c_\lambda(x)=\prod_{\square\in\lambda}(x+c_\square)$ n'a de terme en x que si $\lambda=(n-k,1^k)$ est une équerre, et dans ce cas, le coefficient de x est $(-1)^k k!(n-1-k)!$ (produit des contenus). pour cette même partition, le coefficient de x^{n-1} est $\frac{1}{2}n(n-2k-1)$ (somme des contenus). On en déduit que le nombre de factorisations d'un n-cycle en un produit de a transpositions et b n-cycles est

$$\frac{1}{n!}\binom{a+b}{a}(n-1)!^b\left(\frac{n}{2}\right)^a\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k(b-1)}}{\binom{n-1}{k}^{b-1}}(n-2k-1)^a. \tag{76}$$

En particulier, la série génératrice exponentielle du nombre de factorisations d'un n-cycle en produit de a transpositions est

$$T_n(x)=\sum_{a\geq 0}t(n,a)\frac{x^a}{a!}=\frac{1}{n!}\sum_{a\geq 0}\frac{x^a}{a!}\left(\frac{n}{2}\right)^a\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-2k-1)^a, \tag{77}$$

et en écrivant

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-2k-1)^a=\left(z\frac{d}{dz}\right)^a\Big|_{z=1}\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-1}{k}z^{n-2k-1} \tag{78}$$

$$=\left(z\frac{d}{dz}\right)^a\Big|_{z=1}\left(z-\frac{1}{z}\right)^{n-1} \tag{79}$$

on obtient

$$T_n(x)=\frac{1}{n!}\exp\left\{\frac{nx}{2}z\frac{d}{dz}\right\}\Big|_{z=1}\left(z-\frac{1}{z}\right)^{n-1}=\frac{1}{n!}e^{\binom{n}{2}x}\left(1-e^{-nx}\right)^{n-1}. \tag{80}$$