3. Intégration sur $M_N(\mathbb{C})$

3.1. Une intégrale élémentaire. Pour intégrer sur $M_N(\mathbb{C})$, ou sur $GL(N,\mathbb{C})$, on utlisera la mesure de probabilité gaussienne

$$d\nu(Z) = (\pi)^{-N^2} e^{-\mathrm{tr}\,(ZZ^*)} dZ\,, \quad dZ = \prod_{k,l=1}^{N} dx_{kl}dy_{kl}\,, \quad z_{kl} = x_{kl} + iy_{kl}\,. \tag{114}$$

On a une première identité fondamentale, qui se trouve par exemple dans [47, VII.5, ex. 5 p. 446] :

$$\int_{M_N(\mathbb{C})} s_\lambda(AZBZ^*)d\nu(Z) = h(\lambda)s_\lambda(A)s_\lambda(B) \tag{115}$$

où $h(\lambda)$ est le produit des longueurs d'équerres de λ, $n = |\lambda|$, et A, B sont des matrices hermitiennes arbitraires.

On déduit habituellement cette identité du fait que les fonctions de Schur sont proportionnelles aux polynômes zonaux du couple de Gelfand $GL(N,\mathbb{C}), U(N))$.

Si l'on interprète les éléments de $Sym \otimes Sym$ comme des fonctions d'un produit tensoriel de matrices, le membre droit de (115) est

$$n!\ \frac{s_\lambda(A)s_\lambda(B)}{f_\lambda} = n!\ \Gamma(s_\lambda)(A\otimes B). \tag{116}$$

En comparant avec (9), on voit que (115) est équivalente à

$$\int_{M_N(\mathbb{C})} p_\lambda(AZBZ^*)d\nu(Z) = n!\Gamma(p_\lambda) = \sum_{\alpha,\beta\vdash n} a^\lambda_{\alpha\beta} p_\alpha(A)p_\beta(B)\,. \tag{117}$$

On voit ainsi apparaître un premier lien entre intégrales matricielles et produits de classes, apparemment observé pour la première fois dans [27]. Cette identité peut montrer directement avec la formule de Wick (voir Appendice), qui peut s'énoncer comme suit dans ce contexte : posons

$$\langle f(Z)\rangle = \int_{M_N(\mathbb{C})} f(Z)d\nu(Z). \tag{118}$$

Alors, si $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sont des formes $\mathbb{R}$-linaires sur $M_N(\mathbb{C})$,

$$\langle f_1 \cdots f_{2k-1}\rangle = 0 \tag{119}$$

$$\langle f_1 \cdots f_{2k}\rangle = \mathrm{Hf}\,(\langle f_i f_j\rangle) \tag{120}$$

où le hafnien d'une matrice symétrique est défini par $(\langle f_i f_j\rangle)$

$$\mathrm{Hf}\,(\langle f_i f_j\rangle)_{1\le i,j\le 2k} = \sum \prod_{i=1}^{k} \langle f_{l_i} f_{m_j}\rangle \tag{121}$$

la somme portant sur tous les couples de multi-indices $L = (l_1 < l_2 < \cdots < l_k)$ et M tels que $l_i < m_i$ et $L \cup M = [1, 2k]$.

Dans le cas qui nous occupe, les "propagateurs" sont données par

$$\langle z_{ij} z_{kl}\rangle = 0\,, \tag{122}$$

$$\langle z^*_{ij} z^*_{kl}\rangle = 0\,, \tag{123}$$

$$\langle z_{ij} z^*_{kl}\rangle = \delta_{il}\delta_{jk}\,. \tag{124}$$

Posons $M = AZBZ^*$, et notons σ la permutation de type cyclique λ

$$\sigma = (12\cdots\lambda_1)(\lambda_1+1, \lambda_1+2, \cdots, \lambda_1+\lambda_2)\cdots(\cdots n)\,. \tag{125}$$

Avec ces notations,

$$\begin{aligned}\langle p_\lambda(M)\rangle &= \sum_{i_1,\dots,i_n} \langle M_{i_1,i_{\sigma(1)}} M_{i_2,i_{\sigma(2)}} \cdots M_{i_n,i_{\sigma(n)}}\rangle \\ &= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n\\ j_1,\dots,j_n}} a_{i_1} b_{j_1} a_{i_2} b_{j_2} \cdots a_{i_n} b_{j_n} \langle z_{i_1 j_1} z_{i_2 j_2} \cdots z_{i_n j_n} \bar z_{i_{\sigma(1)} j_1} \cdots \bar z_{i_{\sigma(n)} j_n}\rangle\end{aligned}$$

Dans le Hafnien seuls les termes du type

$$\langle z_{i_1 j_1} \bar z_{i_{\sigma\tau(1)} j_{\tau(1)}}\rangle \cdots \langle z_{i_n j_n} \bar z_{i_{\sigma\tau(n)} j_{\tau(n)}}\rangle \quad (\tau \in \mathfrak{S}_n) \tag{126}$$

survivent, et valent

$$\prod_{k=1}^n \delta_{i_k, i_{\sigma\tau(k)}} \delta_{j_k, j_{\tau(k)}}. \tag{127}$$

L'intégrale vaut donc finalement

$$\begin{aligned}\langle p_\lambda(AZBZ^*)\rangle &= \sum_{I,J} a_I b_J \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r} \prod_{k=1}^n \delta_{i_k, i_{\sigma\tau(k)}} \delta_{j_k, j_{\tau(k)}} \\ &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r} Z(\sigma\tau)(A) Z(\tau)(B)\end{aligned}$$

car le produit de deltas n'est non nul que si I est constante sur les orbites de $\sigma\tau$ et J constante sur les orbites de τ. Le coefficient de $p_\alpha(A)p_\beta(B)$ dans la somme est donc égal au nombre de permutations τ de type β telles que $\sigma\tau$ soit de type α, c'est à dire à $c^\alpha_{\lambda\beta} = c^\lambda_{\alpha\beta}$. medskip

Le même calcul montre que l'intégrale sur les matrices rectangulaires

$$\begin{aligned}\langle p_\lambda\rangle_{N_1,N_2} &= \pi^{-N_1N_2} \int_{M_{N_1\times N_2}(\mathbb{C})} p_\lambda(ZZ^*) e^{-\operatorname{tr} ZZ^*} \prod_{i,j} dX_{ij} dY_{ij} \\ &= \sum_{\pi_1\pi_2=\sigma} N_1^{l(\pi_1)} N_2^{l(\pi_2)},\end{aligned} \tag{128}$$

où σ est une permutation de type cyclique λ, et $l(\pi)$ est le nombre de cycles de π. La série génératrice

$$Z_{N_1,N_2} = \sum_\lambda \frac{p_\lambda}{z_\lambda} \langle p_\lambda\rangle_{N_1,N_2} = \sum_{\lambda\mu\mu} a^\lambda_{\mu\nu} N_1^{\ell(\mu)} N_2^{\ell(\nu)} p_\lambda \tag{129}$$

est étudiée dans [49]. Elle s'interprète comme a série génératrice des dessins d'enfants de Grothendieck. Le coefficient de $N_1^i N_2^j$ dans $\langle p_\lambda\rangle_{N_1,N_2}$ compte les revêtements ramifiés de la sphère avec un point singulier de type λ en ∞, et tels que 0 et 1 aient respectivement $n-i$ et $n-j$ préimages.

Exercice. Formons la fonction génératrice

$$\begin{aligned}F(t;A,B) &= \int_{M_N(\mathbb{C})} e^{t\operatorname{tr}(AZBZ^*)} d\nu(Z) \\ &= \sum_{n\ge 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{\lambda\vdash n} f_\lambda \int_{M_N(\mathbb{C})} s_\lambda(AZBZ^*) d\nu(Z).\end{aligned} \tag{130}$$

On peut supposer que A et B sont diagonales, car

$$\operatorname{tr}(U^*AUZV^*BVZ^*) = \operatorname{tr}(AUZV^*BVZ^*U^*) = \operatorname{tr}[(A(UZV^*)B(UZV^*)^*]. \tag{131}$$

Alors,

(132)
$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(\operatorname{tr} ZZ^* - 2t\operatorname{tr}(AZBZ^*)) &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j}(1-2ta_ib_j)\, z_{ij}z^*_{ji}\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j}(1-2ta_ib_j)\,|z_{ij}|^2\end{aligned}$$

de sorte que

(133)
$$F(t;A,B) = \prod_{i,j=1}^{N}\frac{1}{1-2ta_ibj} = \sum_{n\geq 0}2^nt^n\sum_{\lambda\vdash n}s_\lambda(A)s_\lambda(B).$$

3.2. Une fonction génératrice. Soit ρ une partition de r. Alors,

(134)
$$\int_{M_N(\mathbb{C})}p_\rho(AZBZ^*)\frac{[p_1(AZBZ^*)]^{n-r}}{2^{n-r}}d\nu(Z) = \sum_{\alpha,\beta\vdash r}c^{\rho 1^{n-r}}_{\alpha\beta}\,p_\alpha(A)p_\beta(B)$$

(135)
$$= n!\,\Gamma(p_{\rho 1^{n-r}})\,.$$

Le coproduit de l'élément $\mathsf{a}_\rho = \sum_n \mathsf{a}_{\rho;n}$, où $\mathsf{a}_{\rho;n} = Z(a_{\rho;n}) = (n)_r p_{\rho,1^{n-r}}$, et les $a_{\rho;n}$ sont les classe normalisées de Kerov et Olshanski [41] est alors donné par

(136)
$$\Gamma\left(\sum_{n\geq r}(n)_r p_{\rho 1^{n-r}}\right) = \int_{M_N(\mathbb{C})}p_\rho(AZBZ^*)e^{p_1(AZBZ^*)}d\nu(Z)$$

(137)
$$= \int_{M_N(\mathbb{C})}p_\rho(AZBZ^*)d\mu(Z)$$

où

(138)
$$d\mu(Z) = d\mu_{A,B}(Z) = (\pi)^{-N^2}e^{-\operatorname{tr}(ZZ^* - AZBZ^*)}dZ$$

est encore une mesure gaussienne, si l'on suppose que les valeurs propres de A et B sont < 1. En effet, on peut supposer que $A = \operatorname{diag}(a_i)$, $B = \operatorname{diag}(b_i)$, et dans ce cas, $\operatorname{tr}(ZZ^* - AZBZ^*) = \sum_{i,j}(1-a_ib_j)|z_{ij}|^2$.

La masse totale de $d\mu$ est alors

(139)
$$\mathcal{Z} = \int_{M_N(\mathbb{C})}d\mu(Z) = \prod_{i,j}\frac{1}{1-a_ib_j} = \sigma_1(AB)\,.$$

Pour une fonction f sur $M_N(\mathbb{C})$, notons

(140)
$$\langle\!\langle f\rangle\!\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}}\int_{M_N(\mathbb{C})}f(Z)d\mu(Z)$$

son espérance. Comme $d\mu$ est gaussienne, on peut encore calculer les espérances des monômes au moyen de la formule de Wick. Les propagateurs sont maintenant données par

(141)
$$\langle\!\langle z_{ij}z_{kl}\rangle\!\rangle = 0\,,$$

(142)
$$\langle\!\langle z^*_{ij}z^*_{kl}\rangle\!\rangle = 0\,,$$

(143)
$$\langle\!\langle z_{ij}z^*_{kl}\rangle\!\rangle = \delta_{il}\delta_{jk}\frac{1}{1-a_ib_j}\,.$$

Posons $M = AZBZ^*$, et notons encore σ la permutation de type cyclique ρ

(144)
$$\sigma = (12\cdots\rho_1)(\rho_1+1,\rho_1+2,\cdots,\rho_1+\rho_2)\cdots(\cdots r)\,.$$