Université de Marne-la-Vallée
Licence d'Informatique
Mathématiques Discrètes

Session de Janvier 2001

Durée: 3 heures

Les notes de cours et les calculatrices sont autorisées
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque
il n'est pas indispensable de les traiter tous

Exercice 1. — Calculer les sommes suivantes (on pourra appliquer le calcul des différences finies)

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^3 - k^2 + 1$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)}$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k2^k$ (où $H_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}$).

Exercice 2. — Trouver deux entiers u et v tels que $473u+523v = 1$. En déduire l'inverse de 473 dans $\mathbf{Z}/523\mathbf{Z}$.

Exercice 3. — Trouver le plus petit entier positif x vérifiant les trois congruences

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 2 \mod 13 \\ x \equiv 1 \mod 17 \end{cases}$$

Exercice 4. — Trouver la série génératrice $S(x) = \sum_{n\geq 0} S_n x^n$ de la suite

$$S_n = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k}\binom{r}{n-2k} .$$

Exercice 5. — Soit (a_n) la suite définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \cdots + (n+1)a_0 \end{cases} .$$

a) Calculer la fonction génératrice $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

b) En déduire une formule explicite pour a_n en fonction de n.

Exercice 6. — Soit p un nombre premier.
a) Montrer que, dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, les seules solutions de l'équation $x^2 - \bar{1} = \bar{0}$ sont $x = \pm\bar{1}$.

b) En déduire que les produit des éléments non nuls de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est égal à $-\bar{1}$

c) En déduire le Théorème de Wilson : si p est premier, $(p-1)! + 1$ est divisible par p.

d) Montrer que, réciproquement, si $(m-1)! + 1$ est divisible par m, alors m est premier.