Arbres recouvrants

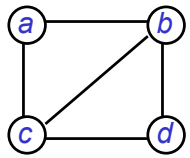
Calcul d'un arbre de coût minimal
recouvrant un graphe connexe

Applications conception de réseaux
(téléphonique, électrique, d'intercommunication,...)
et étude de leur fonctionnement

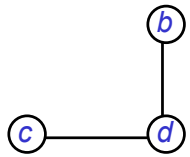
Algorithmes
de Prim $O(n^2)$ $O(|A| \log n)$
(adapté aux matrices d'adjacence)
de Kruskal $O(|A| \log |A|)$
(adapté aux listes de successeurs
et graphes contenant peu d'arêtes)

Graphes non orientés

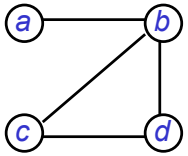
$G=(S, A)$
S sommets card $S = n$
A arêtes
$A = \{\{s, t\}, \ldots\}$ $s \neq t, \ldots$ (pas de boucle)



Sous-graphe
$G' \subseteq G$: G' graphe (S', A')
avec $S' \subseteq S$ et $A' \subseteq A$
(à comparer avec la notion de sous-graphe *induit*)

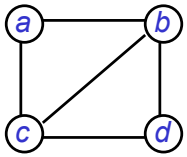


Sous-graphe recouvrant
si $S' = S$

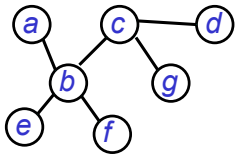


Sous-graphe

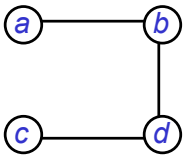
Graphe non orienté $G = (S, A)$



Arbre
graphe connexe sans cycle (simple)
(à comparer avec la notion d'arbre *enraciné*)



Forêt
union d'arbres disjoints

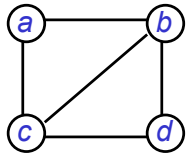


Arbre recouvrant pour G
sous-graphe recouvrant qui est un arbre

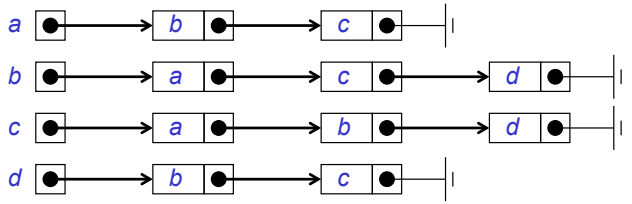
Représentations

Matrice d'adjacence
(symétrique)

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	1	1
c	1	1	0	1
d	0	1	1	0



Listes de successeurs
(redondantes)



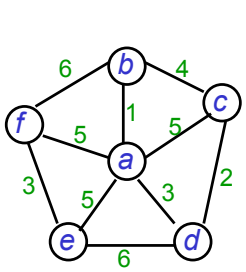
Problème ARCM

UMLV ©

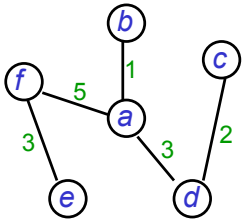
Graphe valué $G = (S, A, v)$ avec valuation $v : A \rightarrow \mathbf{R}$
***non-orienté* et connexe**

Coût d'un sous-graphe $G' = (S', A') : \Sigma\ (v(p,q) \mid (p,q) \in A')$

Problème : déterminer un ARCM, arbre recouvrant de coût minimal pour G



coût = 14

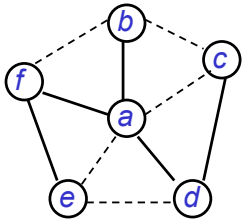


Arbre recouvrant

UMLV ©

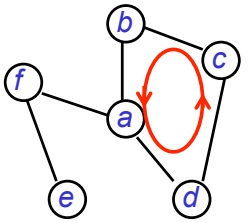
Graphe non-orienté et connexe $G = (S, A)$ card $S = n$
$T = (S, B)$ arbre recouvrant pour G

Propriétés
- T possède n-1 arêtes : card $B = n$-1
- si $\{p, q\} \in A$-B alors $H = (S, B + \{p,q\})$ possède un cycle



card $S = 6$

card $B = 5$

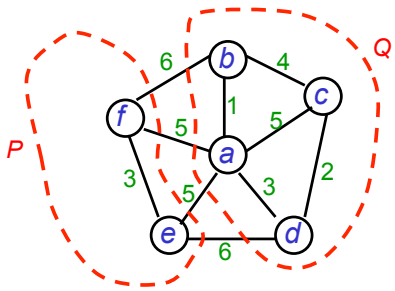


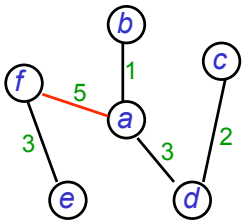
Coupure

UMLV ©

Graphe valué $G = (S, A, v)$ non-orienté et connexe
$\{P, Q\}$ partition de S

Théorème Si $\{p, q\}$ une arête de coût minimal entre P et Q alors il existe un ARCM qui contient $\{p, q\}$





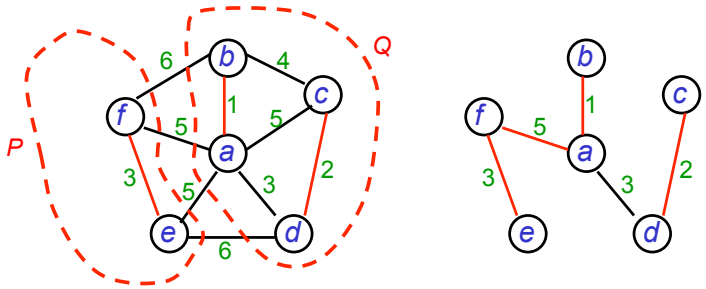
UMLV ©

Preuve
Soit $\{p, q\}$ une arête de coût minimal entre P et Q
$p \in P \quad q \in Q$
Soit $T = (S, B)$ un ARCM pour G

si $\{p, q\} \in B$ terminé
sinon
$H = (S, B + \{p, q\})$ contient un cycle
ce cycle contient $\{u, v\} \in B,\ u \in P,\ v \in Q$
soit $T' = (S, B - \{u, v\} + \{p, q\})$
T' est un arbre recouvrant et
coût $(T') \leq$ coût $(T) \Rightarrow$ coût (T') = coût (T)
donc $\{p, q\}$ contenu dans l'ARCM T'

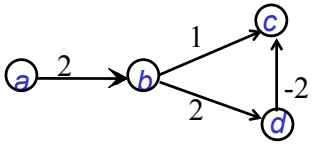
Coupure

Théorème (généralisation) Soit *F* une forêt contenue dans un ARCM. Soit {*P*, *Q*} partition de *S* qui respecte *F* (pas d'arc entre *P* et *Q*). Si {*p*, *q*} une arête de coût minimal entre *P* et *Q* alors il existe un ARCM qui contient *F*∪{{*p*, *q*}}



Algorithmes gloutons

Traitement séquentiel des données
avec optimisation locale
Mais ne donne pas en général l'optimalité globale



Plus court chemin de *a* à *c* ?

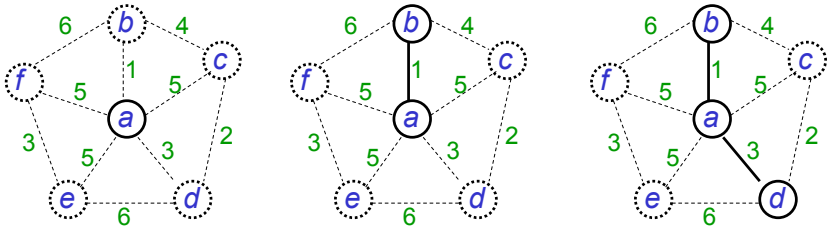
Optimalité pour

- rendeur de monnaie
- codage de Huffman
- algorithme de Dijkstra
- ARCM par algorithmes de Prim et de Kruskal

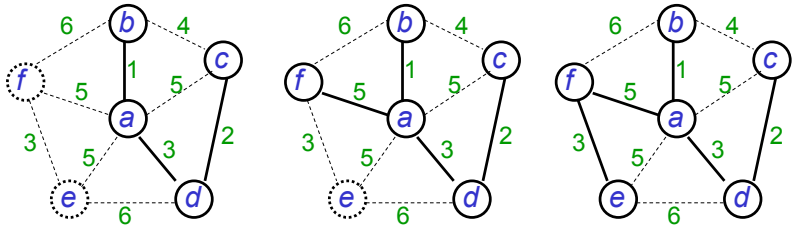
Méthode de Prim (1957)

Calcul d'un ARCM :
faire grossir un sous-arbre jusqu'au recouvrement du graphe

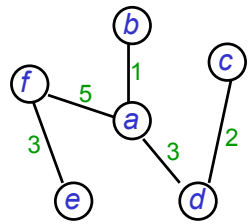
Exemple



Exemple (suite)



ARCM
coût = 14



Algorithme de Prim

```
arbre PRIM( graphe ({1, 2, ..., n}, A, v) ) {
        T ← {1} ;
        B ← ∅ ;
        tant que card T < n faire {
                {p, q} ← arête de coût minimal
                         telle que p ∈ T et q ∉ T ;
                T ← T + {q} ;
                B ← B + {p, q} ;
        }
        retour (T, B) ;
}
```

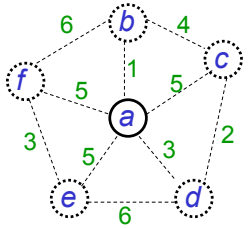

Implémentation

Tables `proche` et `coût` pour trouver l'arête $\{p, q\}$

$q \notin T$ `proche[q]` $= p \in T$ ssi $v(p, q) = \min \{ v(p', q) \mid p' \in T \}$

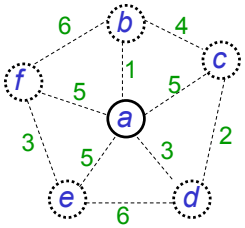
$q \notin T$ `coût[q]` $= v($`proche[q]`$, q)$

$q \in T$ `coût[q]` $= \perp$



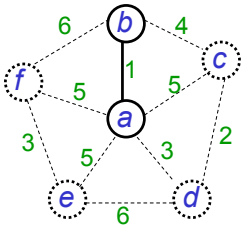
	a	b	c	d	e	f
proche		a	a	a	a	a
coût	⊥	1	5	3	5	5

Une étape



	a	b	c	d	e	f
proche		a	a	a	a	a
coût	⊥	1	5	3	5	5

ajout de b et $\{a, b\}$



	a	b	c	d	e	f
proche		a	b	a	a	a
coût	⊥	⊥	4	3	5	5

Temps O(degre(b))

Temps d'exécution total: O(n^2)

Implémentaiton plus fine

Avec un tas binaire:

extraction d'une arête de coût minimal: O(log n)

mise à jour des coûts: O(|A|) mises à jour au total, chacune prend le temps O(log n)

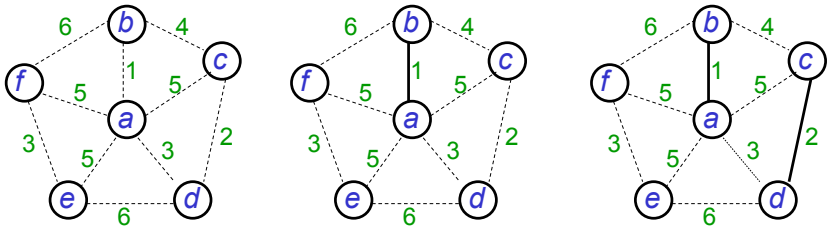
Au total: O(n·log n+|A|·log n)=O(|A|·log n)

Cette complexité peut être améliorée à O(|A|+n·log n) en utilisant le tas de Fibonacci

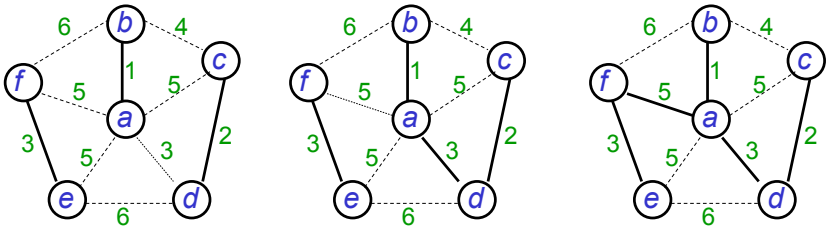
Méthode de Kruskal (1956)

Calcul d'un ARCM :
réunir deux sous-arbres disjoints par une arête de coût minimal

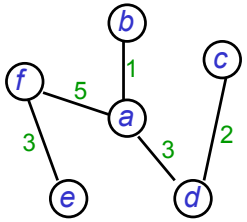
Exemple



Exemple (suite)



ARCM
coût = 14



Algorithme de Kruskal


```
arbre KRUSKAL( graphe ({1, 2, ..., n}, A, v) ) {
        Partition ← { {1}, {2}, ..., {n} } ;
        B ← ∅ ;
        tant que card Partition > 1 faire {
                {p, q} ← arête de coût minimal telle que
                         CLASSE(p) ≠ CLASSE(q) ;
                B ← B + {p, q} ;
                remplacer dans Partition CLASSE(p) et
                CLASSE(q) par leur UNION ;
        }
        retour ( ({1, 2, ..., n}, B ) ;
}
```


CLASSE / UNION

Gestion d'une partition de {1, 2, …, *n*} avec les **opérations**
CLASSE : numéro de classe d'un élément
UNION : union de classes disjointes

Exemple n = 7
soit 1 ≡ 2 ; {1, 2} {3} {4} {5} {6} {7}
soit 5 ≡ 6 ; {1, 2} {3} {4} {5, 6} {7}
soit 3 ≡ 4 ; {1, 2} {3, 4} {5, 6} {7}
soit 1 ≡ 4 ; {1, 2, 3, 4} {5, 6} {7}
est-ce que 2 ≡ 3 ? oui car 2 et 3 dans la même classe

Exemple d'application : test de connexité d'un graphe non-orienté

Implémentations possibles
1. table simple
2. listes chaînées
3. arbres

Par table simple

UMLV ©

	1	2	3	4	5	6	7
CLASSE	1	1	3	3	5	5	7

représente {1,2} {3,4} {5,6} {7}

```
UNION des classes (disjointes) de p et q
{       x ← CLASSE [p] ;   y ← CLASSE [q] ;
        pour k ← 1 à n faire
                si CLASSE [k] = y alors
                        CLASSE [k] ← x ;
}
```

Temps
CLASSE : constant
UNION : O(*n*)

	1	2	3	4	5	6	7
CLASSE	1	1	1	1	5	5	7

représente {1,2,3,4} {5,6} {7}

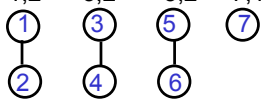
Par listes chaînées

UMLV ©

Par arbres

UMLV ©

partition {1,2} {3,4} {5,6} {7}
CLASSE,TAILLE 1,2 3,2 5,2 7,1
arbres

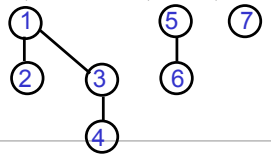


	1	2	3	4	5	6	7
P	-	1	-	3	-	5	-

```
CLASSE (i ) {
        k ←  i ;
        tant que  P[k] défini faire k ←  P[k] ;
        retour ( CLASSE[k] ) ;
}
```

Temps
CLASSE : O(*n*)
UNION : constant

partition {1,2,3,4} {5,6} {7}
CLASSE,TAILLE 1,4 5,2 7,1
arbres



	1	2	3	4	5	6	7
P	-	1	1	3	-	5	-

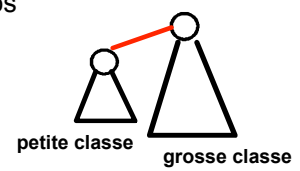
Union des arbres

UMLV ©

Éviter des arbres filiformes pour réduire le temps de calcul de CLASSE (*i*)

Stratégie pour UNION : toujours mettre le petit arbre enfant de la racine du gros

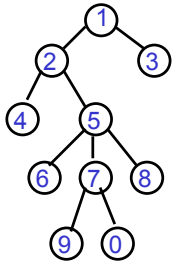
Temps
CLASSE : O(log*n*)
UNION : constant

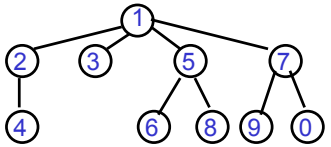


Preuve
niveau(*i*) augmente de 1 quand
union de *P* et *Q*, card *P* ≤ card *Q* et *i* ∈ *P*
i.e., quand la taille de la classe de *i* double au moins
Ceci ne peut arriver que $\lfloor \log_2 n \rfloor$ fois au plus

Compression de chemins

Idée : réduire le temps de calcul de `CLASSE(`*i*`)`
en « aplatissant » l'arbre à chaque calcul





après calcul
de `CLASSE(`7`)`

Temps de *n* calculs de `CLASSE` : $O(n\,\alpha(n))$

où $\alpha(n)$ est le plus petit entier *k* tel que $n \le 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ (*k* fois 2)

Preuve [Aho, Hopcroft, Ullman, 1974]

Ackermann

fonction A : **N** x **N** → **N** définie par

$A(0, y) = 1$ $\quad y \ge 0$
$A(1, 0) = 2$
$A(x, 0) = x + 2$ $\quad x \ge 2$
$A(x, y) = A(A(x\text{-}1, y), y\text{-}1)$ $\quad x, y \ge 1$

Propriétés

$y = 0$ $\quad A(x, 0) = x+2$ $\quad x \ge 2$

$y = 1$ $\quad A(x, 1) = 2.x$ $\quad x \ge 1$
car $\quad A(1,1) = A(A(0,1),0) = A(1,0) = 2$
$\quad A(x,1) = A(A(x\text{-}1,1),0) = A(x\text{-}1,1)+2, \ldots$

$y = 2$ $\quad A(x, 2) = 2^x$ $\quad x \ge 1$
car $\quad A(1,2) = A(A(0,2),1) = A(1,1) = 2$
$\quad A(x,2) = A(A(x\text{-}1,2),1) = 2.A(x\text{-}1,2) , \ldots$

Ackermann

$y = 3$ $\quad A(x,3) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ (*x* exemplaires) « tour de 2 en *x* exemplaires »

$\alpha(n)$ = plus petit *k* tel que $n \le A(k, 3)$

$A(4,4)$ = « tour de 2 en 65536 exemplaires »

La fonction d'Ackermann croit plus vite que n'importe quelle fonction *primitive-recursive*

pour tout *n* que l'on peut rencontrer en pratique, $\alpha(n) \le 4$

Algorithme de Kruskal: temps d'execution


```
arbre KRUSKAL( graphe ({1, 2, ..., n}, A, v) ) {
        Partition ← { {1}, {2}, ..., {n} } ;
        B ← ∅ ;
        tant que card Partition > 1 faire {
                {p, q} ← arête de coût minimal telle que
                        CLASSE(p) ≠ CLASSE(q) ;
                B ← B + {p, q} ;
                remplacer dans Partition CLASSE(p) et
                CLASSE(q) par leur UNION ;
        }
        retour ( ({1, 2, ..., n}, B ) ;
}
```

Implémentation possible:
On peut trier les arêtes au préalable dans l'ordre croissant des coûts, en temps $O(|A| \cdot \log |A|)$;
La suite de $O(|A|)$ opérations `CLASSE-UNION` prend $O(|A| \cdot \alpha(|A|))$;
Au final, le temps est de $O(|A| \cdot \log |A|) = O(|A| \cdot \log n)$