Correction examen Automates

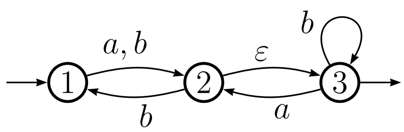
—2006-2007—

22 décembre 2006 - 2 heures

Les documents sont interdits. Les exercices sont indépendants. On pourra admettre la réponse à une question pour passer à la question suivante.

▸ **Exercice 1.** *Calculer l'automate de Thompson de l'expression rationnelle* $L = a^*(ab)^*$*, puis un automate reconnaissant le complément de ce langage.*

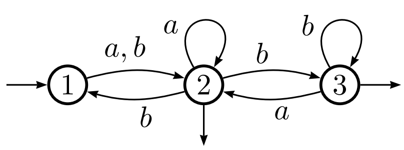
▸ **Exercice 2.** *Calculer une expression représentant l'intersection du langage représenté par l'automate* $\mathcal{A}_1$ *ci-dessous avec le langage* $(ab^*a)^*$ *:*



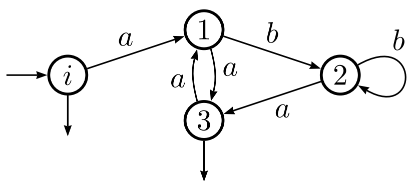
✂ -

Pour calculer l'intersection, il faut deux automates sans ε-transitions.

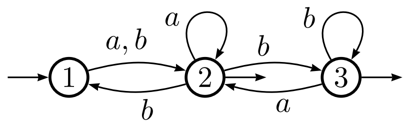
i) Suppression des ε-transitions dans l'automate $\mathcal{A}$. On a une seule ε-transition, le seul état qui a des ε-successeurs est donc Q, son ε-successeur est R. Donc pour toute transition partant de R, il faut ajouter une transition partant de Q avec la même étiquette et la même destination. Comme R est terminal, il faut rendre Q terminal, d'où :

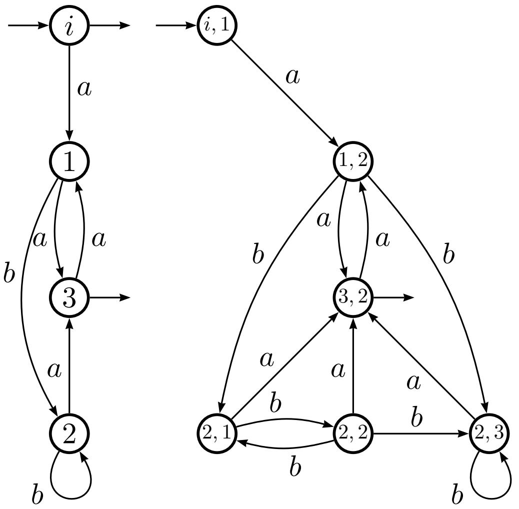


ii) Automate des positions de $(ab^*a)^*$:

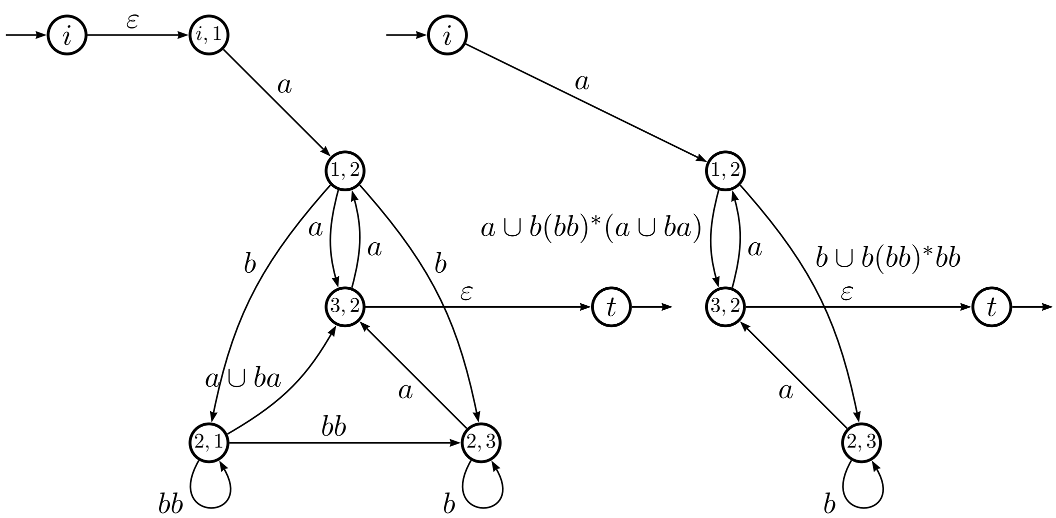


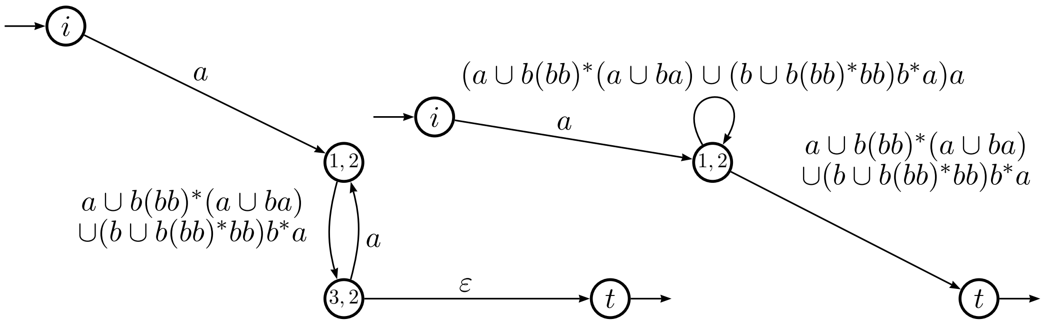
iii) Automate reconnaissant l'intersection





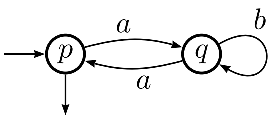
iv) Calcul de l'expression à partir de l'automate





En supprimant le dernier état, on trouve :
$a((a \cup b(bb)^*(a \cup ba) \cup (b \cup b(bb)^*bb)b^*a)a)^*(a \cup b(bb)^*(a \cup ba) \cup (b \cup b(bb)^*bb)b^*a)$.

Remarque : Si on est malin, on voit que l'automate suivant reconnaît $(ab^*a)^*$:

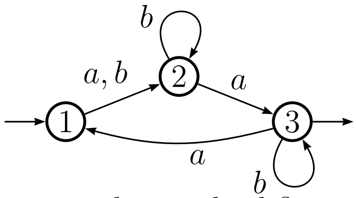


ce qui simplifie un peu les calculs ; on obtient :
$a(bb \cup (a \cup bb^*a \cup ba)a)^*(a \cup bb^*a \cup ba) = (a(bb \cup (a \cup bb^*a \cup ba)))^+$

- ✂

▸ **Exercice 3.** *Un automate* déterministe et complet $\mathcal{A}$ *est* synchronisable *s'il existe un mot w et un état s tels que, quel que soit l'état p dont on part, le chemin étiqueté par w qui part de p arrive toujours à s. Dans ce cas, on appelle w mot synchronisant pour $\mathcal{A}$ et s état de synchronisation de w.*

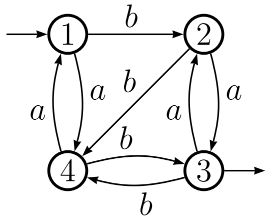
1. *Montrer que le mot $baab$ est un mot synchronisant pour l'automate $\mathcal{A}_2$ ci-dessous :*



Quel est l'état de synchronisation du mot $baab$?

2. *Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux automates déterministes complets. Montrer que si u est un mot synchronisant pour $\mathcal{A}$ et v est un mot synchronisant pour $\mathcal{B}$, alors uv est un mot synchronisant pour l'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.*

3. *À partir d'un automate $\mathcal{A}$, on construit l'automate $P(\mathcal{A})$ en rendant tous les états de $\mathcal{A}$ initiaux puis en déterminisant. Calculer $P(\mathcal{A}_2)$ ($\mathcal{A}_2$ est l'automate donné en 1).*
4. *Montrer que $\mathcal{A}$ est synchronisable si et seulement si $P(\mathcal{A})$ possède un état "singleton", c'est-à-dire un état qui correspond à un ensemble $\{p\}$, où p est un état de $\mathcal{A}$. On montrera que dans ce cas il existe un mot synchronisant w tel que p est l'état de synchronisation de w.*
5. *Montrer que l'automate $\mathcal{A}_3$ ci-dessous n'est pas synchronisable :*



6. *(Bonus) Montrer que si un automate est synchronisable, il existe un mot synchronisant pour cet automate de longueur inférieure à $2^n - n$.*

---

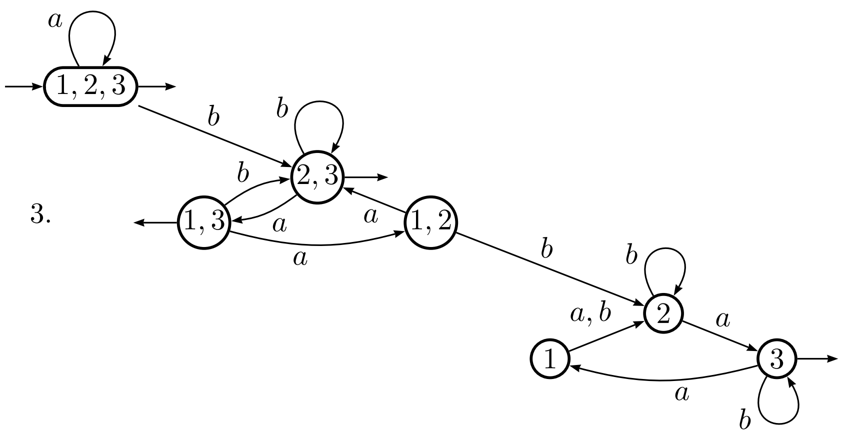
1. Examinons les chemins obtenus en partant de tous les états possibles et en lisant *baab* :

$$1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 2$$
$$2 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 2$$
$$3 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 2$$

Le mot *baab* est synchronisant et son état de synchronisation est 2.

2. Supposons que u est un mot synchronisant pour $\mathcal{A}$, avec état de synchronisation p_u et que v est un mot synchronisant pour $\mathcal{B}$, avec état de synchronisation q_v. Alors, quel que soit l'état (p, q) de l'intersection dont on part, en lisant u on arrive dans un état (p_u, q'), puis en lisant v, on arrive dans l'état (p_{uv}, q_v), où p_{uv} est l'unique état dans lequel on arrive à partir de p_u en lisant v. Finalement, (p_{uv}, q_v) est un état de synchronisation pou r uv dans l'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

3.



4. Si $\mathcal{A}$ est synchronisable, il existe un mot synchronisant w avec un état synchronisant p. Si on considère $P(\mathcal{A})$ et l'état que l'on atteint dans $P(\mathcal{A})$ en lisant le mot w à partir de l'état initial. Cet état représente tous les états atteignable dans $\mathcal{A}$en lisant w à partir de n'importe quel état. Or il n'y a qu'un seul état atteignable par w, c'est p. Donc l'état que l'on atteint dans $P(\mathcal{A})$ en lisant w est le singleton $\{p\}$.

   Réciproquement, si $P(\mathcal{A})$ contient un état singleton $\{p\}$, il existe un mot w étiquetant un chemin de l'état initial à $\{p\}$, ce qui signifie que dans l'automate $\mathcal{A}$ de départ, en partant de n'importe quel état on arrive en p. Donc w est un mot synchronisant avec p pour état de synchronisation.

5. On calcule $P(\mathcal{A}_3)$... On constate qu'il n'a pas d'état singleton, $\mathcal{A}_3$ n'est donc pas synchronisable.

6. Si $\mathcal{A}$ est synchronisable, $P(\mathcal{A})$ contient un état singleton. Le plus petit mot synchronisant est celui qui étiquète le plus court chemin de l'état initial de $P(\mathcal{A})$ à un état singleton.

   Le nombre d'états de $P(\mathcal{A})$ est au plus $2^n - 1$ (comme $\mathcal{A}$ est complet, $P(\mathcal{A})$ ne contient pas d'état vide. Le nombre d'états de $P(\mathcal{A})$ qui ne sont pas des singletons est au plus $2^n - n - 1$. Le chemin le plus court entre l'état initial et un état singleton ne passe pas deux fois par le même état et ne contient pas d'état singleton (sauf le dernier). Sa longueur est donc au plus $2^n - n - 1$. La longueur du plus petit mot synchronisant est donc strictement inférieure à $2^n - n$.

- ✂