



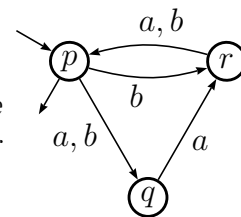
Correction examen Automates

— 2009 - 2010 —

1er juin 2010 - 2 heures

Les documents sont interdits. Les exercices sont indépendants. On pourra admettre la réponse à une question pour passer à la question suivante.

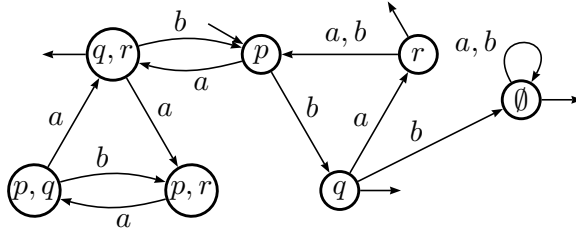
► **Exercice 1.** Calculer un automate émondé reconnaissant le complémentaire sur l'alphabet $\{a, b\}$ du langage reconnu par l'automate ci-contre.



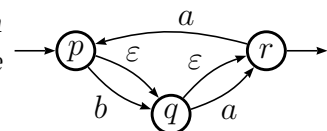
Afin de pouvoir calculer le complémentaire, il faut d'abord calculer un automate déterministe complet :

	a	b	i	T
p	q	q, r	X	X
q	r	$\emptyset$		
r	p	p		
q, r	p, r	p		
p, r	p, q	p, q, r		X
p, q	q, r	p, r		X
p, q, r	p, q, r	p, q, r		X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		

Pour compléter cet automate, il suffit de changer les états terminaux en non-terminaux et vice-versa. Après cela, on remarque que $\{p, q, r\}$ n'est pas co-accessible ; il n'apparaît donc pas dans la partie émondée du résultat.



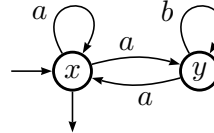
► **Exercice 2.** Calculer un automate reconnaissant l'intersection du langage $((ab^* \cup \varepsilon)a)^*$ avec le langage reconnu par l'automate ci-contre.



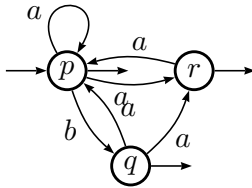


Pour calculer l'intersection, il faut passer par des automates sans ε -transition.

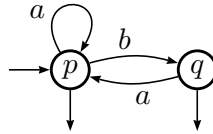
L'expression $((ab^* \cup \varepsilon)a)^*$ est équivalente à $(ab^*a \cup a)^*$. Le langage consiste donc à répéter soit a , soit ab^*a ; il est donc reconnu par l'automate



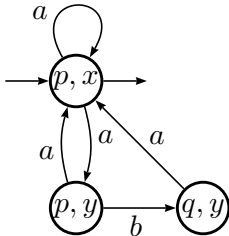
Pour supprimer les ε -transitions, il faut calculer les ε -successeurs; ceux de p sont q et r , celui de q est r , l'état r n'en a pas. Il faut donc ajouter à partir de p les mêmes transitions que celles qui partent de q et r et rendre p terminal car r l'est. De même pour q .



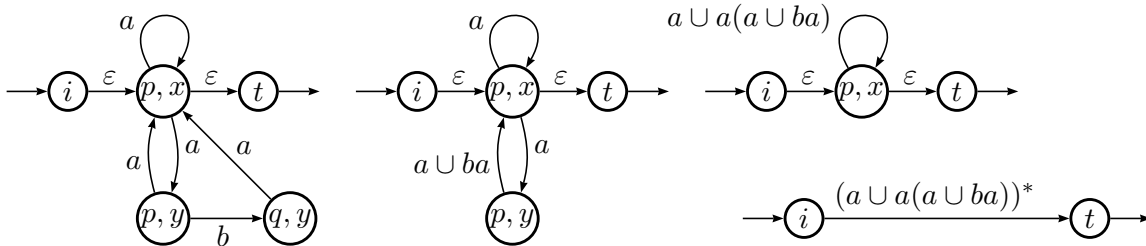
Si on regarde cet automate, on constate qu'il reconnaît tous les mots qui n'ont pas deux b consécutifs, il est donc équivalent à



Finalement, on calcule l'intersection



Il reste à convertir cet automate en expression :

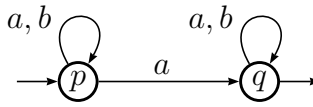


Une expression représentant l'intersection est donc $(a \cup a(a \cup ba))^*$.



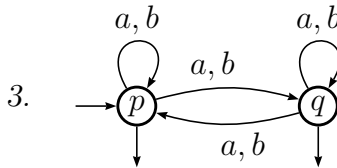
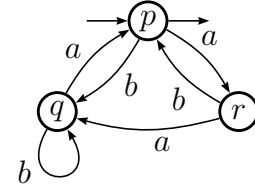
► **Exercice 3.** Dans cet exercice, on ne regarde pas seulement si un mot est accepté par un automate, mais on s'intéresse au nombre de chemins réussis étiquetés par chaque mot. Ainsi, chaque automate $\mathcal{A}$ définit une fonction où, pour tout mot w , $\mathcal{A}(w)$ est le nombre de

chemins réussis étiquetés par w . Si w n'est pas accepté par l'automate, on a donc $\mathcal{A}(w) = 0$.

1. Considérons l'automate $\mathcal{A}$ suivant :
- 

- a) Énumérer tous les chemins réussis étiquetés par $abaa$; en déduire $\mathcal{A}(abaa)$.
b) Montrer que pour tout mot w , $\mathcal{A}(w)$ est égal au nombre de a dans w .

2. Quelle est la valeur associée à un mot w accepté par l'automate ci-contre ? Justifier.



Quelle est la valeur associée à un mot w accepté par l'automate ci-contre ? Justifier.

4. Soit deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On considère l'automate $\mathcal{P} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ qui reconnaît l'intersection des langages reconnus par les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que pour tout mot w , $\mathcal{P}(w) = \mathcal{A}(w) \cdot \mathcal{B}(w)$.
5. Calculer un automate $\mathcal{A}$ tel que pour tout mot w , $\mathcal{A}(w)$ est égal au carré du nombre de a dans w .



1. a) Les chemins réussis commencent dans un état initial, donc forcément en p et terminent dans un état terminal, donc forcément en q .

Les chemins réussis étiquetés par $abaa$ sont donc :

$$\begin{aligned} &\rightarrow p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{a} q \rightarrow \\ &\rightarrow p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} q \xrightarrow{a} q \rightarrow \\ &\rightarrow p \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q \xrightarrow{a} q \xrightarrow{a} q \rightarrow \end{aligned}$$

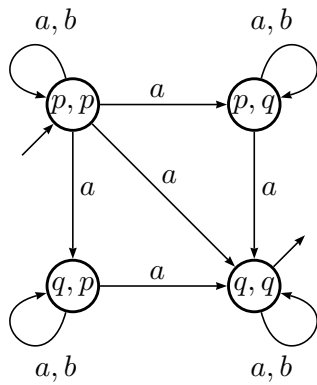
Ce qui fait 3 chemins, la valeur de $\mathcal{A}(abaa)$ est donc 3.

- b) Montrons le résultat par récurrence sur la longueur de w . C'est évident pour $w = \varepsilon$.

Supposons $w = u.x$, où x est une lettre. Par hypothèse de récurrence, le nombre de chemins de p à q étiquetés par u est égal au nombre de a dans u ; le nombre de chemins de p à q étiquetés par w est soit le même si $x = b$ car si on termine par b , il faut déjà être en q avant, soit un de plus si $x = a$, car en plus des chemins étiquetés par u qui mène de p à q , il y a l'unique chemin étiqueté par u qui va de p à p suivi par le dernier a pour aller de p à q .

2. L'automate est déterministe, tout mot accepté est donc l'étiquette d'un unique chemin ; sa valeur est donc 1.
3. Pour tout mot accepté, pour chaque lettre lue, on a le choix d'aller dans chacun des deux états. Le nombre de chemins différents est donc $2^{|w|}$.
4. Dans l'automate qui reconnaît l'intersection, les chemins réussis sont exactement les paires de chemins réussis qui ont la même étiquette pris dans chacun des deux automates de départ. Si pour un mot w , on a n chemins réussis dans l'automate $\mathcal{A}$ et m chemins réussis dans l'automate $\mathcal{B}$, dans l'intersection, on aura toutes les paires possibles, soit nm chemins réussis, d'où le résultat.

5. D'après la question précédente, il suffit de calculer l'automate intersection de l'automate du 1. avec lui-même.



----- ✂