



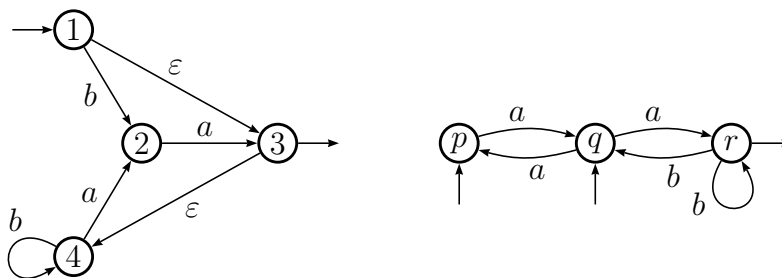
Correction examen Automates

— 2010 - 2011 —

31 mai 2011 - 2 heures

Les documents sont interdits. Les exercices sont indépendants. On pourra admettre la réponse à une question pour passer à la question suivante.

► **Exercice 1.** Calculer un automate émondé reconnaissant l'intersection des langages reconnus par les deux automates ci-dessous.



Pour pouvoir calculer l'intersection, il faut supprimer les ε -transitions du premier automate :

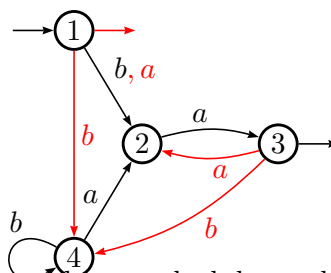
$$\text{Succ}_\varepsilon(1) = \{3, 4\}$$

$$\text{Succ}_\varepsilon(2) = \emptyset$$

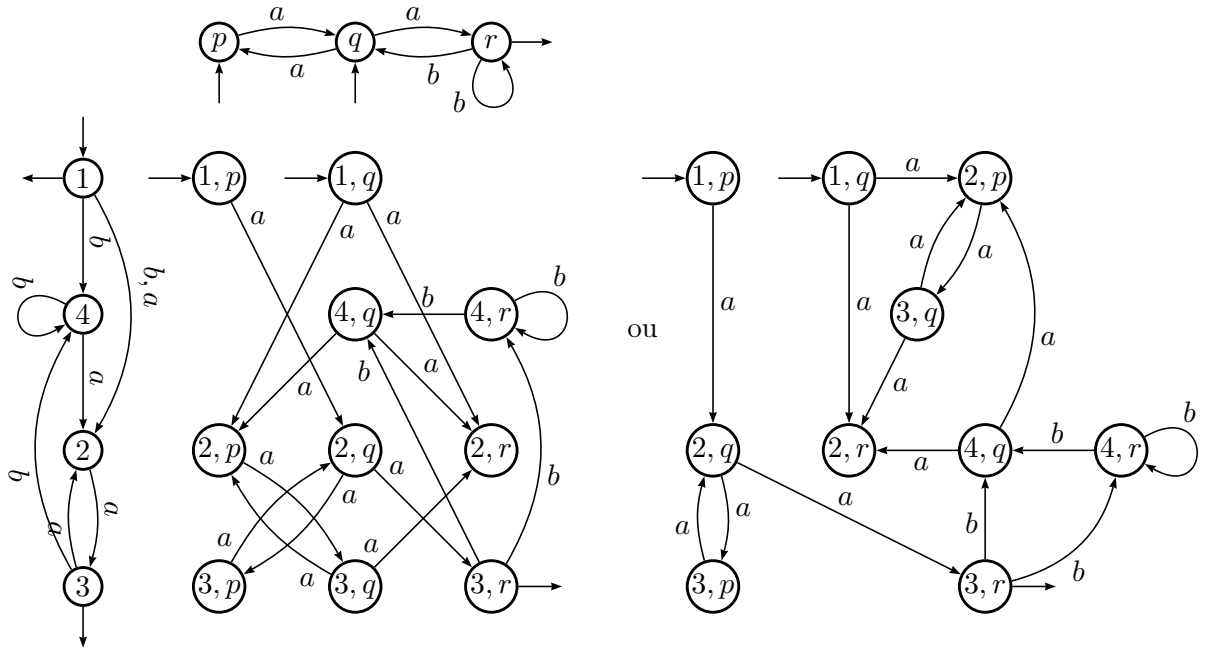
$$\text{Succ}_\varepsilon(3) = \{4\}$$

$$\text{Succ}_\varepsilon(4) = \emptyset$$

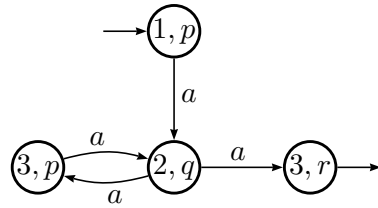
On doit donc ajouter au départ de 1 les mêmes flèches que celles qui partent de 3 ou 4, et au départ de 3 celles qui partent de 4, d'où



Ceci fait, on peut directement procéder au calcul du produit reconnaissant l'intersection :



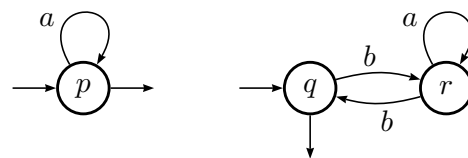
On peut alors émonder le résultat ; il reste :



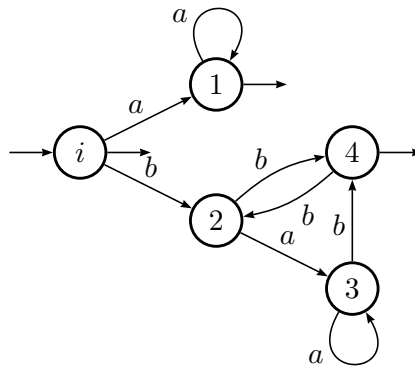
► **Exercice 2.** Calculer une expression rationnelle représentant le langage complémentaire sur l'alphabet $\{a, b\}$ du langage $a^* + (ba^*b)^*$.



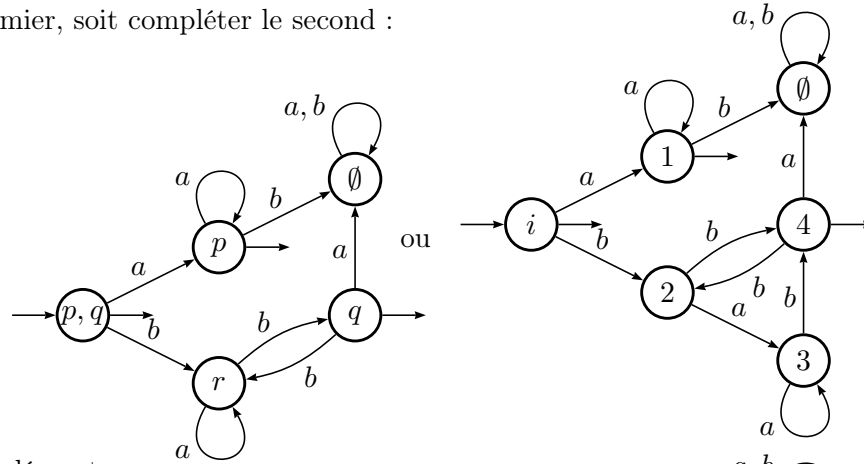
Pour calculer le complémentaire, on doit passer par les automates. Soit on constate que l'expression est équivalente à :



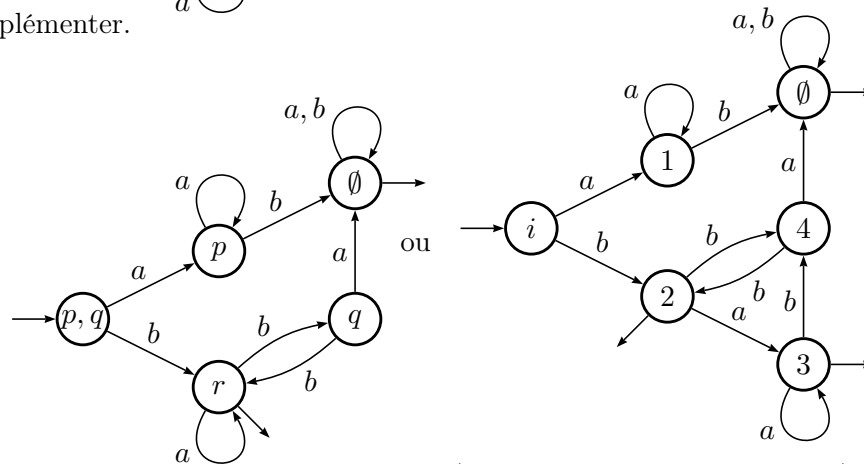
Soit, on construit l'automate des positions pour $a_1^* + (b_2a_3^*b_4)^*$.



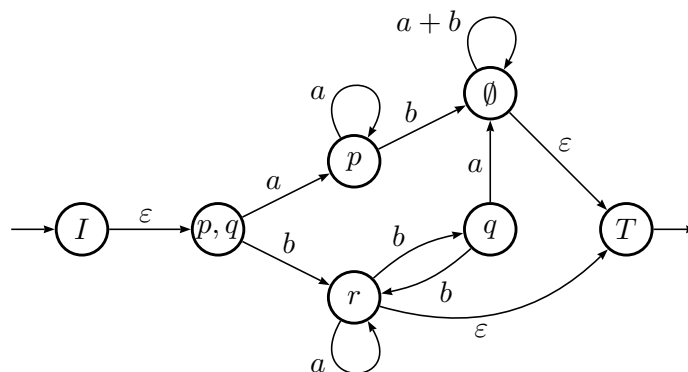
Pour calculer le complémentaire, il faut des automates déterministes complets, il faut donc soit déterminer le premier, soit compléter le second :

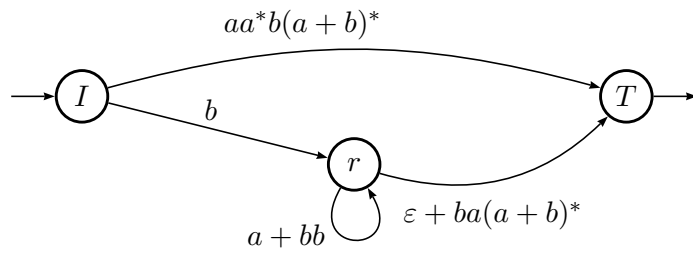
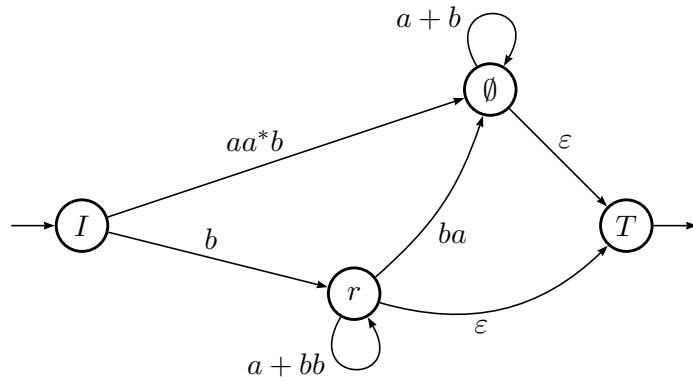
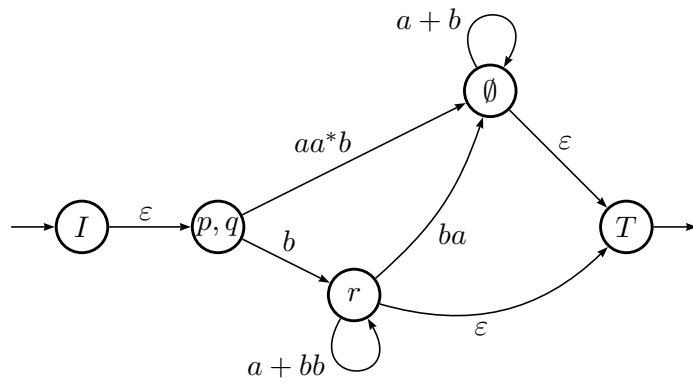
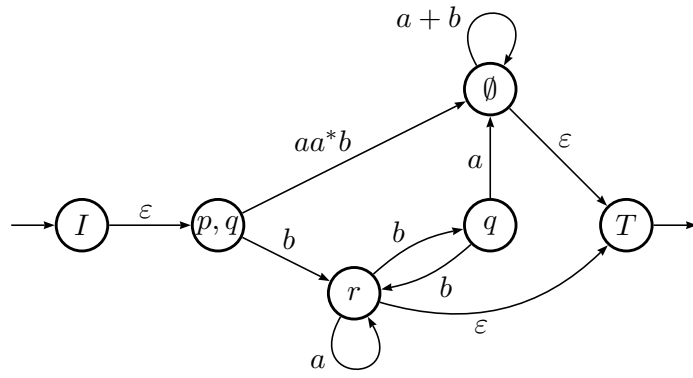


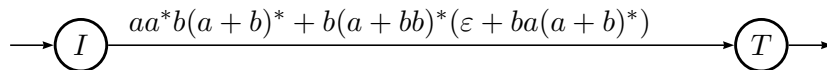
On peut alors compléter.



Transformons maintenant cet automate en expression (je le fais sur celui de gauche...)







Une expression pour le complémentaire est donc $aa^*b(a+b)^* + b(a+bb)^*(\varepsilon + ba(a+b)^*)$.

..... ✂

► **Exercice 3.** Un I -automate est un automate normal, sauf qu'un mot est accepté si et seulement si le nombre de chemins réussis étiquetés par ce mot est impair. Le langage reconnu par un I -automate est l'ensemble des mots acceptés.

1. Considérons le I -automate $\mathcal{A}_1$ suivant :
-

- a) Énumérer tous les chemins réussis étiquetés par $abaa$; le mot $abaa$ est-il accepté par le I -automate $\mathcal{A}_1$?
 - b) Énumérer tous les chemins réussis étiquetés par $baba$; le mot $baba$ est-il accepté par le I -automate $\mathcal{A}_1$?
 - c) Quel est le langage reconnu par le I -automate $\mathcal{A}_1$?
2. Expliquer pourquoi quel que soit le langage rationnel L , il existe un I -automate qui reconnaît L ?
3. On considère un I -automate $\mathcal{A}$ qui reconnaît un langage L et un I -automate $\mathcal{B}$ qui reconnaît le langage K . Montrer que le I -automate produit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ reconnaît l'intersection de L et K (comme pour les automates normaux).
4. a) On considère un I -automate $\mathcal{A}$ qui reconnaît un langage L et un I -automate $\mathcal{B}$ qui reconnaît le langage K . Quel langage est reconnu par le I -automate formé de l'union de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$?
- b) A partir d'un I -automate $\mathcal{A}$ qui reconnaît un langage L , comment peut-on calculer simplement un I -automate qui reconnaît le langage complémentaire $\bar{L}$?
- c) Proposer une construction pour construire un automate qui reconnaisse l'union de L et K .
5. Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, T)$ un I -automate. Pour tout sous-ensemble d'états X (inclus dans Q), pour tout état q , on note $\text{Pred}_X(q, a) = \{p \in X \mid \overset{a}{\circlearrowleft} p \rightarrow q\}$ l'ensemble des états de X qui sont des prédécesseurs de q pour la lettre a .
- Le I -déterminisé de $\mathcal{A}$ est le I -automate $\mathcal{D}$ défini de la façon suivante :
- les états de $\mathcal{D}$ sont des sous-ensembles de Q ;

- l'unique état initial de $\mathcal{D}$ est l'état I ;
- si X est un état de $\mathcal{D}$, X est terminal s'il contient un nombre impair d'états terminaux de $\mathcal{A}$;
- si X est un état de $\mathcal{D}$ et a une lettre, soit Y l'ensemble des états q tels que $\text{Pred}_X(q, a)$ a un nombre impair d'éléments ; alors Y est un état de $\mathcal{D}$ et il y a une transition de X à Y étiquetée par a .

a) Calculer le I -déterminisé du I -automate $\mathcal{A}_1$ donné au 1. de cet exercice.

b) Montrer que le I -déterminisé $\mathcal{D}$ d'un automate $\mathcal{A}$ reconnaît toujours le même langage que le I -automate $\mathcal{A}$ (on pourra montrer par récurrence sur la longueur des mots que w étiquète dans $\mathcal{A}$ un nombre impair de chemins d'un état initial à p si et seulement si l'état X atteint dans $\mathcal{D}$ en lisant w contient l'état p .)



1. a) Voici les chemins réussis étiquetés par $abaa$:

$$\rightarrow p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{a} q \rightarrow$$

$$\rightarrow p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} q \xrightarrow{a} q \rightarrow$$

$$\rightarrow p \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q \xrightarrow{a} q \xrightarrow{a} q \rightarrow$$

Le mot étiquète trois chemins réussis, il est donc accepté par le I -automate.

- b) Voici les chemins réussis étiquetés par $baba$:

$$\rightarrow p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} q \rightarrow$$

$$\rightarrow p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q \xrightarrow{b} q \rightarrow$$

Le mot étiquète deux chemins réussis, il n'est donc pas accepté par le I -automate.

c) Le nombre de chemins réussis étiqueté par un mot donné est égal au nombre de a dans le mot. Le I -automate reconnaît donc l'ensemble des mots qui ont un nombre impair de a . Si on veut donner une expression rationnelle : $b^*a(b+ab^*a)^*$ ou $b^*ab^*(ab^*ab^*)^*$ par exemple.

2. Tout langage rationnel L peut être reconnu par un automate déterministe. Dans un tel automate, tout mot accepté étiquète exactement un chemin réussi, donc si on interprète cet automate comme un I -automate, il reconnaît encore le langage L .
3. Dans l'automate produit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ qu'on construit pour calculer l'intersection, chaque chemin réussi étiqueté par un mot w correspond exactement à une paire formée d'un chemin réussi de $\mathcal{A}$ étiqueté par w et d'un chemin réussi de $\mathcal{B}$ étiqueté par w ; réciproquement, si on prend un chemin réussi de $\mathcal{A}$ étiqueté par w et un chemin réussi de $\mathcal{B}$ étiqueté par w , il y a un chemin réussi de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ qui correspond à cette paire de chemin. Finalement, le nombre de chemins réussis étiquetés par w dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est le produit du nombre de chemins réussis étiquetés par w dans $\mathcal{A}$ et du nombre de chemins réussis étiquetés par w dans $\mathcal{B}$. Le nombre de chemins réussis étiquetés par w dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est donc impair si et seulement si il est impair à la fois dans $\mathcal{A}$ et dans $\mathcal{B}$. Le I -automate $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ accepte donc w si et seulement si il est à la fois accepté par les I -automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Le langage reconnu par le I -automate $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est donc l'intersection des langages reconnus par les I -automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

4. a) Le nombre de chemins réussis étiquetés par w dans $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est égal à la somme du nombre de chemins réussis étiquetés par w dans $\mathcal{A}$ et du nombre de chemins réussis étiquetés par w dans $\mathcal{B}$. Cette somme est impaire si et seulement si un des deux nombres est impair et l'autre pair, donc uniquement si le mot w est accepté par un et un seul des deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Le langage reconnu par $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est donc la différence symétrique de L et K : $L \Delta K = L \cup K \setminus L \cap K = (L \cap \bar{K}) \cup (\bar{L} \cap K)$.
- b) Prenons le I -automate $\mathcal{B}$ avec un seul état initial et final sur lequel chaque lettre de l'alphabet étiquète une boucle; cet automate reconnaît A^* ; donc le I -automate $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ reconnaît $L \cup A^* \setminus L \cap A^* = A^* \setminus L = \bar{L}$.
- c) Pour reconnaître l'union de L et K , il faut d'abord calculer un automate qui reconnaît l'intersection $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, puis faire l'union de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Si un mot est accepté uniquement par $\mathcal{A}$, il étiquète un nombre de chemins pair dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ et dans $\mathcal{B}$ et impair dans $\mathcal{A}$, donc impair dans l'union des trois automate; de même s'il est accepté uniquement par $\mathcal{B}$; s'il est accepté par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, il étiquète un nombre de chemins impair dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, donc impair dans l'union des trois. S'il n'est accepté ni par $\mathcal{A}$ ni par $\mathcal{B}$, il étiquète un nombre de chemins pair dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, donc pair dans l'union des trois.

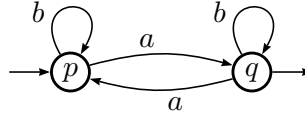
5. a) Soit $\mathcal{D}_1$ le I -déterminisé de $\mathcal{A}_1$. L'état initial de $\mathcal{D}_1$ est $\{p\}$.

L'état p est un prédécesseur de p par a ; c'est aussi un prédécesseur de q . Donc $\{p, q\}$ est le successeur de $\{p\}$ par a dans $\mathcal{D}_1$. L'état p est un prédécesseur de p par b , mais ce n'est pas un prédécesseur de q . Donc $\{p\}$ est le successeur de $\{p\}$ par b dans $\mathcal{D}_1$.

Parmi les états $\{p, q\}$, seul p est un prédécesseur de p par a , mais p et q sont tous deux prédécesseurs de q par a . Comme q a deux prédécesseurs, il n'apparaît pas dans le successeur de $\{p, q\}$ par a qui est donc $\{p\}$.

Parmi les états $\{p, q\}$, seul p est un prédécesseur de p par b , et seul q est un prédécesseur de q par b . Donc le successeur de $\{p, q\}$ par a est $\{p, q\}$.

$\{p\}$ n'est pas final car il ne contient aucun état final; $\{p, q\}$ est final car il contient un (impair) état final. D'où le résultat :



On remarque que cet automate reconnaît bien le langage annoncé plus haut, c'est-à-dire les mots qui ont un nombre impair de a .

- b) On montre par récurrence sur la longueur de w : $P(w)$ ="pour tout état p , w étiquète dans $\mathcal{A}$ un nombre impair de chemins d'un état initial à p si et seulement si l'état X atteint dans $\mathcal{D}$ en lisant w contient l'état p .

Base. Si $w = \varepsilon$, p est atteint dans $\mathcal{A}$ à partir d'un état initial seulement si c'est un état initial, et dans ce cas, il y a un unique chemin pour atteindre p (chemin de longueur nulle). Comme l'état initial de $\mathcal{D}$ est l'ensemble des états initiaux, $P(\varepsilon)$ est vrai.

Induction. Si w est de longueur strictement positive, w s'écrit $w = ua$. Supposons que $P(u)$ est vrai. Considérons tous les chemins qui partent d'un état initial et qui arrivent en p étiquetés par w . On peut classer ces chemins selon leur avant dernier état. Regardons par exemple ceux dont l'avant dernier état est un certain état q ; ce sont exactement les chemins qui partent d'un état initial et arrivent en q étiquetés par u . Il y en a donc un nombre impair si et seulement si l'état X atteint dans $\mathcal{D}$ en lisant u contient q . Le nombre de chemins qui partent d'un état initial et qui arrivent en p étiquetés par w est impair si et seulement si il y a un nombre impair d'avant derniers états q pour lesquels le nombre de chemins qui partent d'un état initial et qui arrivent en q étiquetés par u est impair, autrement dit si et

seulement si p a un nombre impair de prédecesseur par a dans X , donc si et seulement si l'état Y , successeur de X par a , c'est-à-dire l'état atteint dans $\mathcal{D}$ en lisant w , contient p .

Conclusion. Comme $P(\varepsilon)$ est vrai et que si $P(u)$ est vrai, alors pour tout a , $P(ua)$ est vrai, la proposition $P(w)$ est vraie pour tout w .

Maintenant, un mot w est accepté par $\mathcal{D}$ si et seulement si l'état X dans lequel il mène contient un nombre impair d'états terminaux, donc si et seulement si le nombre d'états de $\mathcal{A}$ dans lequel on peut arriver en lisant p sur un nombre impair de chemins est impair, c'est-à-dire si et seulement si le nombre de chemins réussis dans $\mathcal{A}$ étiquetés par w est impair. Donc w est accepté par le I -déterminisé de $\mathcal{A}$ si et seulement si il est accepté par le I -automate $\mathcal{A}$.

Un I -automate et son I -déterminisé reconnaissent donc le même langage.

----- 