Plus courts chemins

Toutes paires d'états

(*algorithme de Warshall* O(card S^3))

algorithme de Floyd O(card S^3)

Chemins de même origine (ou même destination)

(selon les hypothèses)

algorithme de Dijkstra O(card S^2)

ou O(card S + card A.log card S)

algorithme de Bellman-Ford O(card A.card S)

Problème

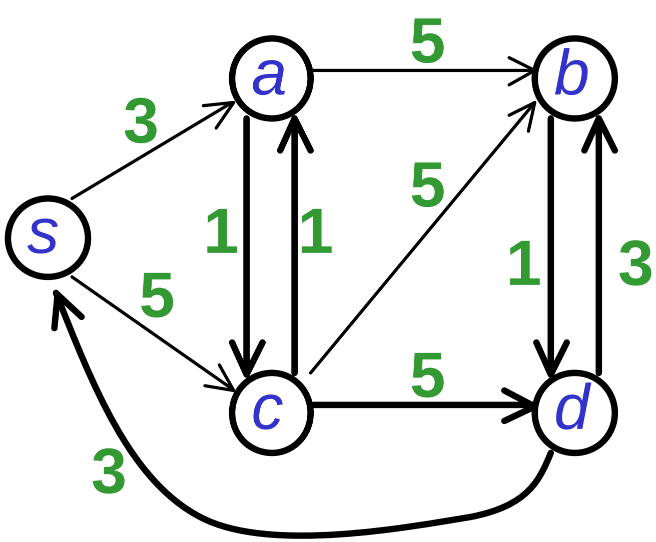
Graphe valué : $G = (S, A, v)$ avec valuation $v : A$ ® **R**

Source du graphe : s Î S

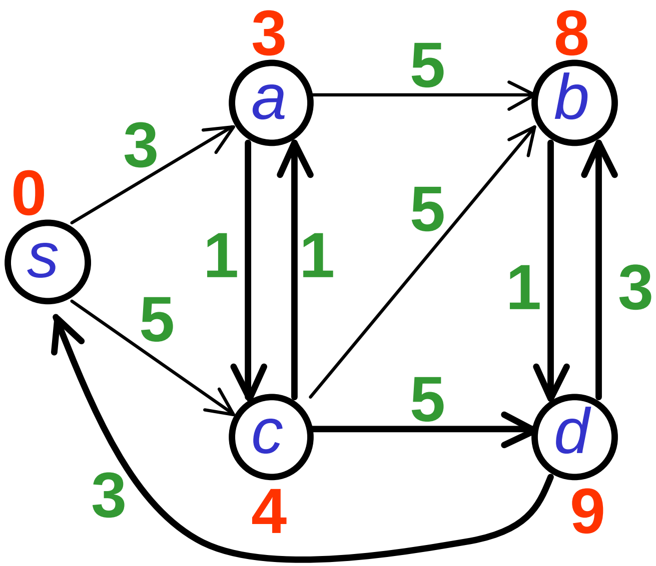
Problème : pour tout t Î S calculer

δ(s, t) = min { v(c) ; c chemin de s à t } È {+¥}

Exemple

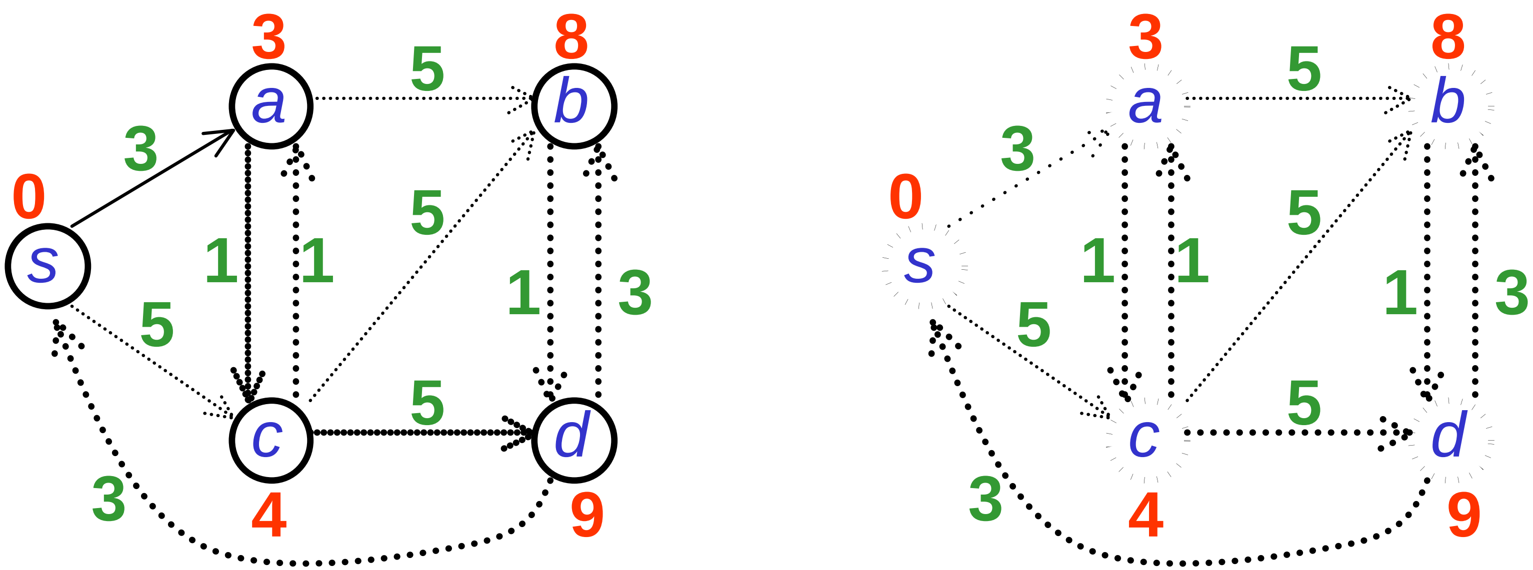


Coûts δ



Arbres de plus courts chemins

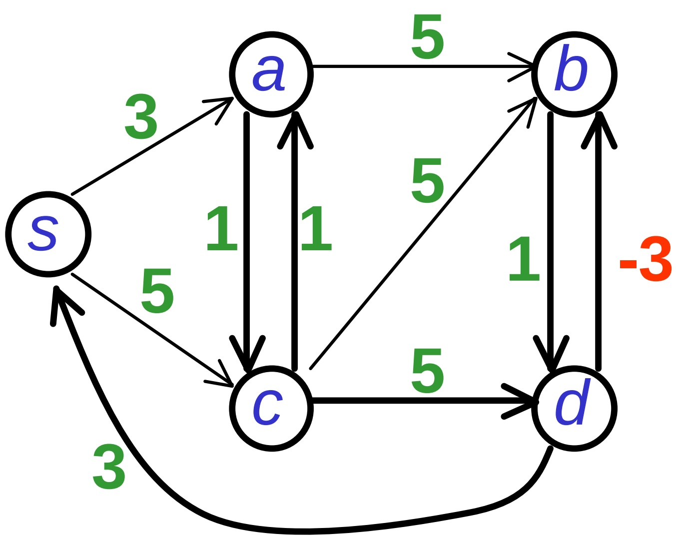
Arbres de racine *s*
dont les branches sont des chemins de coût minimal



Existence

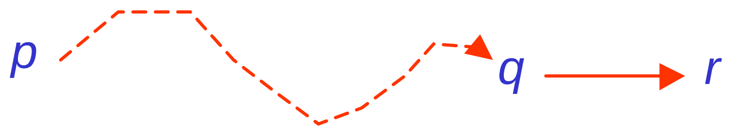
Proposition

pour tout *t* Î *S* $\delta(s, t) > -\infty$ **ssi**
le graphe n'a pas de circuit de coût < 0
accessible depuis *s*



Propriétés de base

Propriété 1 : $G = (S, A, v)$
soit c un plus court chemin de p à r
dont l'avant-dernier sommet est q
Alors $\delta(p, r) = \delta(p, q) + v(q, r)$



Propriété 2 : $G = (S, A, v)$
soit c un chemin de p à r
dont l'avant-dernier sommet est q
Alors $\delta(p, r) \leq \delta(p, q) + v(q, r)$

Relaxation

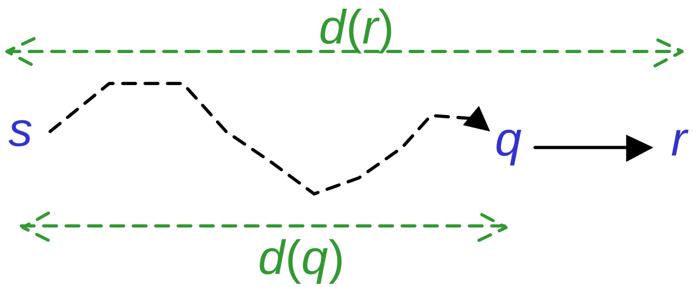
Calcul des δ(*s*,*t*) par approximations successives

t Î *S* *d*(*t*) = estimation de δ(*s*, *t*)

π(*t*) = prédécesseur de *t* : avant-dernier sommet d'un chemin de *s* à *t* ayant pour coût *d*(*t*)

Initialisation de *d* et π

```
INIT
      pour chaque  t Î S faire
      { d(t) ¬ ¥ ;  π(t) ¬ nil; }
      d(s) ¬ 0;
```



Relaxation de l 'arc (*q*, *r*)

```
RELAX(q, r)
      si d(q) + v(q, r) < d(r)
      alors { d(r) ¬ d(q) + v(q, r) ;  π(r) ¬ q ; }
```

Relaxation (suite)

Proposition :
la propriété « pour tout *t* Î *S* $d(t) \geq \delta(s, t)$ »
est un invariant de **`relax`**

Preuve par induction sur le nombre
d ’exécution de **`relax`**

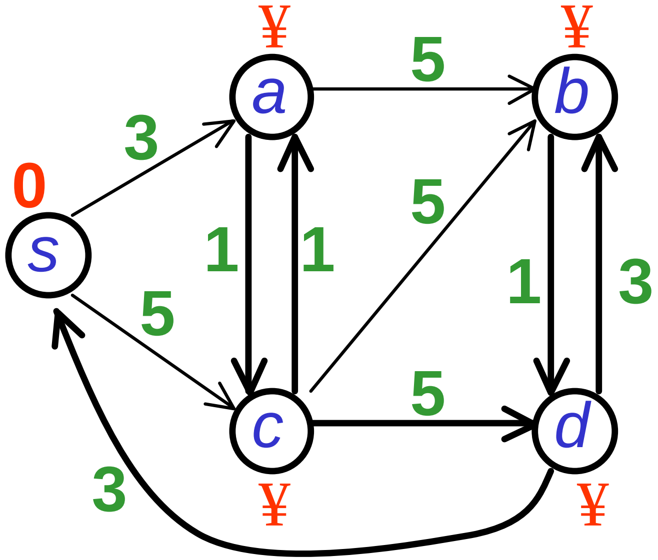
Algorithme de Dijkstra

Condition : $v(p, q) \geq 0$ pour tout arc (p, q)

début
    INIT;
    $Q \leftarrow S$ **;**
    tant que *Q* ¹ Æ **faire {**
        $q \leftarrow$ **MIN**$_{d}(Q)$ **;** $Q \leftarrow Q - \{q\}$ **;**
        pour chaque *r* successeur de *q* **faire**
            RELAX(q, r) **;**
    }
fin

Algorithme glouton (séquentiel)

Exemple



$Q = \{\, s, a, b, c, d \,\}$

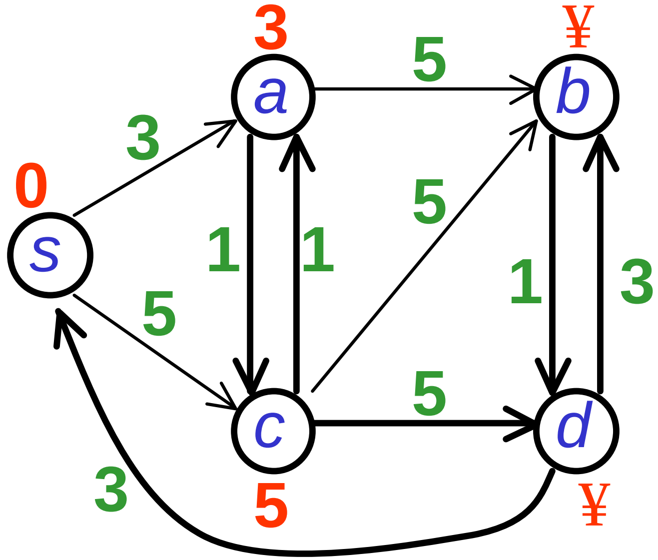
$\pi(s)$ = nil

$\pi(a)$ = nil

$\pi(b)$ = nil

$\pi(c)$ = nil

$\pi(d)$ = nil



$Q = \{\, a, b, c, d \,\}$

$\pi(s)$ = nil

$\pi(a) = s$

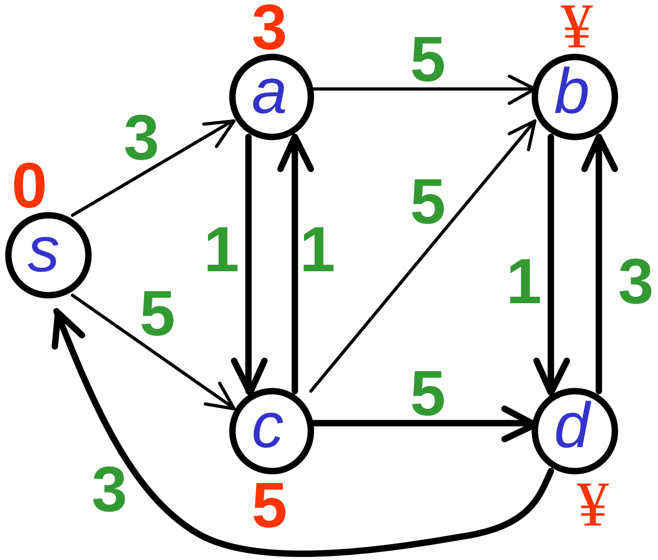
$\pi(b)$ = nil

$\pi(c) = s$

$\pi(d)$ = nil

UMLV ©

Exemple (suite)



$Q = \{\ a, b, c, d\ \}$

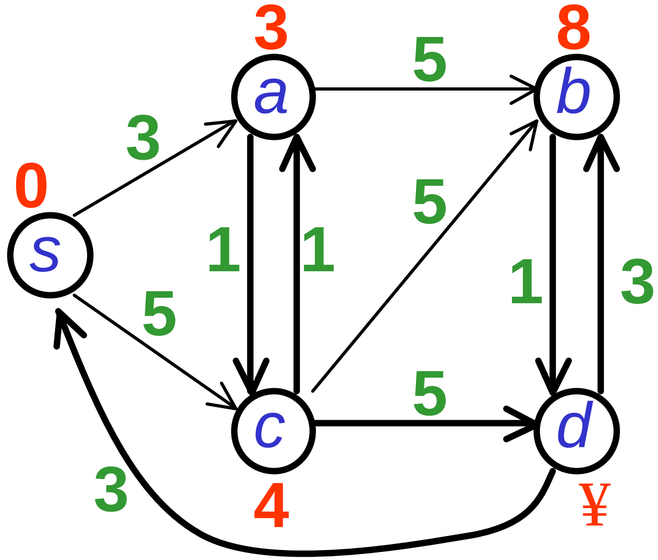
$\pi(s) = \text{nil}$

$\pi(a) = s$

$\pi(b) = \text{nil}$

$\pi(c) = s$

$\pi(d) = \text{nil}$



$Q = \{\ b, c, d\ \}$

$\pi(s) = \text{nil}$

$\pi(a) = s$

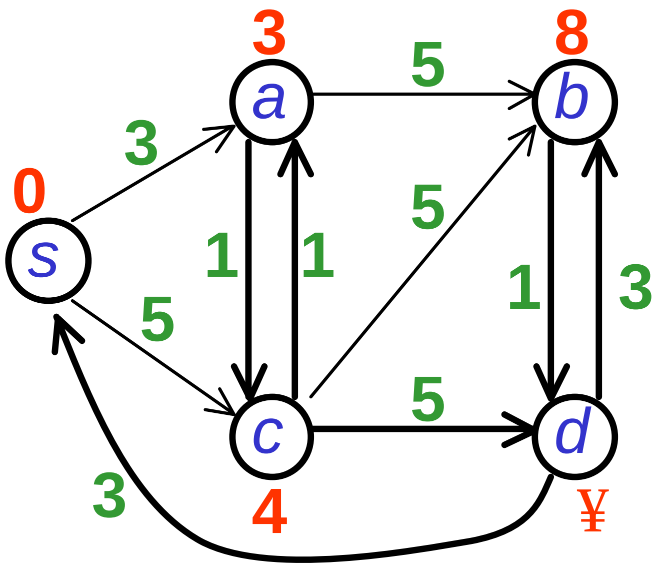
$\pi(b) = a$

$\pi(c) = a$

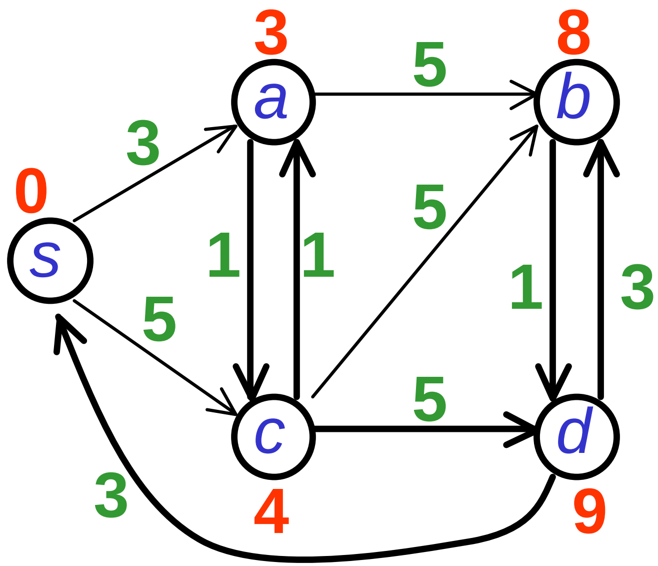
$\pi(d) = \text{nil}$

UMLV ©

Exemple (suite)

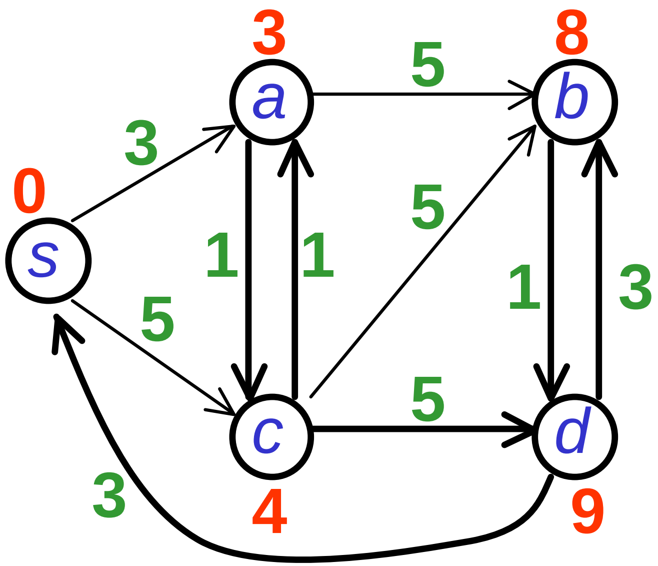


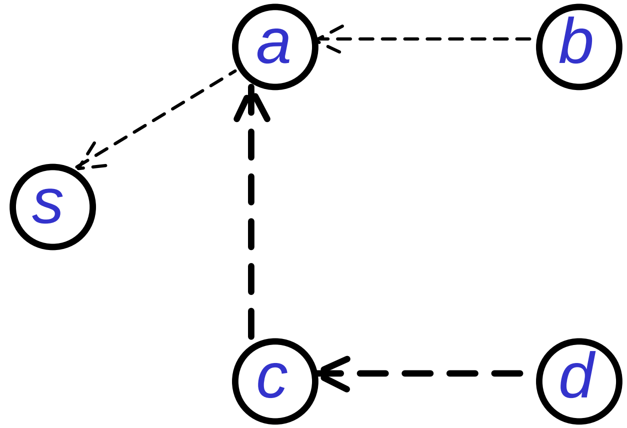
$Q = \{\, b, c, d \,\}$
$\pi(s)$ = nil
$\pi(a) = s$
$\pi(b) = a$
$\pi(c) = a$
$\pi(d)$ = nil



$Q = \{\, b, d \,\}$
$\pi(s)$ = nil
$\pi(a) = s$
$\pi(b) = a$
$\pi(c) = a$
$\pi(d) = c$

Exemple (suite)





$Q = \{\, b,\ d \,\}$, $Q = \{\, d \,\}$ puis $Q = \varnothing$

$\pi(s)$ = nil

$\pi(a) = s$

$\pi(b) = a$

$\pi(c) = a$

$\pi(d) = c$

Implémentation

Par matrice d'adjacence

temps global O(card S^2)

Par listes de successeurs

Q : file de priorité (tas)

card S opérations **`MIN`**$_d$: O(card S.log card S)

card A opérations **`RELAX`** : O(card A.log card S)

temps global O((card S+card A).log card S)

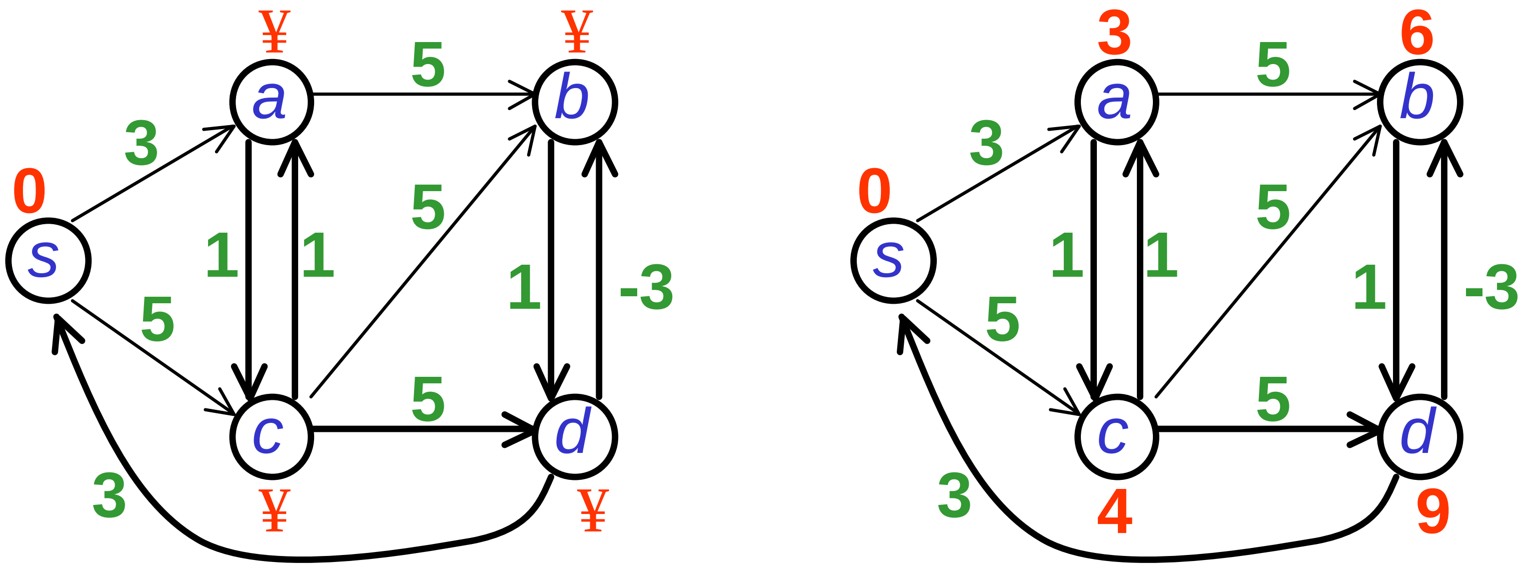
Algorithme de Bellman-Ford

Aucune condition : pour tout arc (p, q), $v(p, q) \in \mathbf{R}$

```
début
    INIT;
    Q ← S ;
    répéter card S-1 fois
        pour chaque (q, r) ∈ A faire
            RELAX(q, r) ;
    pour chaque (q, r) ∈ A faire
        si d(q) + v(q, r) < d(r)  alors
            retour «  cycle de coût négatif »
        sinon
            retour « coûts calculés »
fin
```

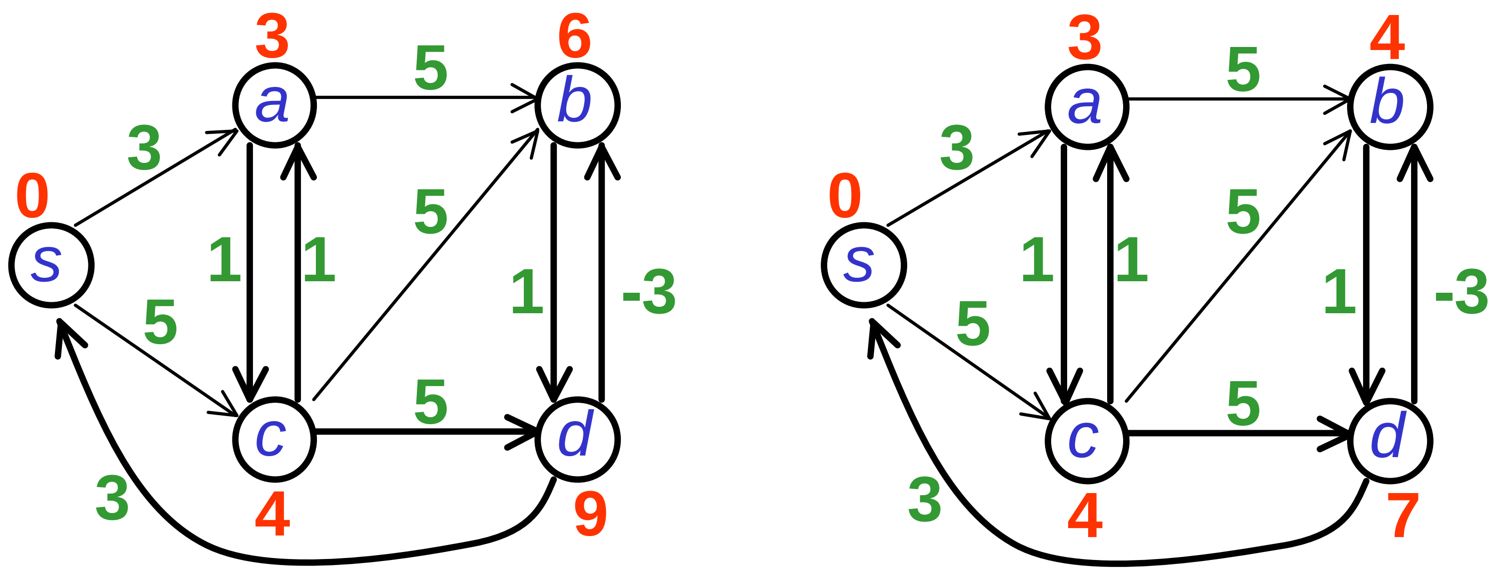
Temps : O(card S.card A)

Exemple 1



Étape 1 relaxation de tous les arcs dans l'ordre :
(*s*,*a*) (*s*,*c*) (*a*,*b*) (*a*,*c*) (*b*,*d*) (*c*,*a*) (*c*,*b*) (*c*,*d*) (*d*,*b*) (*d*,*s*)

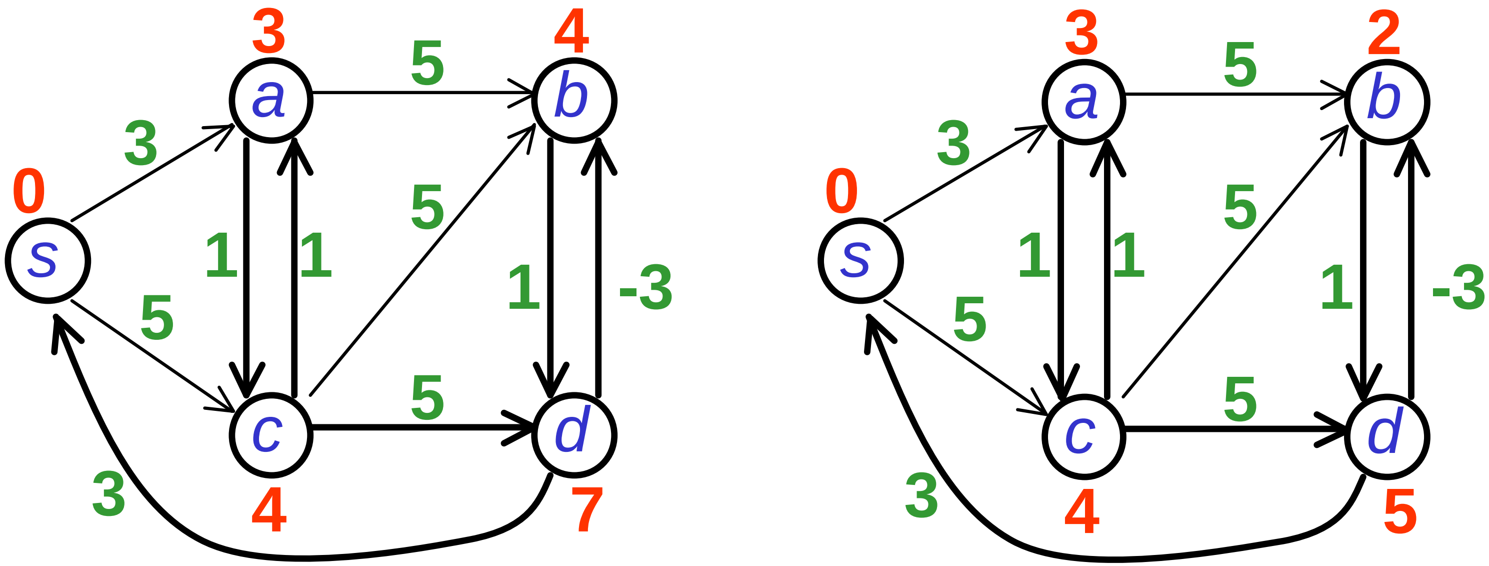
Exemple 1 (suite)



Étape 2 relaxation de tous les arcs dans l'ordre :
(s,a) (s,c) (a,b) (a,c) (b,d) (c,a) (c,b) (c,d) (d,b) (d,s)

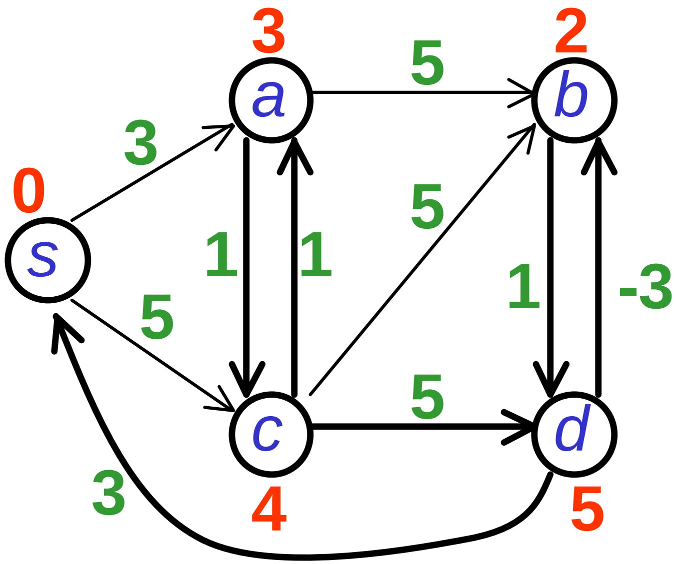
Exemple 1 (suite)

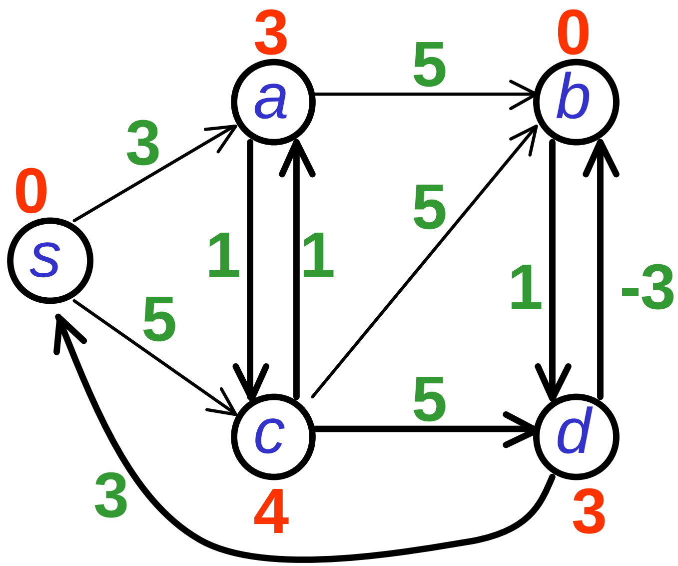
UMLV ©



Étape 3 relaxation de tous les arcs dans l'ordre :
(*s*,*a*) (*s*,*c*) (*a*,*b*) (*a*,*c*) (*b*,*d*) (*c*,*a*) (*c*,*b*) (*c*,*d*) (*d*,*b*) (*d*,*s*)

Exemple 1 (suite)

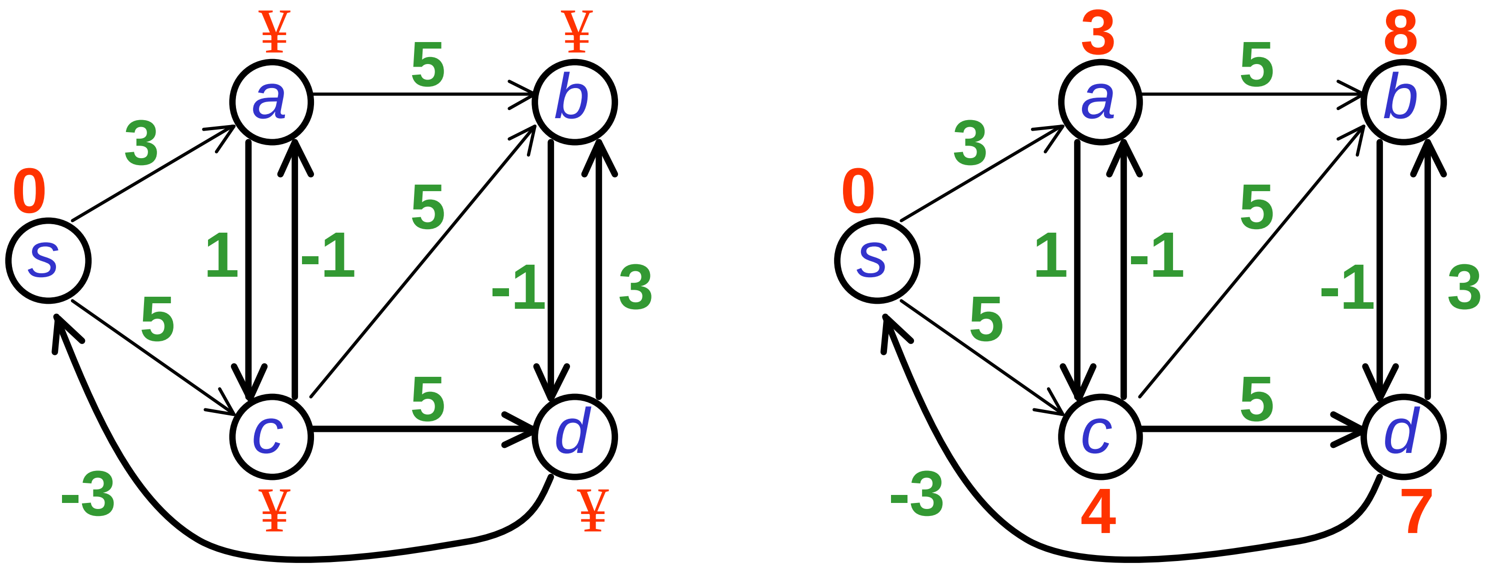




Étape 4 relaxation de tous les arcs dans l'ordre :
(*s*,*a*) (*s*,*c*) (*a*,*b*) (*a*,*c*) (*b*,*d*) (*c*,*a*) (*c*,*b*) (*c*,*d*) (*d*,*b*) (*d*,*s*)

reduction possible : cycle de coût négatif

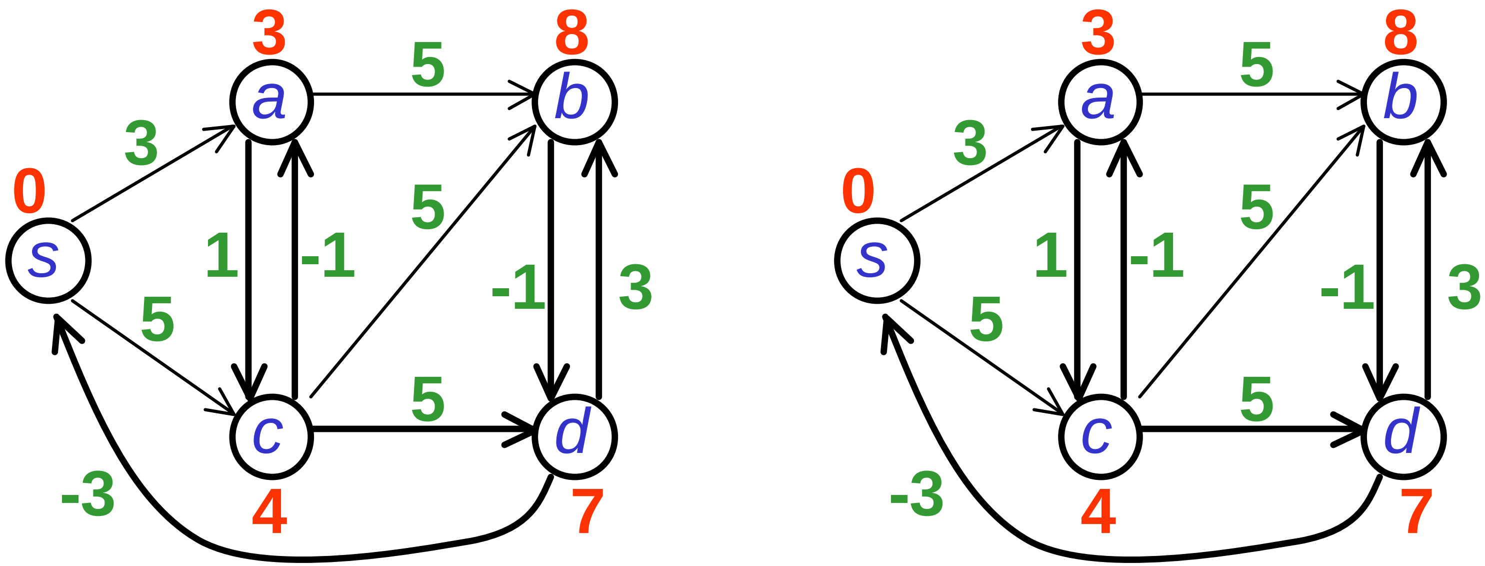
Exemple 2



Étape 1 relaxation de tous les arcs dans l'ordre :

(s,a) (s,c) (a,b) (a,c) (b,d) (c,a) (c,b) (c,d) (d,b) (d,s)

Exemple 2 (suite)



Étape 2 relaxation de tous les arcs dans l'ordre :
(*s*,*a*) (*s*,*c*) (*a*,*b*) (*a*,*c*) (*b*,*d*) (*c*,*a*) (*c*,*b*) (*c*,*d*) (*d*,*b*) (*d*,*s*)

pas de réduction possible : coûts corrects

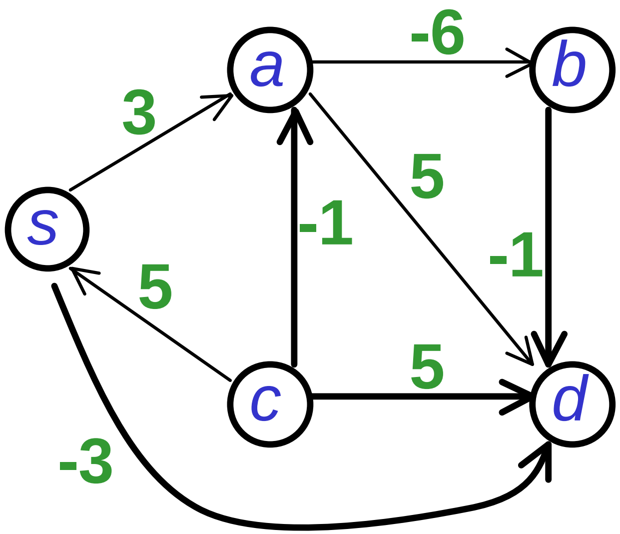
Graphes acycliques

Aucune condition : pour tout arc (p, q), $v(p, q) \in \mathbf{R}$
Calcul après ordre topologique

```
début
      INIT;
      pour chaque q ∈ S en ordre topologique faire
            pour chaque r successeur de q faire
                  RELAX(q, r) ;
fin
```

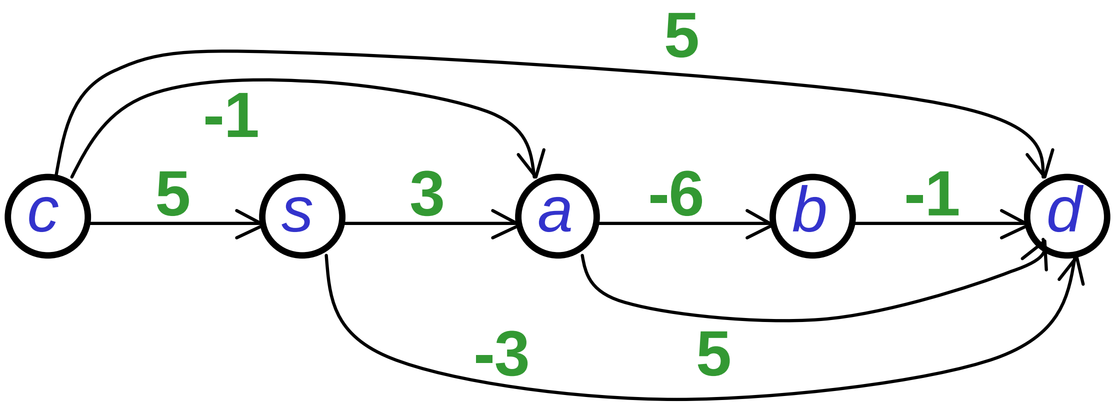
Temps : O(card S + card A)
chaque sommet et chaque arc est examiné une fois

Exemple

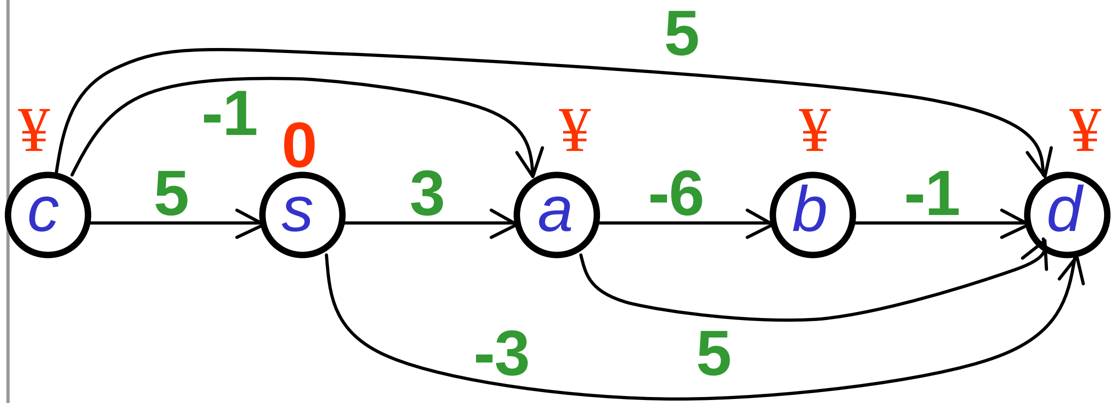


Ordre topologique

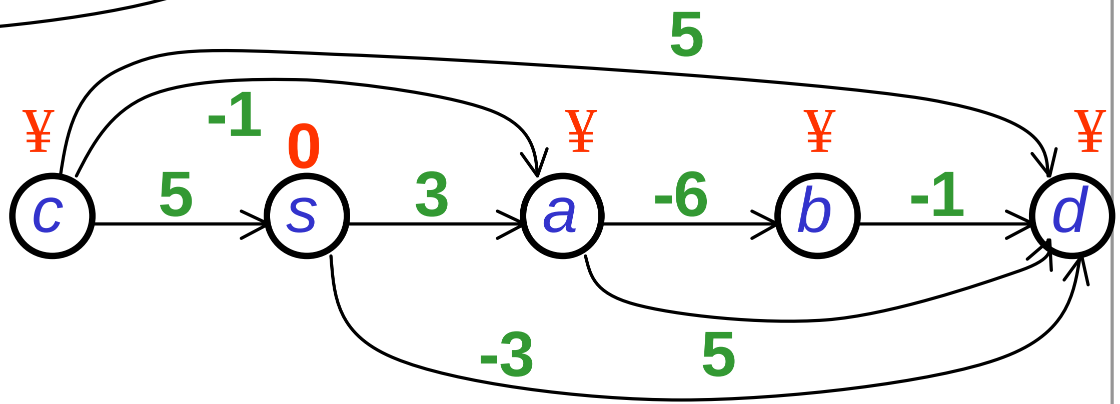
c, *s*, *a*, *b*, *d*



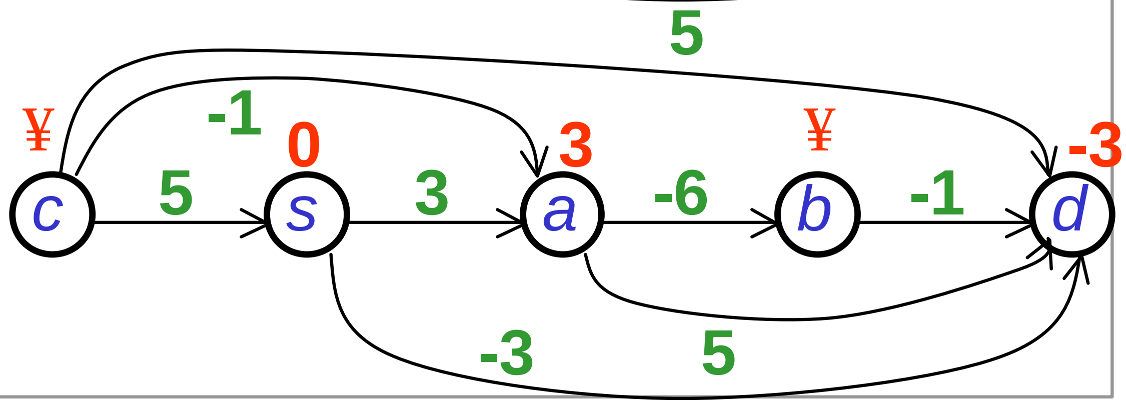
Calcul des coûts



Examen de *c*

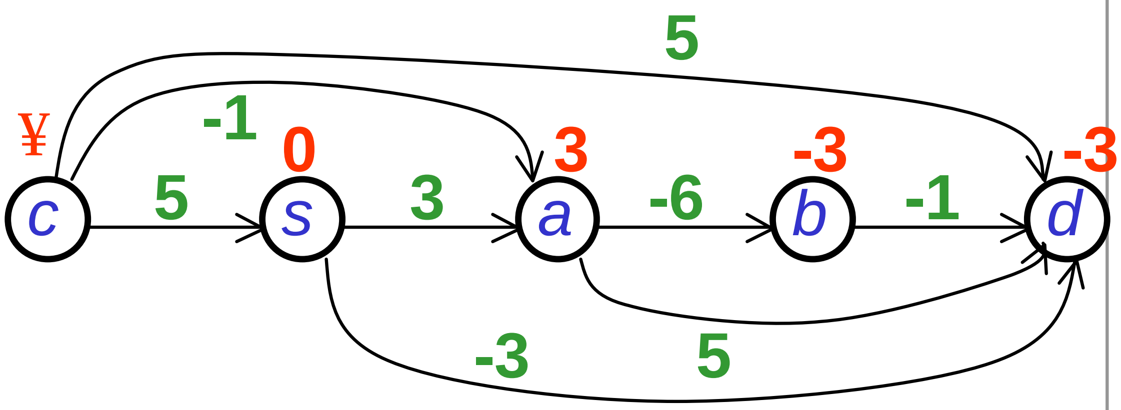


Examen de *s*

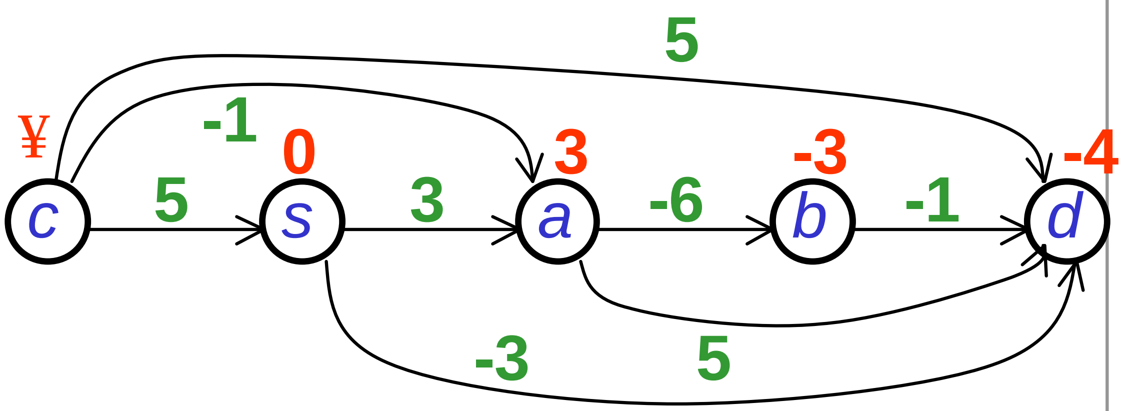


Calcul des coûts (suite)

Examen de *a*



Examen de *b*



Examen de *d* inutile