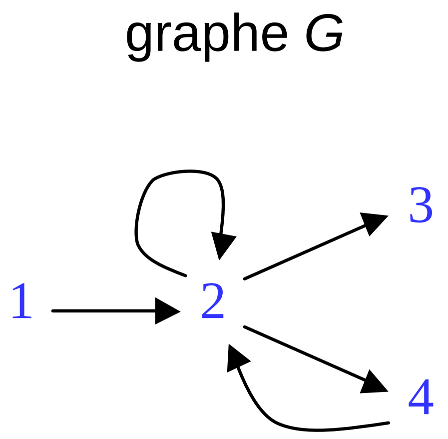
Clôture transitive

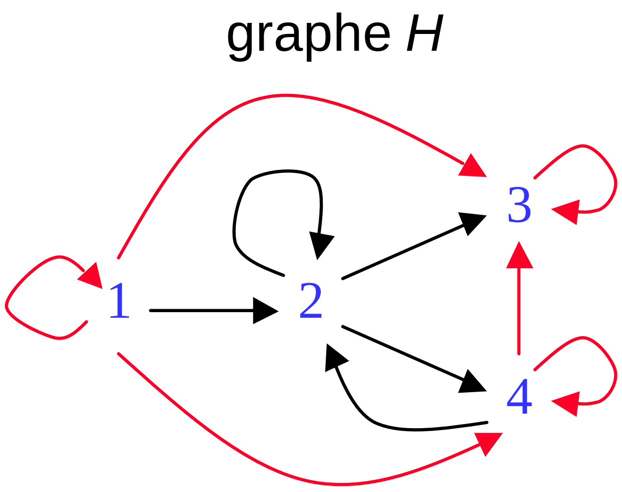
Problème

$G = (S, A)$ graphe (orienté)

Calculer $H = (S, B)$ où B est la clôture réflexive et transitive de A.

Note : $(s,t) \in B$ ssi il existe un chemin de s à t dans G





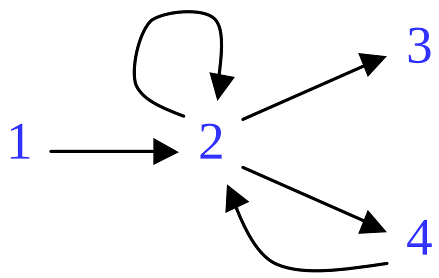
Représentations matricielles

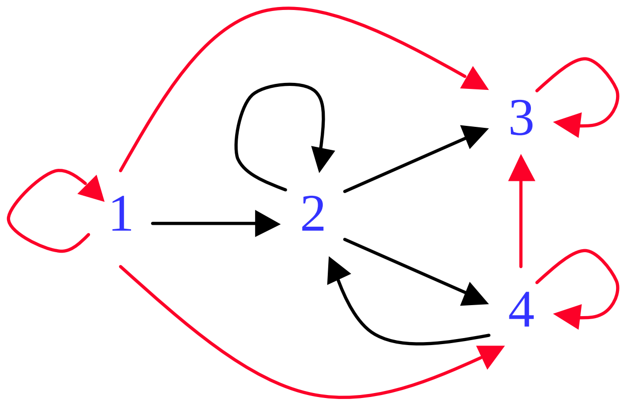
Matrices *nxn* où *n* = card *S*

A matrice d'adjacence de *G*
= matrice des chemins de longueur 1

B matrice d'adjacence de *H*
= matrice des chemins de *G*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$





Clôture par produits

Notation

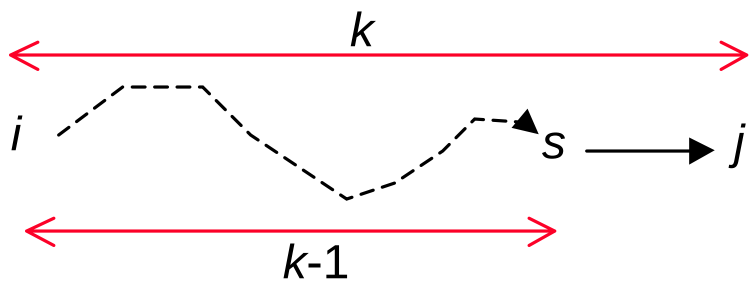
A_k = matrice des chemins de longueur k dans G

A_0 = I (matrice identité)

A_1 = matrice des chemins de longueur 1 = A

Lemme

Pour tout $k \geq 0$, $A_k = A^k$



Preuve

$A_k[i,j] = 1$ ssi $\exists\, s \in S$ $A_{k-1}[i,s] = 1$ et $A[s,j] = 1$

soit $A_k[i,j] = \Sigma_s\, A_{k-1}[i,s].\, A[s,j]$ (Σ somme booléenne)

soit $A_k = A_{k-1}.A$ et $A_0 = I$

donc $A_k = A^k$

Clôture par produits (suite)

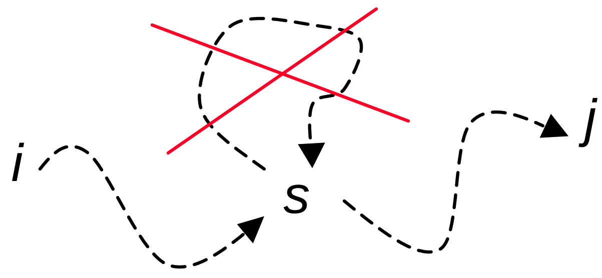
Chemin simple :

chemin qui passe une seule fois par chacun de ses sommets

Lemme

∃ chemin de *i* à *j* dans *G* ssi

∃ chemin simple de *i* à *j* dans *G*



$B[i,j] = 1$ ssi ∃ chemin de *i* à *j* dans *G*

ssi ∃ chemin simple de *i* à *j* dans *G*

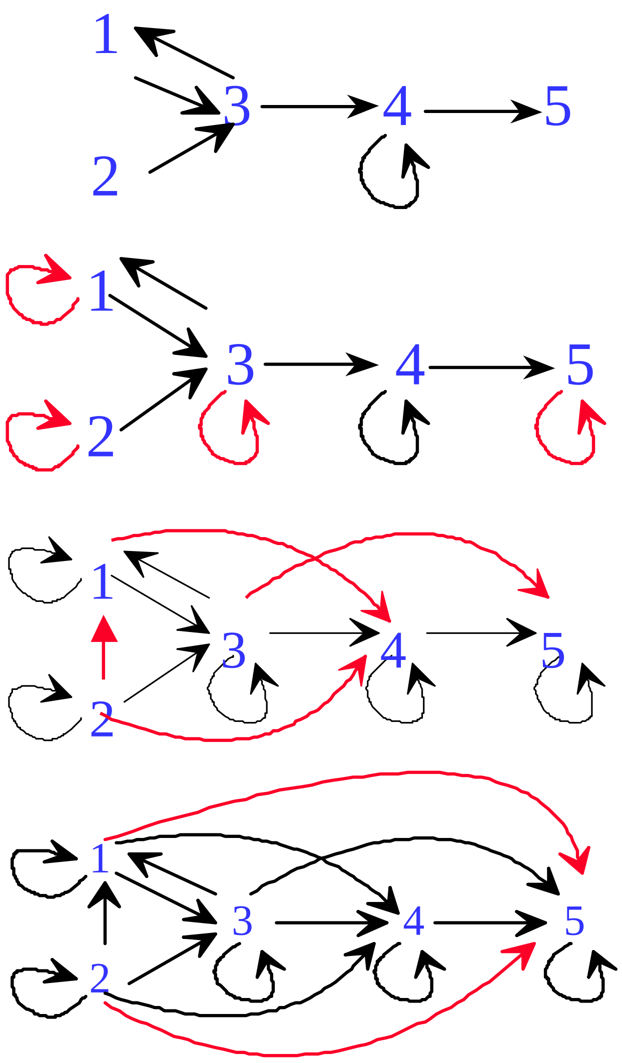
ssi ∃ k $0 \leq k \leq \mathrm{card}S - 1$ $A_k[i,j] = 1$

ssi ∃ k $0 \leq k \leq \mathrm{card}S - 1$ $A^k[i,j] = 1$

donc $B = I + A + A^2 + \ldots + A^{\mathrm{card}S-1}$

Calcul de *B* par schéma de Hörner en temps $O(n^4)$ avec produit de matrice ordinaire

Améliorable en temps $< O(n^4)$ avec produit efficace de matrices booléennes



$$A = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$I + A = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0 \\ 1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & I + A + A^2 \\ & = I + (I+A).A = \end{aligned} \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & I + A + A^2 + A^3 \\ & = I + (I+A+A^2).A = \end{aligned} \begin{pmatrix} 1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

3 produits de matrices

$$\begin{aligned} & = I + A + A^2 + A^3 + A^4 \\ & = I + (I+A+A^2 + A^3).A = B \end{aligned}$$

Autre récurrence

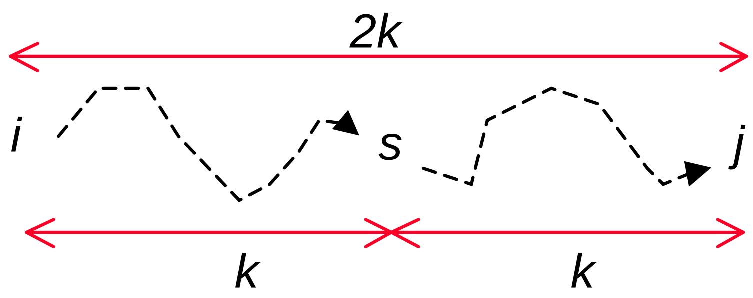
Notation

B_k = matrice des chemins de longueur $\le k$ dans G

B_0 = I (matrice identité)

B_1 = matrice des chemins de longueur ≤ 1 = $I + A$

B_{n-1} = matrice des chemins simples = B

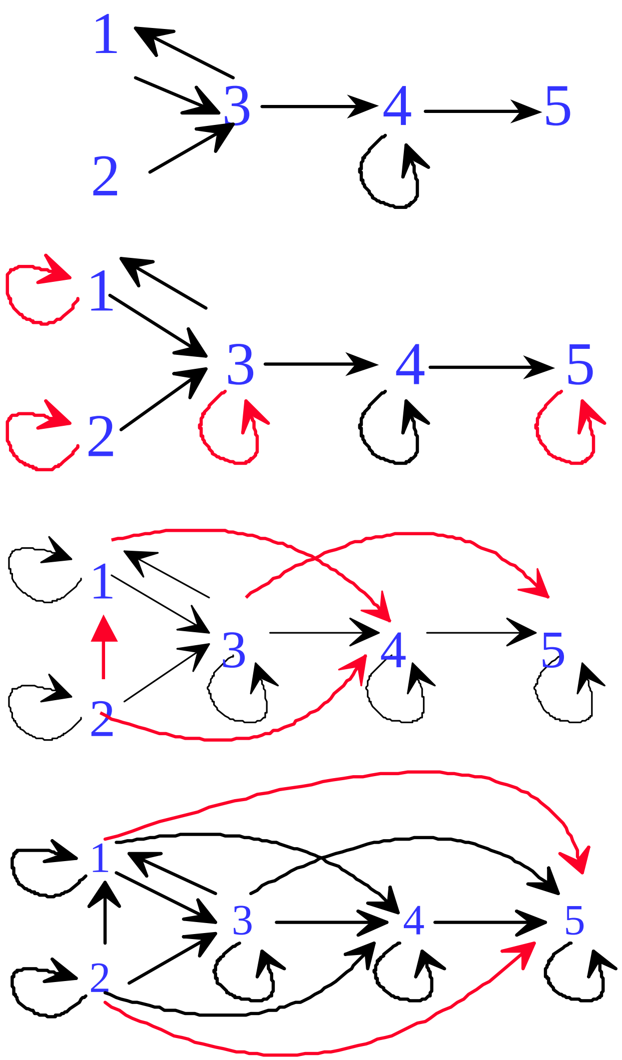


Lemme

Pour tout $k \ge 1$, $B_{2k} = B_k \cdot B_k$

car $B_{2k}[i,j] = 1$ ssi $B_k[i,j] = 1$ ou ($\exists\, s \in S$ $B_k[i,s] = 1$ et $B_k[s,j] = 1$)

Calcul de B comme une puissance n-1 en temps $O(n^3 \log n)$



$$A = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0 \\ 1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$B = B_4 = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

2 produits de matrices

Algorithme de Warshall

$G = (S, \text{A})$ avec $S = \{1, 2, ..., n\}$

Chemin de longueur k : i ® s_1 ® s_2 .... s_{k-1} ® j

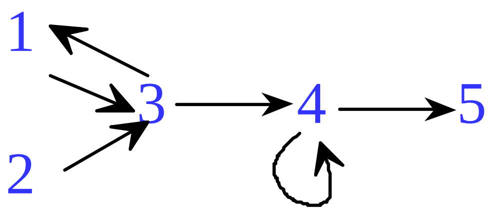
Sommets intermédiaires : $s_1, s_2, ..., s_{k-1}$

Notation

C_k= matrice des chemins de G dont les
sommets intermédiaires sont tous £ k

C_0 $= I + A$

C_n = matrice des chemins de G $= B$

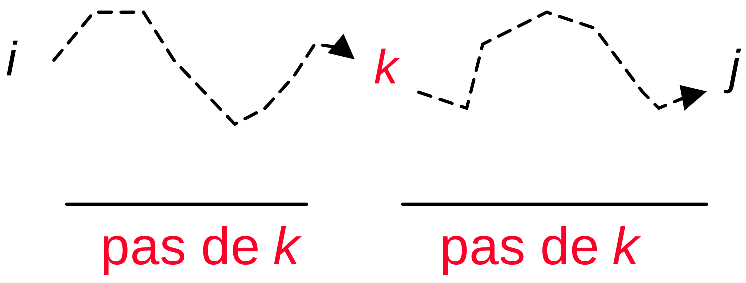


Chemin de 2 à 4 : (2,3), (3,1), (1,3), (3,4), (4,4)

sommets intermédiaires : 1, 3, 4

Récurrence

Chemin simple

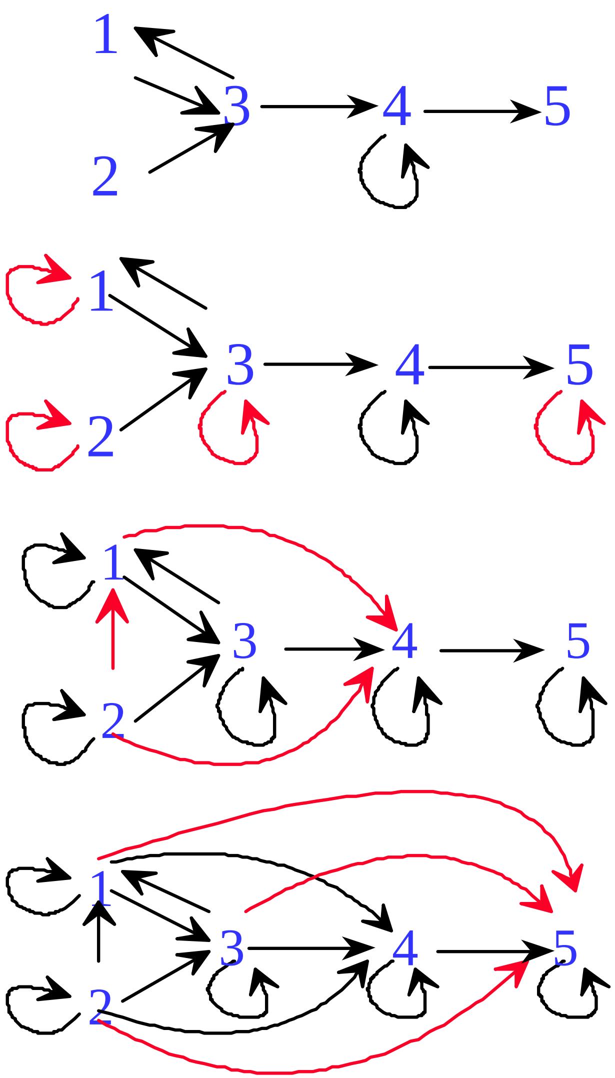


Lemme Pour tout k ³ 1,

$C_k [i,j] = 1$ ssi $C_{k\text{-}1} [i,j] = 1$ ou ($C_{k\text{-}1} [i,k] =1$ et $C_{k\ \text{-}1} [k,j] =1$)

Calcul

de C_k à partir de $C_{k\text{-}1}$ en temps $O(n^2)$
de $B = C_n$ en temps $O(n^3)$



$$A = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$C_0 = C_1 = C_2 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0 \\ 1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$B = C_4 = C_5 = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

~1 produit de matrice

UMLV ©

fonction clôture (graphe $G = (S, A)$) : matrice ;
début
  $n \leftarrow$ card S ;
  pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    pour $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
      si $i = j$ **ou** $A[i,j] = 1$ **alors**
        $B[i,j] \leftarrow 1$;
      sinon
        $B[i,j] \leftarrow 0$;
  pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
      pour $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
        $B[i,j] \leftarrow B[i,j] + B[i,k] \,.\, B[k,j]$;
retour B ;
fin

+ est la somme booléenne ; temps d 'exécution $O(n^3)$

Distances

$G = (S, A, v)$ graphe valué $\quad S = \{1,2,\ldots,n\}$ $\quad v : A \to \mathbf{N}$

Matrice des poids : $W = (W[i,j])$ avec

$$W[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ v((i,j)) & \text{si } (i, j) \in A \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Poids d 'une suite $c = ((s_0,s_1), (s_1,s_2), \ldots, (s_{k-1},s_k))$ où les $s_i \in S$

$$w(c) = \sum W[\, s_{i-1},s_i \,]$$

Distance de s à t

$$d(s, t) = \min\{\, w(c) \mid c \text{ suite de } s \text{ à } t \,\}$$

Plus court chemin de s à t :

chemin c, s 'il existe, tel que $w(c) = d(s, t)$

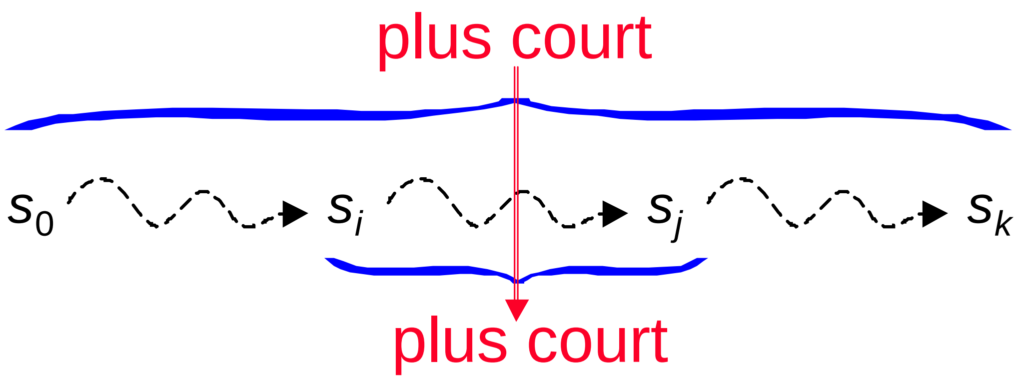
Problème

Calculer la matrice des distances $D = (\ d(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n\ )$

Lemme de base

$(\ (s_0,s_1), \ldots, (s_i,s_{i+1}), \ldots, (s_{j\text{-}1}, s_j), \ldots, (s_{k\text{-}1},s_k)\ )$
plus court chemin de s_0 à s_k dans G

Þ $(\ (s_i,s_{i+1}), \ldots, (s_{j\text{-}1},s_j)\ )$ plus court chemin de s_i à s_j dans G



Algorithme de Floyd

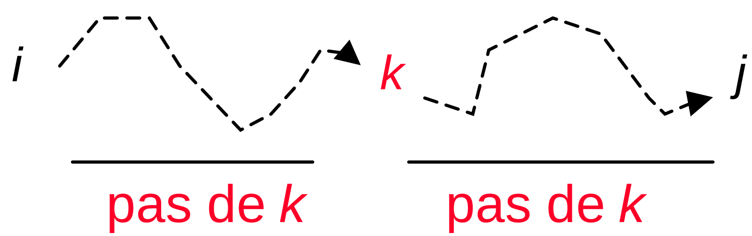
Notation

D_k = ($D_k[i, j]$ | $1 \leq i, j \leq n$) avec

$D_k[i, j]$ = min{ $w(c)$ | c suite de i à j dont
les sommets intermédiaires sont tous £ k }

$D_0 = W$

D_n = matrice des distances de G = D



Lemme Pour tout k ³ 1,

$$D_k[i,j] = \min\{ D_{k-1}[i,j] , D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j] \}$$

Calcul

de D_k à partir de D_{k-1} en temps $O(n^2)$

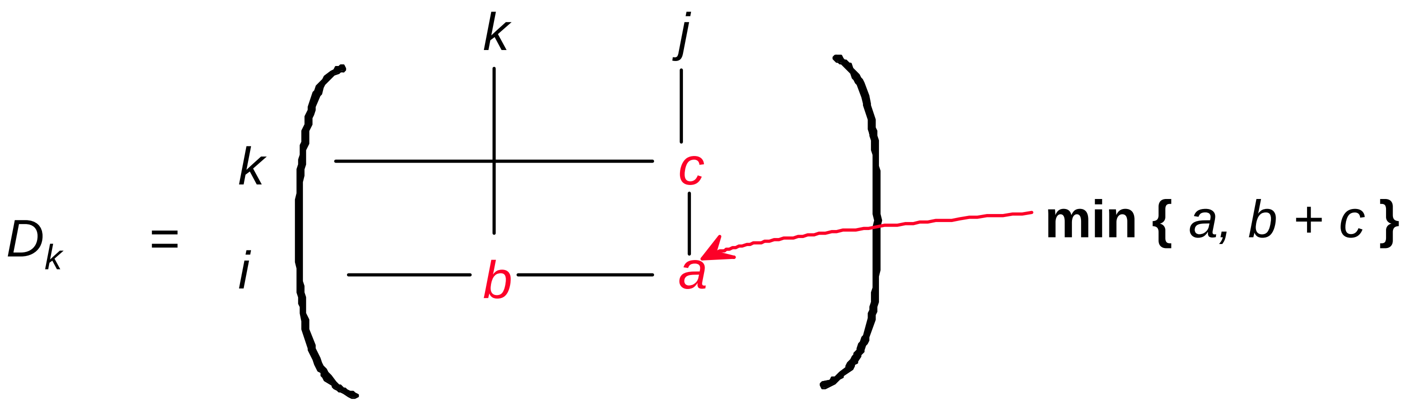
de $D = D_n$ en temps $O(n^3)$

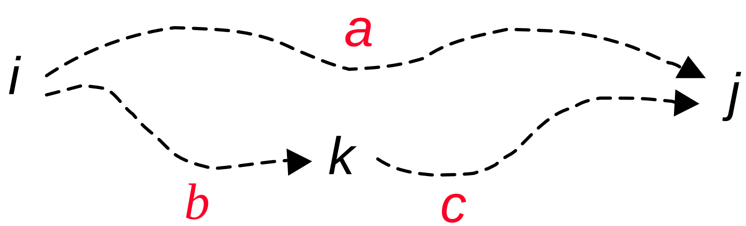
pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**

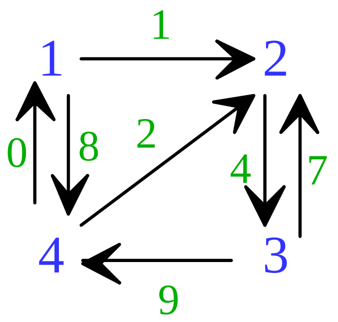
pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

pour $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$D[i, j] \leftarrow \mathbf{min}\ \{\ D[i, j]\ ,\ D[i, k] + D[k, j]\ \}$;







$$D_0 = W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 8 \\ \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 8 \\ \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 8 \\ \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 8 \\ \infty & 0 & 4 & 13 \\ \infty & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 8 \\ 13 & 0 & 4 & 13 \\ 9 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Mémorisation des chemins

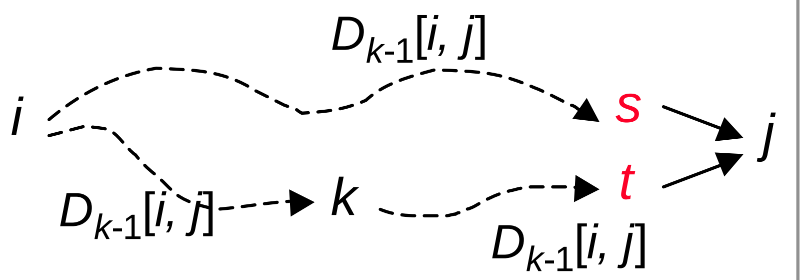
Mémorisation explicite des plus courts chemins de i à j, $1 \le i, j \le n$

n^2 chemins de longueur maximale n-1 : espace $O(n^3)$

Matrice des prédécesseurs : espace $\Theta(n^2)$

$P_k = (P_k[i, j] \mid 1 \le i, j \le n)$ avec

$P_k[i, j]$ = prédécesseur de j sur un plus court chemin de i à j dont les sommets intermédiaires sont tous $\le k$

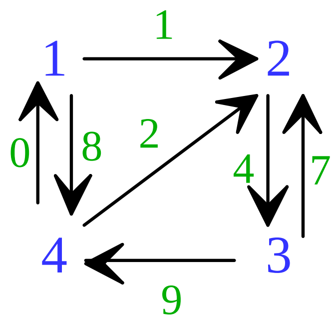


Récurrence

$$P_0[i, j] = \begin{cases} i & \text{si } (i, j) \in A \\ - & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_k[i, j] = \begin{cases} P_{k-1}[i, j] & \text{si } D_{k-1}[i, j] \le D_{k-1}[i, k] + D_{k-1}[k, j] \\ P_{k-1}[k, j] & \text{sinon} \end{cases}$$

UMLV ©



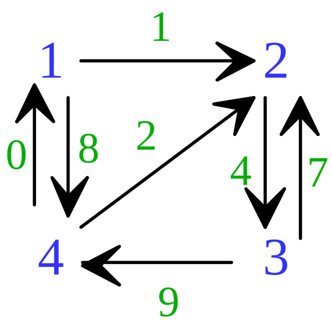
$$D_0 = W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 8 \\ \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad P_0 = \begin{pmatrix} - & 1 & - & 1 \\ - & - & 2 & - \\ - & 3 & - & 3 \\ 4 & 4 & - & - \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 8 \\ \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} - & 1 & - & 1 \\ - & - & 2 & - \\ - & 3 & - & 3 \\ 4 & 1 & - & - \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 8 \\ \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} - & 1 & 2 & 1 \\ - & - & 2 & - \\ - & 3 & - & 3 \\ 4 & 1 & 2 & - \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 8 \\ \infty & 0 & 4 & 13 \\ \infty & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} - & 1 & 2 & 1 \\ - & - & 2 & 3 \\ - & 3 & - & 3 \\ 4 & 1 & 2 & - \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 8 \\ 13 & 0 & 4 & 13 \\ 9 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} - & 1 & 2 & 1 \\ 4 & - & 2 & 3 \\ 4 & 3 & - & 3 \\ 4 & 1 & 2 & - \end{pmatrix}$$



$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 8 \\ 13 & 0 & 4 & 13 \\ 9 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_4 = \begin{bmatrix} - & 1 & 2 & 1 \\ 4 & - & 2 & 3 \\ 4 & 3 & - & 3 \\ 4 & 1 & 2 & - \end{bmatrix}$$

Exemple de chemin

distance de 2 à 1 = $D_4[2,1] = 13$

$P_4[2,1] = 4$; $P_4[2,4] = 3$; $P_4[2,3] = 2$;

$$2 \xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{9} 4 \xrightarrow{0} 1$$