ALGORITHMIQUE

Maxime CROCHEMORE
http://www-igm.univ-mlv.fr/~mac/

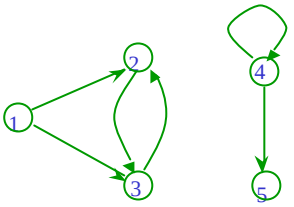
Université de Marne-la-Vallée

Plan du cours

- **Graphes**
  - Représentations, explorations
  - Clôture transitive, plus courts chemins
  - Arbres couvrants, flots
- **Automates**
  - Représentations, utilisations
  - Minimisation, équivalence
- **Textes**
  - Reconnaissance de motifs
  - Recherche de mots
  - Alignements

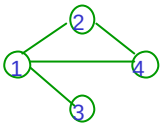
Graphes

Graphe (orienté) $G = (S, A)$
S ensemble fini des sommets
$A \subseteq S \times S$ ensemble des arcs,
i.e., relation sur S



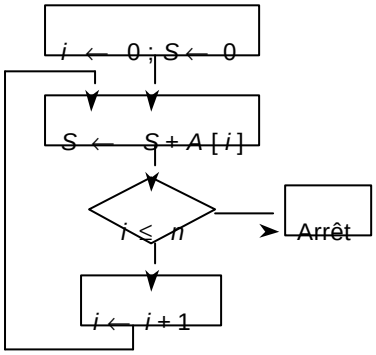
$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$
$A = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (4, 5) \}$

Graphe non orienté $G = (S, A)$
A ensemble des arêtes,
relation symétrique

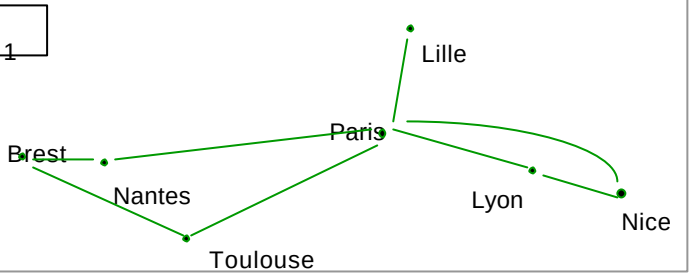


$S = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$A = \{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\} \}$

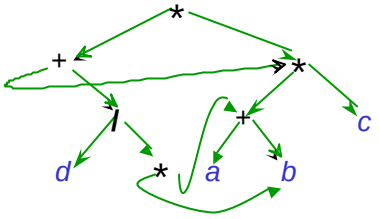
Flot de contrôle d'un programme



Réseau

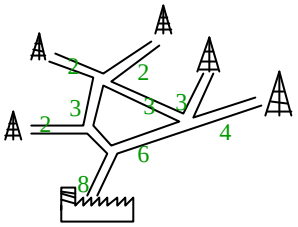


Graphe acyclique d'une expression (DAG)



((a+b)*c+d/(b*(a+b))) * (a+b)*c

Pipelines



Algorithmes

Explorations
- Parcours en profondeur, en largeur
- Tri topologique
- Composantes fortement connexes, ...

Recherche de chemins
- Clôture transitive
- Chemin de coût minimal
- Circuits eulériens et hamiltoniens, ...

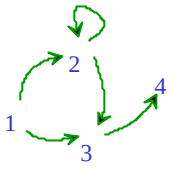
Arbres recouvrants
- Algorithmes de Kruskal et Prim

Réseaux de transport
- Flot maximal

Divers
- Coloration d'un graphe
- Test de planarité, ...

Terminologie

Graphe : $G = (S, A)$
Arc : $(s, t) \in A$ t adjacent à s, t successeur de s
Successeurs de s : $A(s) = \{ t \mid (s, t) \in A \}$
Boucle : $(t, t) \in A$



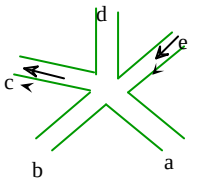
Chemins

Chemin : $c = ((s_0,s_1), (s_1,s_2), \ldots, (s_{k-1},s_k))$ où les $(s_{i-1},s_i) \in A$
origine = s_0
extrémité = s_k ((1,2), (2,2), (2,3), (3,4))
longueur = k
Circuit : chemin dont origine et extrémité coincident

sommet, nœud = *vertex (vertices)*, arc = *arc*,
orienté = *directed*, arête = *edge*,
chemin = *path*, circuit = *circuit*

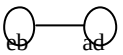
Problème de feux !

Graphe pour la modélisation
d 'un problème

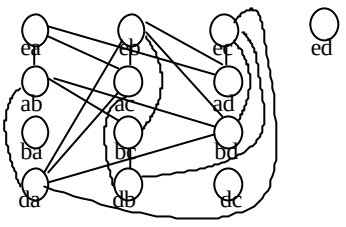


sens unique

traversée possible



traversées incompatibles

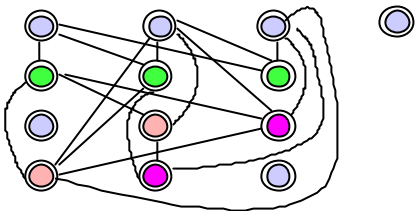


Coloration

$G = (S,A)$
coloration $f : S \rightarrow C$ telle que $(s,t) \in A \Rightarrow f(s) \neq f(t)$

Chr(G) = min card $f(S)$, nombre chromatique de G
f

Chr(G) = 4



couleur = ensemble de traversées compatibles

Algorithme de coloration

$G = (S, A)$ $S = \{ s_1, s_2, \ldots, s_n \}$
G sans boucle !

fonction coloration-séquentielle (G graphe) : entier ;
début
pour $i \neg 1$ **à** n **faire {**
$c \neg 1$;
tant que il existe t adjacent à s_i avec $f(t) = c$ **faire**
$c \neg c + 1$;
$f(s_i) \neg c$;
}
retour max ($f(s_i)$, $i = 1, \ldots, n$) ;
fin

Temps d 'exécution : $O(n^2)$ Calcul de Chr (G) : $O(n^2 n!)$
(appliquer la fonction à toutes les permutations de S)
Aucun algorithme polynomial connu !

Représentations

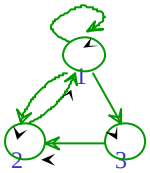
$G = (S, A)$ $S = \{1, 2, ..., n\}$

Liste des arcs
- représentation compacte
- hachage sur origine des arcs

Matrice d'adjacence
- utilisation d'opérations matricielles
- temps de traitement courant : quadratique

Listes de successeurs
- réduit la taille si $\text{card}A << (\text{card}S)^2$
- temps de traitement courant : $O(\text{card}S + \text{card}A)$

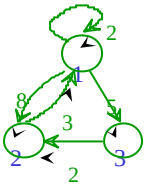
Matrices d'adjacence



$S = \{ 1, 2, 3 \}$
$A = \{ (1,1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

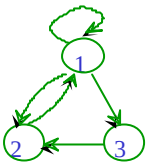
$M[i, j] = 1$ ssi j adjacent à i



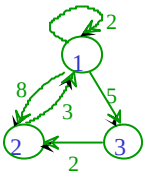
$$V = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Valuation : $v : A \rightarrow X$

Listes de successeurs

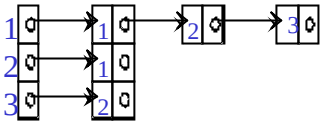


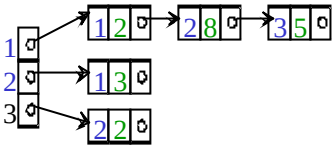
Listes des *A*(*s*)



Valuation : $v : A \rightarrow X$

S = { 1, 2, 3 }
A = { (1,1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 2)}





Exploration

$G = (S, A)$
Explorer G = visite de tous les sommets
et de tous les arcs

Algorithme de base pour
- recherche de cycles
- tri topologique
- recherche des composantes connexes
- actions sur les sommets (coloration, ...)
  sur les arcs (valuation, ...)

Parcours en profondeur ou en largeur
- extensions des parcours d'arbres

Parcours en profondeur

Marquage nécessaire

```
pour chaque sommet de s de G faire
        visité[s] ← faux ;
pour chaque sommet s de G faire
        si non visité [s] alors Prof (s) ;

procédure Prof (s sommet de G) ;
début
        action préfixe sur s ;
        visité[s] ← vrai ;
        pour chaque t successeur de s faire {
                action sur l'arc (s,t) ;
                si non visité[ t ] alors Prof ( t ) ;
        }
        action suffixe sur s ;
fin
```


Temps de parcours

T (« pour chaque sommet ») = O(card S)

Matrice d'adjacence

T (« **pour** chaque t adjacent à s ») =
T (« **pour** chaque sommet t tel que M [s,t] = 1 ») = O(card S)
⇒ parcours en $O((\text{card } S)^2)$

Listes de successeurs

T (« **pour** chaque t adjacent à s ») = O(card $A(s)$)
⇒ parcours en O(card S + card A)

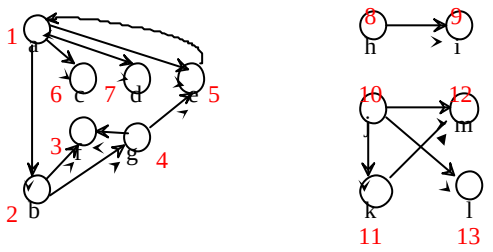
Numérotation

fonction Numérotation (*G* graphe) : table des numéros
  pour chaque sommet *s* de *G* **faire**
    no [*s*] ¬ 0 ;
  nb ¬ 0 ;
  pour chaque sommet *s* de *G* **faire**
    si *no* [*s*] = 0 **alors** Num (*s*) ;
  retour (*no*) ;
fin
procédure Num (*s* sommet de *G*) ;
début
  nb ¬ *nb* + 1 ; *no* [*s*] ¬ *nb* ;
  pour chaque *t* successeur de *s* **faire**
    si *no* [*t*] = 0 **alors** Num (*t*) ;
fin

nombre d'appels de Num = card *S*
nombre de « *no* [*t*] = 0 » dans Num = card *A*

temps = O (card *S* + card *A*)
avec listes de successeurs

Parcours en profondeur



Fond de pile

Pile : a e d c b g f e h i j m l k m

Ordre du parcours : a b f g e c d h i j k m l

```
Procédure Prof (s sommet de G) ;      /* version itérative */
début
        Pile ¬ Empiler (Pile-vide, s) ;
        tant que non vide (Pile) faire {
                s' ¬ Elt (sommet (Pile)) ; Pile ¬ Dépiler (Pile) ;
                si non visité [s'] alors {
                        visité [s'] ¬ vrai ;
                        pour t ¬ dernier au premier successeur de s' faire
                                si non visité [ t ] alors
                                        Pile ¬ Ajouter (Pile, t) ;
                }
        }
fin
```

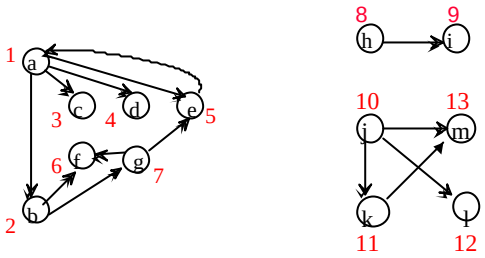
Pour "action préfixe" uniquement
Note : il peut y avoir plusieurs occurrences d'un même sommet dans la pile. Ne pas l'interdire !

Parcours en largeur

```
Procédure Larg (s sommet de G) ;
début
        File ¬ Ajouter (File-vide, s) ;
        tant que non Vide (File) faire {
                s' ¬ Premier (File) ; File ¬ Enlever (File, s') ;
                si non visité [s'] alors {
                        visité [s'] ¬ vrai ;
                        pour t ¬ premier au dernier successeur de s' faire
                                si non visité [ t ] alors
                                        File ¬ Ajouter (File, t) ;
                }
        }
fin
```

Note : il peut y avoir plusieurs occurrences d'un même sommet dans la file. On peut l'interdire !

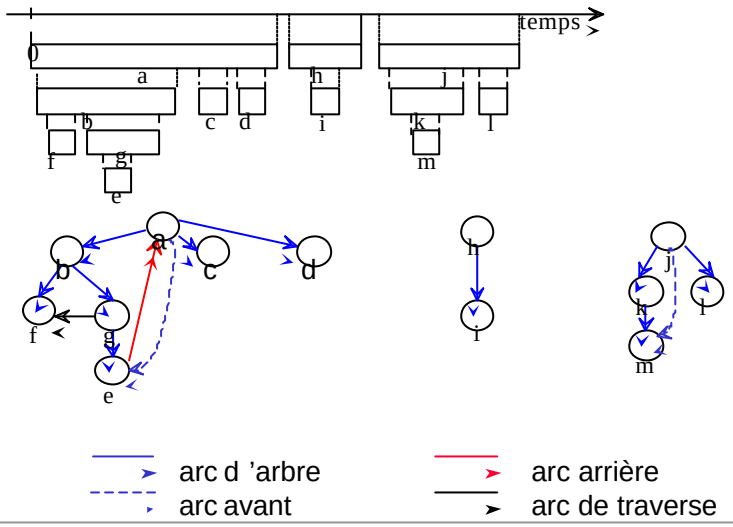
Parcours en largeur



File : ~~a~~ ~~b~~ ~~c~~ ~~d~~ ~~e~~ ~~f~~ ~~g~~ ~~h~~ ~~i~~ ~~j~~ ~~k~~ ~~l~~ m

Ordre du parcours : a b c d e f g h i j k l m

Forêt de l'exploration en profondeur



Détection d'un circuit

Proposition

G possède un circuit ssi il existe un arc arrière dans un parcours en profondeur de G

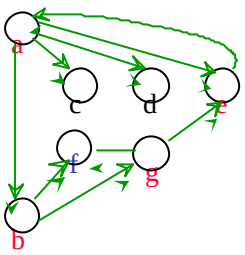
$d(s)$: date de début d'exécution de Prof(s)
$f(s)$: date de fin d'exécution de Prof(s)

(s,t) arc de G est un

- arc d'arbre
  ou arc avant ssi $d(s) < d(t) < f(t) < f(s)$
- arc arrière ssi $d(t) < d(s) < f(s) < f(t)$
- arc de traverse ssi $f(t) < d(s)$

Trois états !

Au cours d'une exploration :
état [s] = noir s non visité
état [s] = rouge s en cours de visite (dans Pile ou File)
état [s] = bleu s déjà visité



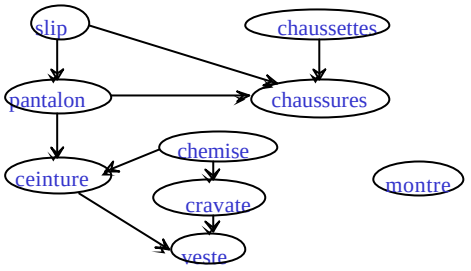
Pendant la visite du sommet e, on détecte un cycle passant par l 'arc (e, a) car a est aussi en cours de visite

Tri topologique

UMLV ©

Prolongement d 'un ordre partiel en un ordre total

graphe sans circuit, *i.e.* pas d 'arc arrière



Ordre possible d'habillage

Ordre final : ordre décroissant des *f* (*s*) dans un parcours en profondeur

Tri topologique par exploration en profondeur

UMLV ©

```
fonction Tri-topologique (G graphe acyclique) : liste ;
début
        pour chaque sommet s de G faire
                visité [s] ¬ faux ;
        L ¬ liste-vide ;
        pour chaque sommet s de G faire
                si non visité [s] alors Topo (s) ;
        retour (L) ;
fin

procédure Topo (s sommet de G) ;
début
        visité [s] ¬ vrai ;
        pour chaque t adjacent à s faire
                si non visité [t] alors Topo (t) ;
        Ajouter s en tête de L ;
fin
```

Méthode itérative

UMLV ©

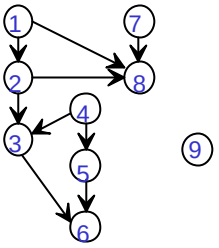
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nb-préd	0	1	2	0	1	2	0	3	0

Sommets à traiter : 1 4 7 9
(sans prédécesseur)

Après traitement de 1 :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nb-Préd	-	0	2	0	1	2	0	2	0

Sommets à traiter : 4 7 9 2



Tri topologique itératif

UMLV ©

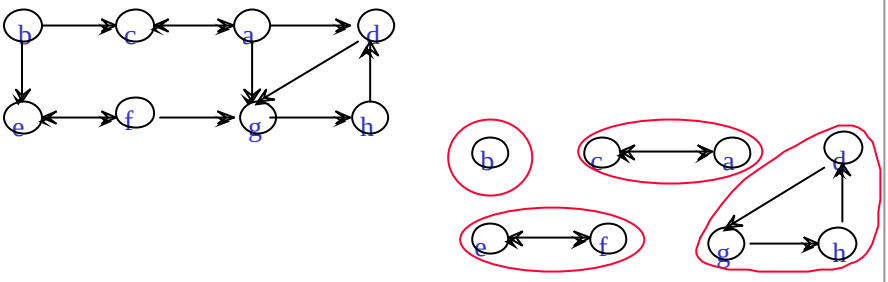
Fonction Tri-topologique (*G* graphe acyclique) : liste ;
début
    F ¬ File-vide ;
    tant que *G* non vide **faire**
        si tous les sommets ont un prédécesseur **alors**
            « *G* contient un circuit » ;
        sinon {
            s ¬ un sommet sans prédécesseur ;
            G ¬ *G* diminué de *s* et des arcs d'origine *s* ;
            F ¬ Ajouter (*F*, s) ;
        }
    retour (*F*) ;
fin

Temps d 'exécution : *O*(card *S* + card *A*)
    avec gestion efficace de la liste des sommets à traiter

Composantes fortement connexes

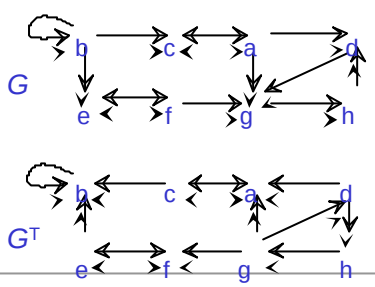
$G = (S, A)$ graphe
$G' = (S', A')$ sous-graphe de G ssi $S' \subseteq S$ et $A' \subseteq A \cap S' \times S'$

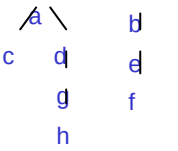
F **composante fortement connexe** de G :
F sous-graphe maximal de G tel que
deux sommets qlcq de F sont reliés par un chemin.



Calcul

G^T = graphe transposé de G
Algorithme [Kosaraju 78] [Sharir 81]
L ¬ liste des sommets de G obtenus par
parcours en profondeur suffixe ;
à partir de L^R, appliquer un parcours en profondeur à G^T ;
Les arbres de cette exploration sont
les composantes fortement connexes





L = c h g d a f e b
L^R = b e f a d g h c