

Complexité des problèmes

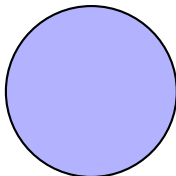
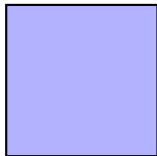
I. Introduction

Cyril Nicaud

M1 Informatique, 2014–2015

Quadrature du cercle

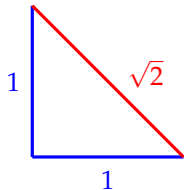
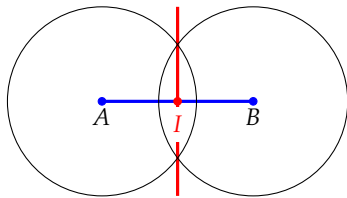
- ▶ La **quadrature du cercle** est un des grands problèmes mathématiques de l'antiquité (origine Vème siècle av. JC)
- ▶ Il s'agit, à partir d'un **carré**, de construire **à la règle et au compas** un **cercle** ayant **la même surface**



- ▶ Les mathématiciens ont essayé de résoudre ce problème pendant des siècles ...
- ▶ Jusqu'à ce que **Ferdinand von Lindemann** prouve un résultat sur le **nombre π** , qui implique que la quadrature du cercle est **impossible !**

Quadrature du cercle – suite

- Dans un premier temps, il faut **comprendre ce qu'on peut construire** à la règle et au compas



- On peut couper une longueur en 2, couper un angle en 2, calculer certaines racines carrées, etc.

Quadrature du cercle – fin

- ▶ Dans un deuxième temps on définit le **nombre π** par :

$$\pi := \frac{\text{surface d'un disque de rayon } r}{\text{surface d'un carré de côté } r}$$

- ▶ Et il faut démontrer que ce nombre n'est **pas calculable** avec les opérations à la règle et au compas

Conclusion

C'est un résultat d'**impossibilité** : **quelque soit la façon de s'y prendre**, on ne peut pas réaliser la quadrature du cercle.

- ▶ Ce sont des résultats souvent **difficiles** ...
- ▶ ... mais **indispensables**, sinon on peut chercher longtemps une solution (plusieurs siècles pour cet exemple historique)

Problèmes d'informatique

- ▶ On donnera une définition plus précise plus tard, mais on s'intéresse à des **problèmes informatiques**, comme par exemple :
 - ▶ Trier un tableau d'objets
 - ▶ Calculer le plus court chemin dans un graphe
 - ▶ Savoir si un fichier.c a une boucle infinie ou pas
- ▶ Est-ce qu'on a des résultats d'**impossibilité** sur ce genre de problèmes ?
- ▶ **Oui !** (c'est l'objet de ce cours)
- ▶ Il peut y avoir plusieurs types de limites : problème impossible, problème impossible à résoudre en temps raisonnable, ...

Problèmes d'informatique – deux résultats typiques

Un résultat d'indécidabilité :

Boucle infinie

Il n'est pas possible d'écrire un programme qui détecte à coup sûr si un autre programme s'arrête.

Un résultat de borne inférieure :

Tri

On ne peut pas trier par comparaisons un tableau de taille n en temps meilleur que $n \log n$.

Problèmes d'informatique – arrêt

Problème de l'arrêt

Il n'est **pas possible** d'écrire un programme qui détecte à coup sûr si un autre programme s'arrête.

- ▶ Ça ne veut pas dire qu'on ne peut pas (parfois ou souvent) détecter des boucles infinies
- ▶ Par exemple, une boucle `while (i < n)` où la variable `i` n'est **pas modifiée** dans le corps de la boucle est **facilement détectable**
- ▶ Ce que signifie ce théorème c'est qu'on ne peut pas couvrir **tous les cas**

Problèmes d'informatique – tri par comparaisons

Tri

On ne peut pas **trier par comparaisons** un tableau de taille n en temps meilleur que $n \log n$.

- ▶ Cela signifie que pour **n'importe quel** algorithme de tri, s'il ne peut que **comparer les objets**, ne peut pas faire moins de $n \log n$ comparaisons dans le **pire des cas**
- ▶ **Comprendre** : on a juste une méthode `compareTo(other)` sur les objets
- ▶ Si l'algorithme peut faire d'**autres choses** que comparer les données, on n'est pas dans le même cadre (exemple en TD), la borne théorique ne **s'applique pas**

Problèmes d'informatique – tri optimaux

Tri

On ne peut pas trier par comparaisons un tableau de taille n en temps meilleur que $n \log n$.

- ▶ Les tris par insertion, par sélection, bulle sont en $\mathcal{O}(n^2)$ dans le pire cas et en moyenne, ils ne sont pas optimaux
- ▶ Le Tri Fusion et le Tris par Tas sont optimaux en $\mathcal{O}(n \log n)$
- ▶ Quicksort est en $\mathcal{O}(n^2)$ dans le pire cas, mais $\mathcal{O}(n \log n)$ en moyenne : il est optimal en moyenne

Objectifs du cours

- ▶ Travailler sur les **problèmes informatiques**, pas sur une solution spécifique
- ▶ Étudier si des problèmes sont **intrinsèquement difficiles** pour un ordinateur (longs à traiter)
- ▶ Établir des **bornes inférieures**, comme pour le tri par comparaisons
- ▶ **Non traité** : Étudier si des problèmes sont impossibles à résoudre (déjà fait dans le cours de L3 de **calculabilité**)