Complexité des problèmes

– M1 –

2014-2015

Examen : durée 2h.
Les notes de cours sont autorisées.

▶ **Exercice 1** ◀ On suppose que le problème `ProblemeA` est de complexité $\Theta(n^2)$. Pour chacun des cas suivants, donnez l'information la plus précise que vous pouvez en déduire sur la complexité du problème `ProblemeB` (sous forme d'un $\mathcal{O}$ ou d'un Ω) :

(a) `ProblemeB` $\lll_{\mathcal{O}(n)}$ `ProblemeA`;

(b) `ProblemeB` $\lll_{\mathcal{O}(n^2 \log n)}$ `ProblemeA`;

(c) `ProblemeA` $\lll_{\mathcal{O}(n \log n)}$ `ProblemeB`.

▶ **Exercice 2** ◀ On note `3SumDist` un problème similaire à `3Sum` : étant donné un tableau T contenant n nombres **différents**, existe-t-il trois éléments deux à deux distincts $x, y, z \in T$ tels que $x + y + z = 0$?

On s'intéresse au problème `3Intersect` défini de la façon suivante : étant donné un ensemble Δ de droites du plan de la forme $y = ax + b$, existe-t-il un point par lequel passent trois droites de Δ ?

Soient D_1, D_2 et D_3 les droites d'équations $y = a_i x + a_i^3$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$, et pour $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.

(a) Soit $M_{12} = (x_{12}, y_{12})$ le point d'intersection de D_1 et D_2. Montrez que $x_{12} = -a_1^2 - a_1 a_2 - a_2^2$. On pourra utiliser que $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$.

(b) Soit $M_{13} = (x_{13}, y_{13})$ le point d'intersection de D_1 et D_3. Montrez que $x_{13} = -a_1^2 - a_1 a_3 - a_3^2$.

(c) En déduire que si $M_{12} = M_{13}$ (et donc que les trois droites s'intersectent en un même point), alors $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

(d) Réciproquement, montrez que si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, alors $M_{12} = M_{13}$.

(e) En déduire que `3SumDist` $\lll_{\mathcal{O}(n)}$ `3Intersect`.

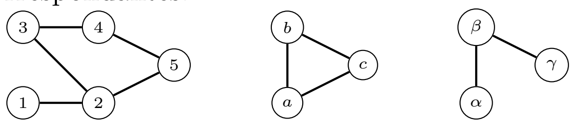
▶ **Exercice 3** ◀ On considère le problème suivant : soit T un tableau de chaînes de caractères, qui sont des mots (non-vides) sur l'alphabet fixé A, avec $|A| = k$ lettres. Le problème `TriChaines` consiste à trier le tableau pour l'ordre lexicographique (l'ordre du dictionnaire).

(a) On considère que la taille $\|T\|$ d'un tableau T est la somme des longueurs des chaînes de T. Indiquez pourquoi c'est une bonne notion de taille. On note également $|T|$ le nombre de cases de T (attention ce n'est pas sa taille).

(b) Montrez que le nombre de tableaux T tels que $\|T\| = n$ et $|T| = \ell$ est $k^n \binom{n-1}{\ell-1}$, où $\binom{q}{p}$ est le nombre de façons de choisir p éléments parmi q (parfois noté C_q^p). On pourra voir T comme un long mot de taille n qu'on a découpé en $\ell - 1$ endroits.

(c) En déduire une borne inférieure en $\Omega(n)$ pour le problème `TriChaines`.

▶ **Exercice 4** ◀ On dit que deux graphes G_1 et G_2 sont *isomorphes* quand ils ont le même nombre de sommets et qu'ils sont identiques à renumérotation des sommets prêts (formellement : il y a une bijection des sommets de G_1 dans ceux de G_2 qui préserve les arêtes). Un *sous-graphe* d'un graphe G est un graphe obtenu en enlevant des sommets de G et les arêtes correspondantes.



G H_1 H_2

(a) Est-ce que H_1 est isomorphe à un sous-graphe de G ? Même question pour H_2. Justifiez.

Le problème `SousGrapheIsomorph` consiste étant donnés deux graphes G et H à décider si H est isomorphe à un sous-graphe de G.

(b) En réduisant un des trois problèmes de graphes vu en cours à `SousGrapheIsomorph`, montrez que `SousGrapheIsomorph` est `NP-difficile`.