

Maths pour l'Info 1

– L1 –
2011-2012

TD n° 1: rappels

► **Exercice 1** ◀ On considère les sous-ensembles de \mathbb{N} suivants :

- $A = \{1, 2, 3, 7, 9, 12\}$
- $B = \{2, 4, 7, 8, 12\}$
- $C = \{3, 7, 9, 11\}$

Calculez le résultat des expressions suivantes :

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|
| • $A \cap B$ | • $(A \cap B) \cup C$ |
| • $A \cap \bar{B}$ | • $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| • $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ | • $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| • $A \setminus B$ | • $C \times C$ |
| • $B \setminus A$ | • $ C \times C $ |
| • $A \cap (B \cup C)$ | • $ C \times A $ |

► **Exercice 2** ◀ Parmi les applications suivantes, précisez, en justifiant, lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives:

- La fonction $f : \{1, \dots, 6\} \rightarrow \{3, \dots, 8\}$ définie par $f(k) = 9 - k$;
- La fonction $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(k) = k^2 + k + 1$;
- La même fonction que pour la question précédente, mais de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$;

► **Exercice 3** ◀ Proposez une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} qui soit surjective mais pas injective.

► **Exercice 4** ◀ Soient m et n deux entiers strictement positifs. On note $E = \{1, \dots, n\}$ et on définit

$$F = \{(x, y) \in E \times E \mid x \leq m \text{ ou } y \leq m\}.$$

Calculez le cardinal de F .

► **Exercice 5** ◀ Dans cet exercice on note $E = \{0, \dots, n-1\}$ et on s'intéresse aux sous-ensembles de E . On représente un sous-ensemble X de E par un tableau de taille n , où on a un 1 en position i si $i \in X$ et un 0 si $i \notin X$.

- Pour $n = 7$, représentez le tableau de $X = \{1, 4, 5\}$.

- Mathématiquement on voit un tableau de taille n contenant des 0 et des 1 comme un élément de $\{0, 1\}^n$. Donnez le n -uplet associé à l'ensemble X précédent.

- Soit ϕ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0, 1\}^n$ qui a un sous-ensemble associe le n -uplet correspondant. Calculez $\phi(E)$ et $\phi(\emptyset)$.

- Montrez que ϕ est bijective.

- En déduire que $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.

► **Exercice 6** ◀ On reprend l'encodage sous forme de tableau des sous-ensembles de E de l'exercice précédent. Ecrire les fonctions suivantes en C (on note MAX la taille maximale d'un tableau) :

- une fonction qui teste si $x \in X$, pour x et X donnés;
- une fonction qui calcule le complémentaire d'un ensemble X donné;
- une fonction qui calcule l'union de deux ensembles X et Y donnés;
- une fonction qui calcule intersections de deux ensembles X et Y donnés;

► **Exercice 7** ◀ Ecrire les nombres 13, 24 et 33 en binaire et en ternaire.

► **Exercice 8** ◀ Ecrire un programme C qui étant donné deux nombres n et b calcule combien il y a de chiffres dans l'écriture en base b de n .

► **Exercice 9** ◀ Ecrire un algorithme qui étant donné n et b , calcule l'écriture en base b de n .